Pembahasan Soal Ujian Profesi Aktuaris

Persatuan Aktuaris Indonesia

A50-Metode Statistika

Periode 2014-2019

Tim Penyusun:

Wawan Hafid Syaifudin, M.Si, MAct.Sc

Agus Sofian Eka Hidayat, M.Ed, M.Sc

READI

Risk Management, Economic Sustainability and Actuarial Science Development in Indonesia

2019

Daftar Isi

1 A50 Periode November 2014

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal no. 1 sampai dengan 3:

Sebuah *Survival Distribution* didefinisikan sebagai $S(t) = 0,30(80-t)^{1/2}$, di dalam daerah domain $0 \leq t \leq 100$.

1. Tentukan $f(24)$

   A. $0,019$

   B. $0,020$

   C. $0,022$

   D. $0,025$

   E. Tidak ada jawaban yang benar

   Pembahasan:

   Diberikan $S(t) = 0,30(80-t)^{1/2}$ untuk $0 \leq t \leq 100$. Untuk mengerjakan soal ini, formula yang kita gunakan adalah

   $$f(t) = -S'(t)$$

   Dengan demikian, didapat:

   $$\begin{aligned} f(t) &= -\, S'(t) \\ &= -\frac{d}{dt}\left[0,30(80-t)^{1/2}\right] \\ &= (0,3)(0,5)(80-t)^{1/2} \\ &= \frac{0,15}{\sqrt{80-t}} \end{aligned}$$

   sehingga, $f(24) = 0,0200446 \approx 0,020$
   Jawab: B.

2. Tentukan $\lambda(45)$

   A. $0,0143$

   B. $0,0214$

   C. $0,0341$

D. $0,0413$

E. Tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Untuk mengerjakan soal ini, digunakan formula

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$$

Dengan demikian, kita peroleh:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{\frac{0,15}{\sqrt{80-t}}}{0,30(80-t)^{1/2}} = \frac{0,5}{80-t}$$

sehingga, $\lambda(45) = \dfrac{0,5}{80-45} = 0,0142857 \approx 0,0143$
Jawab: A.

3. Tentukan $\Lambda(25)$

   A. $0,1378$

   B. $0,1783$

   C. $0,1873$

   D. $0,214$

   E. Tidak ada jawaban yang benar

   Pembahasan:
   Dengan menggunakan:

   $$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(y)\,dy$$

   diperoleh

   $$\Lambda(25) = \int_0^2 5\frac{0,5}{80-y}\,dy = -0,5\ln(80-y)\Big|_0^{25} \approx 0,1873$$

   Jawab: C.

4. Sebuah *Survival Distribution* didefinisikan sebagai $S(t) = 0,10(100-t)^{1/2}$, di dalam daerah domain $0 \leq t \leq 100$. Tentukan $Var(T)$.

   A. 333.33

   B. 666.67

   C. 777.78

D. 889.77

E. 998.89

Pembahasan:
Dengan menggunakan formula:

$$f(t) = -S'(t)$$
$$E[T] = \int_0^\omega S(t)\,dt$$
$$E[T^2] = \int_0^\omega t^2 f(t)\,dt$$

diperoleh:

$$f(t) = -\frac{d}{dt}\left[0,1(100-t)^{1/2}\right] = \frac{0,05}{\sqrt{100-t}}$$
$$E[T] = \int_0^{100} 0,1(100-t)^{1/2}\,dt = -\left.\frac{(100-t)^{3/2}}{15}\right|_0^{100} = \frac{200}{3}$$
$$\int_0^{100} t^2 f(t)\,dt = -\left.\frac{\sqrt{100-t}(3t^2-400t+80000)}{150}\right|_0^{100} = \frac{16000}{3}$$

sehingga

$$Var[T] = E[T^2] - (E[T])^2 = \frac{16000}{3} - \left(\frac{200}{3}\right)^2 \approx 889,77$$

Jawab: D.

5. Sebuah *Survival Distribution* didefinisikan sebagai $S(x) = ax^2 + b$, dengan domain $0 \le x \le k$. Jika *expected value* dari X adalah 60, maka tentukan median dari X.

A. $25\sqrt{2}$

B. $45\sqrt{2}$

C. $49\sqrt{2}$

D. $57\sqrt{2}$

E. Tidak ada jawaban benar

Pembahasan:
Pertama, ingat bahwa $F(x) = 1 - S(x)$, artinya $F(x) = 1 - ax^2 - b$. Lalu, karena batas bawah dan batas atas dari domain adalah 0 dan k, maka $F(0) = 0$ dan $F(k) = 1$. Artinya,

$$0 = 1 - b$$
$$1 = 1 - ak^2 - b$$

didapatkan $b = 1$ dan $ak^2 = -1$. Lalu, tinjau nilai dari $E[X] = 60$, hal ini berarti:

$$60 = \int_0^k S(x)\,dx = \int_0^k ax^2 + b\,dx = \frac{ax^3}{3} + bx\Big|_0^k = \frac{ak^3}{3} + bk$$

Dengan melakukan substitusi $ak^2 = -1$ dan $b = 1$, diperoleh $\frac{-k}{3} + bk = \frac{-k+3k}{3} = \frac{2k}{3} = 60$. Artinya, $k = 90$ dan $a = -1/8100$. Dengan menggunakan formula $f(x) = -S'(x)$ didapat

$$f(x) = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{x^2}{8100} + 1\right] = \frac{2x}{8100}$$

Modus dari X diberikan oleh persamaan:

$$\begin{aligned}
0,5 &= \int_0^{X_{mod}} \frac{2x}{8100}\,dx \\
0,5 &= \frac{x^2}{8100}\Big|_0^{X_{mod}} \\
0,5 &= \frac{X_{mod}^2}{8100} \\
X_{mod} &= 45\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Jawab: B.

6. Jika diketahui T berdistribusi uniform di daerah $[1, 3]$. Tentukan $Var(T)$.

   A. $1/3$

   B. $1/4$

   C. $1/5$

   D. $2/3$

   E. $3/4$

   Pembahasan:
   Dari soal diatas, didapat $a = 1$ dan $b = 3$. Dengan menggunakan formula varians dari distribusi uniform, didapat

   $$Var[T] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

   Jawab: A.

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal no. 7 sampai dengan 10

Distribusi

$$f(x) = \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} x^{(r/2)-1} e^{-x/2}, x > 0$$

adalah distribusi *Chi-square* dengan $r > 0$ merupakan *degrees of freedom*.

7. Tentukan $E[X]$ untuk distribusi ini.

   A. $r/2$

   B. $r/4$

   C. r

   D. $2r$

   E. $1/(r-2)$

   Pembahasan:
   Dengan menggunakan sifat dari distribusi *Chi-square*, diperoleh nilai dari ekspektasinya adalah sama dengan derajat kebebasannya. Artinya, $E[X] = r$.
   Jawab: C.

8. Tentukan $Var[X]$ untuk distribusi ini.

   A. $r/2$

   B. $r/4$

   C. r

   D. $2r$

   E. $1/(r-2)$

   Pembahasan:
   Dengan menggunakan sifat dari distribusi *Chi-square*, diperoleh nilai dari variansnya adalah sama dengan dua kali derajat kebebasannya. Artinya, $Var[X] = 2r$.
   Jawab: D.

9. Tentukan $E[X^{-1}]$ untuk distribusi ini.

   A. $r/2$

   B. $r/4$

   C. r

   D. $2r$

   E. $1/(r-2)$

Pembahasan:
Akan dicari nilai dari $E[X^{-1}]$ dengan menggunakan definisi dari ekspektasi dari suatu peubah acak X.

$$\begin{aligned}
E[X^{-1}] &= \int_0^\infty x^{-1} f(x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x^{-1} \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} x^{(r/2)-1} e^{-x/2}\,dx \\
&= \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int_0^\infty x^{(r/2)-1-1} e^{-x/2}\,dx \\
&= \frac{1}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int_0^\infty x^{(r-2)/2-1} e^{-x/2}\,dx
\end{aligned}$$

Lalu, ide untuk menyelesaikan integral diatas adalah dengan membentuk fungsi gamma, dimana

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx$$

Dengan memisalkan $y = x/2$ diperoleh $dy = dx/2$ dan integral berubah menjadi

$$\begin{aligned}
E[X^{-1}] &= \frac{2}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int_0^\infty (2y)^{(r-2)/2-1} e^{-y}\,dy \\
&= \frac{2^{(r-2)/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \int_0^\infty y^{[(r-2)/2]-1} e^{-y}\,dy \\
&= \frac{2^{r/2-1}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} \Gamma((r-2)/2) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(r/2-1)}{\Gamma(r/2)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(r/2-2)!}{(r/2-1)!} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(r/2-2)!}{(r/2-1)(r/2-2)!} \\
&= \frac{1}{2(r-2)/2} \\
&= \frac{1}{r-2}
\end{aligned}$$

Jawab: E.

10. Tentukan *the hazard rate*, $\lambda(x)$, untuk distribusi ini jika $r = 2$.

A. $1/2$

B. $1/3$

C. $1/4$

D. $1/8$

E. Tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Untuk $r = 2$ diperoleh $f(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{2}$. Lalu, fungsi $\lambda(x)$ diberikan oleh persamaan

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

Artinya, dicari $S(x)$ terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} S(x) &= 1 - \int_0^x f(y)\,dy \\ &= 1 - \int_0^x \frac{e^{-y/2}}{2}\,dy \\ &= 1 - \left[-e^{-y/2}\right]\Big|_0^x \\ &= e^{-x/2} \end{aligned}$$

Berjalan dari hasil ini,

$$\lambda(x) = \frac{\frac{e^{-x/2}}{2}}{e^{-x/2}} = 1/2$$

Jawab: A.

<u>**Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal no. 11 sampai dengan 13**</u>

Sebuah *survival distribution function* (SDF) didefinisikan sebagai :

$$S(x) = \frac{c-x}{c+x}, 0 \leq x < c$$

Sebuah *life table* dibuat berdasarkan SDF ini dengan menggunakan $l_0 = 100.000$, dimana dalam *life table* ini menghasilkan $l_{35} = 44.000$.

11. Tentukan nilai dari ω dalam tabel

A. 60

B. 70

C. 80

D. 90

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Tinjau formula,

$$_tp_x = S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Dengan demikian,

$$_{35}p_0 = S_0(35) = \frac{S_0(35)}{S_0(0)} = S_0(35) = \frac{c-35}{c+35} = \frac{l_{35}}{l_{40}} = 0,44$$

Artinya, $c = 90$. Diperoleh nilai $\omega = c = 90$.
Jawab: D.

12. Tentukan probabilitas orang bertahan hidup mulai dari lahir sampai berusia 60.

    A. $0,1$

    B. $0,2$

    C. $0,3$

    D. $0,4$

    E. $0,5$

    Pembahasan:
    Akan dihitung $_{60}P_0$ dengan menggunakan formula

    $$_tp_x = S_x(t) = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}$$

    sehingga,

    $$_{60}p_0 = S_0(60) = \frac{S_0(60)}{S_0(0)} = S_0(60) = \frac{90-60}{90+60} = 0,2$$

    Jawab: B.

13. Tentukan probabilitas bahwa seorang yang berusia 10 tahun akan meninggal di antara usia 30 dan 45.

    A. $1/24$

    B. $1/12$

    C. $1/8$

    D. $1/6$

    E. $5/24$

Pembahasan:
Dengan menggunakan formula

$$_{t|u}q_x =_t p_x -_{t+u} p_x$$

dimana

$$_t p_x = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)}$$

akan dicari nilai dari

$$_{20|15}q_{10} =_{20} p_{10} -_{35} p_{10} = \frac{S_0(30)}{S_0(10)} - \frac{S_0(45)}{S_0(10)}$$

dengan

$$\frac{S_0(30)}{S_0(10)} = \frac{\frac{90-30}{90+30}}{\frac{90-10}{90+10}} = \frac{5}{8}$$

dan

$$\frac{S_0(45)}{S_0(10)} = \frac{\frac{90-45}{90+45}}{\frac{90-45}{90+45}} = \frac{5}{12}$$

Atinya, diperoleh

$$_{20|15}q_{10} = \frac{5}{8} - \frac{5}{12} = \frac{5}{24}$$

Jawab: E.

14. Jika *the force of mortality* didefinisikan sebagai :

$$\mu_x = \frac{2}{x+1} + \frac{2}{100-x}, 0 \leq x \leq 100$$

Tentukan jumlah kematian yang terjadi diantara usia 1 dan 4 dalam *life table* dengan *radix* 10.000.

A. $2.061,81$

B. $2.081,61$

C. $2.161,81$

D. $2.181,16$

E. $2.186,11$

Pembahasan:
Formula yang digunakan untuk mengerjakan soal ini adalah

$$_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds}$$

$$l_{x+t} =_t p_x \times l_x$$

$$_n d_x = l_x - l_{x+n}$$

Akan dicari nilai dari $_1 d_4$ dengan $l_0 = 10.000$. Pertama, dicari nilai dari μ_{0+s}, dimana

$$\mu_{0+s} = \frac{2}{s+1} + \frac{2}{100-s}$$

$$_4 p_0 = e^{-\int_0^4 \mu_{0+s}\, ds} = e^{-\int_0^4 \frac{2}{s+1} + \frac{2}{100-s}\, ds} = 0,036864$$

Lalu, dicari nilai dari

$$p_0 = e^{-\int_0^1 \mu_{0+s}\, ds} = e^{-\int_0^1 \frac{2}{s+1} + \frac{2}{100-s}\, ds} = 0,245025$$

Kemudian, didapat

$$l_4 =_4 p_0 \times l_0 = 384,64$$

$$l_1 = p_0 \times l_0 = 2.450,25$$

sehingga,

$$_3 d_1 = l_1 - l_4 = 2.081,61$$

Jawab: B.

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal no. 15 sampai dengan 17

Jika diketahui $l_x = 2500(64 - 0,8x)^{1/3}, 0 \leq x \leq 80$

15. Tentukan $f(x)$

A. $(1/15)(0,64 - 0,8x)^{2/3}$

B. $(1/15)(0,64 - 0,8x)^{-1/3}$

C. $(1/15)(0,64 - 0,8x)^{-2/3}$

D. $(1/15)(0,64 - 0,8x)^{1/3}$

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:

Pertama akan digunakan formula

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

dan

$$f(x) = -\frac{d}{dx} S(x)$$

Dengan demikian, didapat

$$f(x) = -\frac{d}{dx}\left[\frac{l_x}{l_0}\right] = -\frac{d}{dx}\left[\frac{2500(64-0,8x)^{1/3}}{10.000}\right] = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(64-0,8x)^{-2/3}(-0,8)$$

sehingga

$$f(x) = \frac{1}{15}(64-0,8x)^{-2/3}$$

Jawab: C.

16. Tentukan $E[X]$

   A. 60

   B. 65

   C. 70

   D. 75

   E. tidak ada jawaban yang benar

   Pembahasan:
   Formula dari ekspektasi X adalah $E[X] = \int_0^{\omega} S(x)\,dx$ sehingga,

$$E[X] = \int_0^{80} \frac{(64-0,8x)^{1/3}}{4}\,dx = -\left.\frac{15(64-0,8x)^{4/3}}{64}\right|_0^{80} = 60$$

   Jawab: A.

17. Tentukan $Var[X]$

   A. $518,2457$

   B. $517,2854$

   C. $515,2478$

   D. $514,2857$

   E. tidak ada jawaban yang benar

   Pembahasan:
   Formula untuk mencari $Var[X]$ adalah

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

   dimana

$$E[X^2] = \int_0^{\omega} x^2 f(x)\,dx$$

dan

$$E[X] = \int_0^{\omega} S(x)\,dx$$

Karena nilai dari $E[X]$ sudah diperoleh di nomor sebelumnya, maka tinggal perlu dicari nilai dari $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \int_0^{80} x^2 \left(\frac{1}{15}(64 - 0,8x)^{-2/3} \right) dx = 4.114,2857$$

Lalu, didapat

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 4.114,2857 - 60^2 = 514,2857$$

Jawab: D.

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal no. 18 sampai dengan 19

Jika $I_x = 1000\sqrt{100 - x}, 0 \leq x \leq 100$

18. Hitunglah *the exact value* dari $\mu_{36+1/4}$ dengan menggunakan asumsi *exponential*.

    A. $0,0076109$

    B. $0,0077969$

    C. $0,0078905$

    D. $0,0079061$

    E. $0,0079217$

    Pembahasan:
    Formula yang digunakan pada bagian ini adalah

    $$\mu_{x+s} = -\ln p_x$$

    sehingga, bisa kita peroleh

    $$\begin{aligned} \mu_{36+1/4} &= -\ln p_{36} \\ &= -\ln \frac{l_{37}}{l_{36}} \\ &= -\ln \frac{1000\sqrt{100-37}}{1000\sqrt{100-36}} \\ &= 0.007874 \end{aligned}$$

    Jawab: Tidak ada jawaban yang memenuhi.

19. Hitunglah *the exact value* dari $\mu_{36+1/4}$ dengan menggunakan asumsi *hyperbolic*.

A. $0,0076109$

B. $0,0077969$

C. $0,0078905$

D. $0,0079061$

E. $0,0079217$

Pembahasan:
Dengan menggunakan formula $\mu_{x+s} = \dfrac{q_x}{1-(1-s)q_x}$, didapat

$$\begin{aligned}\mu_{36+1/4} &= \frac{q_{36}}{1-(1-1/4)q_{36}} \\ &= \frac{1-p_{36}}{1-0.75(1-p_{36})} \\ &= \frac{1-\frac{1000\sqrt{100-37}}{1000\sqrt{100-36}}}{1-0.75\left(1-\frac{1000\sqrt{100-37}}{1000\sqrt{100-36}}\right)} \\ &= 0.00789\end{aligned}$$

Jawab: Tidak ada jawaban yang memenuhi.

20. Jika $l_x = 15.120$ dan $q_x = 1/3$, maka tentukan $l_{x+1/4}$

A. 13.044

B. 13.440

C. 14.034

D. 14.304

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Formula yang digunakan adalah

$$p_x = 1 - q_x$$

$$l_{x+1} = p_x \times l_x$$

$$l_{x+s} = \left(\frac{1}{l_x} + s\left(\frac{1}{l_{x+1} - l_x}\right)\right)^{-1}$$

Dengan melakukan substitusi angka-angka dari soal, diperoleh

$$p_x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$l_{x+1} = p_x \times l_x = 10.080$$

dan

$$l_{x+1/4} = \left(\frac{1}{l_x} + (1/4) \left(\frac{1}{l_{x+1} - l_x} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{1}{15.120} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{10.080 - 15.120} \right) \right)^{-1} = 13.440$$

Jawab: B.

21. Diketahui *the expected future lifetimes* dari orang yang terdiagnosa dengan LAS, ARC dan AIDS masing-masing adalah $7,24$, $6,54$, dan $0,92$. Tentukan varians dari *future lifetime*.

    A. $15,53$

    B. $24,84$

    C. $32,92$

    D. $33,33$

    E. tidak ada jawaban yang benar

    Pembahasan:
    Formula yang digunakan

    $$E[T_j] = \frac{1}{\mu_j}$$
    $$Var[T_j] = \frac{1}{\mu_j^2}$$

    Dengan menggunakan panjer model, diperoleh

    $$\frac{1}{\mu_3} = 0.92$$

    Lalu,

    $$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{2b}} + \frac{1}{\mu_3} &= 6,54 \\ \frac{1}{\mu_{2b}} &= 6,54 - \frac{1}{\mu_3} \\ \frac{1}{\mu_{2b}} &= 6,54 - 0,92 \\ \frac{1}{\mu_{2b}} &= 5,62\end{aligned}$$

Kemudian,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_{2a}}+\frac{1}{\mu_{2b}}+\frac{1}{\mu_3}&=7,24\\ \frac{1}{\mu_{2a}}&=7,24-5,62-0,92\\ \frac{1}{\mu_{2a}}&=0,7\end{aligned}$$

Variansi

$$\frac{1}{\mu_{2a}^2}+\frac{1}{\mu_{2b}^2}+\frac{1}{\mu_3^2}=(0,92)^2+(5,62)^2+(0,7)^2=32,9208$$

Jawab: C.

22. Sekumpulan dari n orang diamati sampai semuanya meninggal, dengan kematian dikelompokkan dalam interval yang tetap. Jika $Var[\hat{S}(t)] = 0,0009$, $Var[\hat{S}(r)] = 0,0016$, dan covarians nya adalah $Cov[\hat{S}(t), \hat{S}(r)] = 0,0008$. Tentukan $E[\hat{S}(t)]$.

    A. $0,6$

    B. $0,7$

    C. $0,8$

    D. $0,9$

    E. tidak ada jawaban yang benar

    Pembahasan:
    Diberikan $Var[\hat{S}(t)] = 0,009$, $Var[\hat{S}(r)] = 0,0016$, dan covarians nya adalah $Cov[\hat{S}(t), \hat{S}(r)] = 0,0008$. Formula yang digunakan adalah

$$Var[\hat{S}(t)] = Var\left[\frac{N(t)}{n}\right] = \frac{S(t)F(t)}{n}$$

$$Var[\hat{S}(r)] = Var\left[\frac{N(r)}{n}\right] = \frac{S(r)F(r)}{n}$$

$$Cov(\hat{S}(t), \hat{S}(r)) = \frac{1-\hat{S}(t)\hat{S}(r)}{n}$$

Dengan menggunakan persamaan untuk $Var[\hat{S}(t)]$, $Var[\hat{S}(r)]$, dan $Cov(\hat{S}(t), \hat{S}(r))$ diperoleh

$$n = \frac{S(t)(1-S(t))}{0,0009}\ldots(*)$$

$$n = \frac{S(r)(1-S(r))}{0,0016} \dots (**)$$

$$n = \frac{1-S(t)S(r)}{0,0008} \dots (***)$$

Dari $(*)$ dan $(***)$ diperoleh

$$\frac{S(t)}{8} = \frac{S(r)}{9}$$

sehingga $S(r) = \frac{8S(t)}{9}$. Lalu, dari persamaan $(*)$ dan $(**)$ didapat

$$\begin{aligned}
\frac{S(r)(1-S(r))}{0,0016} &= \frac{S(t)(1-S(t))}{0,0009} \\
\frac{\frac{8S(t)}{9}\left(1-\frac{8S(t)}{9}\right)}{0,0016} &= \frac{S(t)(1-S(t))}{0,0009} \\
72S(t) - \frac{64S(t)^2}{81} &= 16S(t) - 16S(t)^2 \\
80S(t)^2 &= 72S(t) \\
S(t) &= \frac{9}{10}
\end{aligned}$$

Jawab: D.

23. Jika kedua $\mu_{60+t}^{(d)}$ dan $\mu_{60+t}^{(w)}$ adalah konstan selama $0 < t < 1$, maka tentukan $q_{60}^{(d)}$ bila diketahui $q'^{(d)}_{60} = q'^{(w)}_{60} = 0,20$.

A. $0,14$

B. $0,15$

C. $0,16$

D. $0,17$

E. $0,18$

Pembahasan:
Formula yang akan digunakan adalah

$$q_x^{(d)} = q'^{(d)}_x \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(w)}_x\right]$$

Dengan demikian, diperoleh

$$q_{60}^{(d)} = q'^{(d)}_{60} \left[1 - \frac{1}{2} q'^{(w)}_{60}\right] = 0,2(1 - \frac{1}{2}(0,2)) = 0,18$$

Jawab: E.

24. Anda diberi informasi berikut tentang suatu model data berkala statis (*time series stationer*):

$$\rho_1 = -0,310$$

$$\rho_2 = -0,155$$

$$\rho_k = 0; k = 3,4,5,\ldots$$

Selain itu, Anda juga diberikan informasi: $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0,7$. Berapakah nilai ϑ_1?

A. $0,2$

B. $0,3$

C. $0,4$

D. $0,5$

E. $0,6$

Pembahasan:
Soal diatas merupakan model $MA(2)$, dimana

$$\rho(1) = \frac{-\vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}$$

$$\rho(2) = \frac{-\vartheta_2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}$$

$$\rho(h) = 0, |h| > 2$$

Diberikan $\vartheta_1 + \vartheta_2 = 0,7$ sehingga bisa diperoleh $\vartheta_1 = 0,7 - \vartheta_2$ Lalu, dengan menggunakan formula untuk $\rho(1)$ dan $\rho(2)$, didapat

$$-0,31 = \frac{-\vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2}$$

Dengan substitusi, $\vartheta_1 = 0,7 - \vartheta_2$ kedalam persamaan sebelumnya, diperoleh

$$-0,31 = \frac{-0,7 + \vartheta_2 + (0,7 - \vartheta_2)\vartheta_2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \Leftrightarrow -0,31 = \frac{-0,7 + 1,7\vartheta_2 - \vartheta_2^2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \ldots (*)$$

dan

$$-0,155 = \frac{-\vartheta_2}{1 + \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2} \ldots (**)$$

Berdasarkan $(*)$ dan $(**)$ didapat

$$\frac{-\vartheta_2}{-0,155} = \frac{-0,7 + 1,7\vartheta_2 - \vartheta_2^2}{-0,31} \Leftrightarrow 0,1085 - 0,5735\vartheta_2 + 0,155\vartheta_2^2 = 0$$

dengan menggunakan formula penyelesaian pada persamaan kuadrat diperoleh $\vartheta_2 = 3,5$ dan $\vartheta_1 = 0,5$.
Jawab: D.

25. Sepuluh pekerja PLTN yang secara tidak sengaja terkena radiasi pada tingkat yang signifikan. Suatu kematian diamati pada masing-masing $t = 2$ dan $t = 4$, dan x keluar dari pengamatan pada saat $t = 3$. Menggunakan *estimator product limit* untuk $S(t)$, maka akan didapatkan $\hat{S}(5) = 0,75$. Tentukan x.

    A. 1

    B. 2

    C. 3

    D. 4

    E. 5

    Pembahasan:
    Formula yang akan digunakan adalah

    $$\hat{S}(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{r_j - d_j}{r_j} \right)$$

    untuk $t_m \leq t \leq t_{m+1}$. Dengan menggunakan formula ini, diperoleh

    $$\begin{aligned} \hat{S}(5) &= \prod_{j=1}^{4} \left(\frac{r_j - d_j}{r_j} \right) \\ 0,75 &= \left(\frac{9}{10} \right) \left(\frac{9 - x - 1}{9 - x} \right) \\ \frac{0,75}{0,9} &= \frac{8 - x}{9 - x} \\ \frac{5}{6} &= \frac{8 - x}{9 - x} \\ 45 - 5x &= 48 - 6x \\ x &= 3 \end{aligned}$$

    Jawab: C.

26. Hitunglah m_x berdasarkan asumsi Balducci.

    A. 0,11792

    B. 0,31778

    C. 0,11566

    D. 0,10545

    E. 0,21765

    Pembahasan:
    Diketahui :
    $l_x = 900$ dan $l_{x+1} = 800$

    Rumus yang digunakan :

$$m_x = \frac{(q_x)^2}{-p_x \cdot ln(p_x)}$$

    Proses pengerjaan :

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{(q_x)^2}{-p_x \cdot ln(p_x)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right)^2}{-\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot ln\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{800}{900}\right)^2}{-\frac{800}{900} \cdot ln\left(\frac{800}{900}\right)} \\ &= 0{,}117919 \\ &\approx 0{,}11792 \end{aligned}$$

    Jawab: A.

27. Jika diketahui T berdistribusi seragam (uniform) di daerah $[1,3]$, maka tentukan $Var(T)$.

    A. $1/3$

    B. $1/4$

    C. $1/5$

    D. $1/6$

    E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Dari soal diatas, didapat $a = 1$ dan $b = 3$. Dengan menggunakan formula varians dari distribusi uniform, didapat

$$Var[T] = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Jawab: A.

28. Dari sebuah *time series*, Anda diberikan data sebagai berikut:

t	y_t	$y_t - \bar{y}$
1	984	-16
2	1023	23
3	965	-35
4	1040	40
5	988	-12

Perkirakan fungsi autokorelasi pada saat perpindahan $k = 2$.

A. $-0,46$

B. $-0,16$

C. $0,51$

D. $0,84$

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Formula yang akan digunakan adalah

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(y_t-\bar{y})(y_{t+1}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(y_t-\bar{y})^2}$$

$$r_2 = \frac{\sum_{i=1}^{3}(y_t-\bar{y})(y_{t+2}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(y_t-\bar{y})^2}$$

$$\hat{\varphi}_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$$

Menggunakan formula diatas, diperoleh

$$r_1 = \frac{(-16)(23) + (23)(-35) + (-35)(40) + (40)(-12)}{(-16)^2 + (23)^2 + (-35)^2 + (40)^2 + (-12)^2} = -0,81326584$$

$$r_2 = \frac{(-16)(-35) + (23)(40) + (-35)(-12)}{(-16)^2 + (23)^2 + (-35)^2 + (40)^2 + (-12)^2} = 0,5061267981$$

$$\hat{\varphi}_{22} = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} = -0,45858 \approx -0,46$$

Jawab: A.

29. Diketahui suatu model untuk 20 data pengamatan sebagai berikut :

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

Ditetapkan bahwa $R^2 = 0,64$. Hitunglah nilai dari *F-statistic* yang digunakan untuk menguji suatu hubungan linier.

A. 30

B. 32

C. 34

D. 36

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Diberikan $k = 2$ (dimana k menyatakan banyaknya parameter). Lalu, $n = 20$ (n menyatakan jumlah pengamatan) dan $R^2 = 0,64$. Akan dihitung nilai dari *F-statistic* yang digunakan untuk menguji suatu hubungan linier dari model tersebut. Formula yang digunakan adalah

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}}$$

Dengan demikian diperoleh

$$F = \frac{\frac{0,64}{2-1}}{\frac{1-0,64}{20-2}} = 32$$

Jawab: B.

30. Diketahui suatu informasi tentang sebuah model $MA(4)$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} m &= 0 \\ q_1 &= 1,8 \\ q_2 &= -1,110 \\ q_3 &= 0,278 \\ q_4 &= -0,024 \\ s_e^2 &= 8 \end{aligned}$$

Tentukan standard deviasi dari perkiraan kesalahan tiga langkah ke depan (*forecast error three steps ahead*).

A. $3,6$

B. $4,9$

C. $5,8$

D. $6,6$

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan:
Formula yang digunakan untuk mengerjakan soal ini adalah

$$Var(e_T(l)) = \left((q_0)^2 + (q_1)^2 + \ldots + (q_{l-1})^2\right) s_e^2$$

dan

$$\sigma_{e_T(l)} = \sqrt{Var(e_T(l))}$$

Menggunakan formula ini, dengan $q_0 = 1$ (ingat bahwa model ARIMA memiliki mean bernilai 0), diperoleh

$$Var(e_T(l)) = \left((q_0)^2 + (q_1)^2 + (q_2)^2\right) s_e^2 = \left(1^2 + 1,8^2 + (-1,110)^2\right)(8) = 43,7768$$

dan

$$\sigma_{e_T(3)} = \sqrt{43,7768} \approx 6,6$$

Jawab: D.

2 A50 Periode Juni 2015

1. Jika diketahui *survival function* dari seseorang adalah sebagai berikut:
   ${}_tp_x = 1 - \frac{t}{90-x}$, untuk $0 \leq t \leq 90 - x$.
   Hitunglah probabilita dari seseorang berumur 25 mencapai umur 80 tahun.

   A. 55/65

   B. 25/65

   C. 5/13

   D. 2/13

   E. 25/13

   Pembahasan:
   Diketahui :
   $t = 55$ dan $x = 25$

   Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

   $${}_tp_x = 1 - \frac{t}{90-x}, \text{ untuk } 0 \leq t \leq 90 - x$$

   Dengan demikian diperoleh :

   $$\begin{aligned} {}_{55}p_{25} &= 1 - \frac{55}{90-25} \\ &= 1 - \frac{55}{65} \\ &= \frac{10}{65} \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

   Jawab : D

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 2 dan 3:
Diketaui *survival function* dari X adalah $S(X) = e^{-x}(x+1), x \geq 0$

2. Tentukan $E[X]$.

   A. 0,25

   B. 1

   C. 0,5

   D. 2

   E. 0

   Pembahasan:
   Diketahui :
   $S(X) = e^{-x}(x+1), x \geq 0$

   Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$E(X) = \int_0^\infty S(x) \ dx$$

   Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty S(x) \ dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}(x+1) \ dx \\ &= 2 \end{aligned}$$

   Jawab : D

3. Tentukan *Probability Density Function* dari X.

   A. $e^{-x}(x+2)$

   B. $e^{-x}x^2$

   C. $e^{-x}(x+1)^2$

   D. $(e^{-x}+1)x$

   E. $e^{-x}x$

   Pembahasan:
   Diketahui :
   $S(X) = e^{-x}(x+1), x \geq 0$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$f(x) = -\frac{d}{dx}S(x)$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{d}{dx}S(x) \\ &= -\frac{d}{dx}(e^{-x}(x+1)) \\ &= -(-e^{-x}x + e^{-x} - e^{-x}) \\ &= xe^{-x} \end{aligned}$$

Jawab : E

4. Diketahui probabilita sebagai berikut:
   - Probabilita dari seseorang berumur 30 mencapai umur 40 adalah 0,96
   - Probabilita dari seseorang berumur 40 mencapai umur 50 adalah 0,91
   - Probabilita dari seseorang berumur 50 mencapai umur 60 adalah 0,92

   Hitunglah probabilita dari seseorang berumur 30 mencapai umur 60.

   A. 0,8037

   B. 0,8935

   C. 0,8832

   D. 0,8372

   E. 0,8736

   Pembahasan:
   Diketahui :

$$\begin{aligned} {}_{10}p_{30} &= 0.96 \\ {}_{10}p_{40} &= 0.91 \\ {}_{10}p_{50} &= 0.92 \end{aligned}$$

   Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$${}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_{30}p_{30} &= {}_{10}p_{30} \cdot {}_{20}p_{40} \\ &= {}_{10}p_{30} \cdot {}_{1}0p_{40} \cdot {}_{10}p_{50} \\ &= (0.96)(0.91)(0.92) \\ &= 0.803712 \\ &= 0.8037 \end{aligned}$$

Jawab : A

5. Jika diketahui:

x	29	30	31	32	33	34	35	36
p_x	0,99	0,98	0,96	0,95	0,94	0,93	0,92	0,90

Hitunglah probabilita seseorang yang berumur 30 mencapai umur 35.

A. 0,718819

B. 0,773512

C. 0,733489

D. 0,781325

E. 0,660140

Pembahasan:
Diketahui :
$t = 5$ dan $x = 30$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$ {}_{t+u}p_x = {}_tp_x \cdot {}_up_{x+t} $$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_5p_{30} &= p_{30} \cdot p_{31} \cdot p_{32} \cdot p_{33} \cdot p_{34} \\ &= (0.98)(0.96)(0.95)(0.94)(0.93) \\ &= 0.781325 \end{aligned}$$

Jawab : D

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 6 dan 7:
Diketaui fungsi *force of mortality* $\mu(x) = \frac{1}{x+1}, x \geq 0$.

6. Tentukan $S(x)$.

A. $S(x) = \dfrac{1}{x+1}, x \geq 0$

B. $S(x) = \dfrac{x}{x+1}, x \geq 0$

C. $S(x) = e^{x+1}, x \geq 0$

D. $S(x) = \dfrac{x+1}{x}, x \geq 0$

E. $S(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}, x \geq 0$

Pembahasan:
Diketahui :

$$\mu(x) = \frac{1}{x+1}, x \geq 0$$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\ ds} \\ {}_tp_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\ ds} \\ &= e^{-\int_0^t \frac{1}{x+s+1}\ ds} \\ &= e^{ln(x+1)-ln(x+t+1)} \\ &= e^{ln(\frac{x+1}{x+t+1})} \\ &= \frac{x+1}{x+t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ \frac{S(x+t)}{S(x)} &= \frac{x+1}{x+t+1} \\ &= \frac{\frac{1}{x+t+1}}{\frac{1}{x+1}} \end{aligned}$$

Jadi, $S(x) = \frac{1}{x+1}$

Jawab : A

7. Tentukan ${}_tp_x$.

A. ${}_tp_x = \dfrac{x+1}{(x+t)}$, x dan $t \geq 0$

B. ${}_tp_x = \dfrac{1}{(x+t+1)^2}$, x dan $t \geq 0$

C. ${}_tp_x = \dfrac{1}{(x+t+1)}$, x dan $t \geq 0$

D. ${}_tp_x = \dfrac{x+1}{(x+t+1)^2}$, x dan $t \geq 0$

E. ${}_tp_x = \dfrac{x+1}{(x+t+1)}$, x dan $t \geq 0$

Pembahasan:
Dari jawaban pada soal nomor 6 diperoleh ${}_tp_x = \dfrac{x+1}{x+t+1}$ di mana $x \geq 0$ dan $t \geq 0$
Jawab : E

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 8 dan 9:
Seorang aktuaris memodelkan umur seseorang sebagai variabel acak X dengan *survival function* $S(x) = \frac{90^6 - x^6}{90^6}$, untuk $0 < x < 90$.

8. Hitunglah $e_0{}^0$.

A. 67,50000

B. 77,14286

C. 12,85714

D. 0,06667

E. 75,00000

Pembahasan:
Diketahui :

$$S(x) = \frac{90^6 - x^6}{90^6}, \text{ untuk } 0 < x < 90.$$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
e_0^0 &= \int_0^{\omega} {}_t p_0 \ dt
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{\frac{90^6 - (x+t)^6}{90^6}}{\frac{90^6 - x^6}{90^6}} \\
&= \frac{90^6 - (x+t)^6}{90^6 - x^6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_t p_0 &= \frac{90^6 - t^6}{90^6} \\
&= 1 - \left(\frac{t}{90}\right)^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_0^0 &= \int_0^{90} {}_t p_0 \ dt \\
&= \int_0^{90} 1 - \left(\frac{t}{90}\right)^6 \ dt \\
&= 77{,}14286
\end{aligned}
$$

Jawab : B

9. Hitunglah $Var(X)$.

   A. 6.075

   B. 5.951,02

   C. 5.625,00

   D. 247,9592

   E. 123,9796

   Pembahasan:

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{d}{dx}S(x) \\ E[X] &= e_0^0 \\ E[X^2] &= \int_0^{\omega} x^2 f(x)\ dx \\ Var(x) &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Dengan demikiand diperoleh :

$$S(x) = 1 - \left(\frac{x}{90}\right)^6$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{d}{dx}\left(1 - \left(\frac{x}{90}\right)^6\right) \\ &= \frac{6x^5}{90^6} \\ &= \frac{1}{15}\left(\frac{x}{90}\right)^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X] &= e_0^0 \\ &= 77{,}14286 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{90} x^2 \cdot \frac{1}{15}\left(\frac{x}{90}\right)^5\ dx \\ &= \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{90^5}\int_0^{90} x^7\ dx \\ &= \frac{1}{(15)(90^5)}\left(\frac{1}{8}(90)^8\right) \\ &= 6075 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(x) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= 6075 - (77{,}14286)^2 \\ &= 123{,}9796 \end{aligned}$$

Jawab : E

10. Untuk sebuah studi mortalita dengan data yang tidak lengkap, diperoleh data sebagai berikut:

Waktu(t)	Jumlah Kematian (*Number of Deaths*)	Jumlah Risiko (*Number of Risk*)
3	1	50
5	3	49
6	5	k
10	7	21

Jika diketahui pula bahwa estimasi Nelson-Aalen dari *survival function* pada waktu $t = 10$ adalah 0,575, tentukan k.

A. 48

B. 40

C. 36

D. 32

E. 25

Pembahasan:
Diketahui :
$\hat{S}(10) = 0{,}575$

Waktu(t)	Jumlah Kematian (*Number of Deaths*)	Jumlah Risiko (*Number of Risk*)
3	1	50
5	3	49
6	5	k
10	7	21

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}\hat{H}(10) &= \sum_{j=1}^{4} \frac{S_j}{R_j} \\ \hat{S}(10) &= e^{-\hat{H}(10)}\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
\hat{H}(10) &= \sum_{j=1}^{4} \frac{S_j}{R_j} \\
&= \frac{1}{50} + \frac{3}{49} + \frac{5}{k} + \frac{7}{21} \\
&= \frac{5}{k} + \frac{3047}{7350}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}(10) &= e^{-\hat{H}(10)} \\
\hat{H}(10) &= -ln(\hat{S}(10)) \\
\frac{5}{k} + \frac{3047}{7350} &= -ln(0{,}575) \\
\frac{5}{k} &= \frac{3047}{7350} - ln(0{,}575) \\
\frac{5}{k} &= 0{,}1388274151 \\
k &= \frac{5}{0{,}1388274151} \\
&= 36{,}016 \\
&\approx 36
\end{aligned}$$

Jawab : C

11. Dari 100 orang yang hidup dengan umur eksak x, 2 orang diamati meninggal dalam estimasi $(x, x+1]$ dan 98 tetap hidup sampai umur $x+1$. Kematian muncul pada umur $x+0{,}3$ dan $x+0{,}7$. Estimasikan nilai $\hat{q}_x$ dengan asumsi *force of mortality* adalah konstan dalam $(x, x+1]$.

    A. 0,020881

    B. 0,020039

    C. 0,019999

    D. 0,030454

    E. 0,010562

    Pembahasan:

    Diketahui dari 100 orang yang hidup dengan umur eksak x:

    - 2 orang diamati meninggal dalam estimassi interval $(x, x+1]$.
    - 98 tetap hidup sampai umur $x+1$.

- Kematian muncul pada umur $x+0{,}3$ dan $x+0{,}7$.

Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\hat{q}_(x) = \frac{d_x}{n_x-(1-s)c_x}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_(x) &= \frac{d_x}{n_x-(1-s)c_x} \\
&= \frac{2}{100-(1-0,3)(1)-(1-0,7)(1)} \\
&= 0,020 \\
&\approx 0,019999
\end{aligned}$$

Jawab : C

12. Dalam sebuah studi data lengkap, estimasi Nelson-Aalen dari $\Lambda(t)$ yang segera mengikuti kematian ke-2 adalah 13/42.
Hitunglah estimasi dari $\Lambda(t)$ yang segera mengikuti kematian ke-4.

A. 0,950000

B. 0,759524

C. 0,634524

D. 0,545635

E. 0,478968

Pembahasan:
Diketahui bahwa dalam sebuah studi data lengkap, estimasi Nelson-Aalen dari $\Lambda(t)$ yang segera mengikuti kematian ke-2 adalah 13/42.

Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}
\Lambda(t) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j}, t_m \le t < t_{m+1} \\
S(t) &= exp[-\Lambda(t)]
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(2) &= \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{r_j} \\
\frac{13}{42} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{n-1+n}{n^2-n} = \frac{2n-1}{n^2-n} \\
13n^2 - 13n &= 84n - 42 \\
13n^2 - 97n + 42 &= 0 \\
(13n-6)(n-7) &= 0
\end{aligned}
$$

Karena nilai n harusah bilangan bulat, maka dipilih $n = 7$. Oleh karena itu kita dapatkan:

$$
\Lambda(4) = \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{7} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} = 0,759524
$$

Jawab : B

13. Diketahui *survival function* $S(x)$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
&S(x) = 1, && 0 \le x < 1 \\
&S(x) = 1 - \left\{ \frac{e^x}{100} \right\}, && 1 \le x < 4.5 \\
&S(x) = 0, && 4.5 \le x
\end{aligned}
$$

Hitunglah $\mu(4)$.

A. 1,202553

B. 0,908307

C. 0,545982

D. 0,454018

E. 0,251338

Pembahasan:

Diketahui bahwa:

$$
\begin{aligned}
&S(x) = 1, && 0 \le x < 1 \\
&S(x) = 1 - \left\{ \frac{e^x}{100} \right\}, && 1 \le x < 4.5 \\
&S(x) = 0, && 4.5 \le x
\end{aligned}
$$

Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\mu(x) = -\frac{1}{S(x)}.\frac{d}{dx}S(x)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\mu(4) &= -\frac{1}{S(4)}.\frac{d}{dx}S(4)\\ &= -\frac{1}{1-\frac{e^4}{100}}.\frac{d}{dx}\left(1-\frac{e^x}{100}\right)_{x=4}\\ &= \frac{100}{100-e^4}.\frac{e^4}{100}\\ &= 1,202553\end{aligned}$$

Jawab : A

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 14 s.d. 16:
Dalam sebuah *life table* diketahui $l_x = 900$ dan $l_{x+1} = 800$.

14. Hitunglah m_x berdasarkan asumsi *UDD* (*Uniform Distribution of Deaths*).

A. 0,21792

B. 0,10526

C. 0,31757

D. 0,11568

E. 0,11765

Pembahasan:
Diketahui :
$l_x = 900$ dan $l_{x+1} = 800$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$m_x = \frac{dx}{L_x}$$

Untuk asumsi UDD

$$L_x = l_x - \frac{1}{2}dx$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{dx}{L_x} \\ &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x - \frac{1}{2}(l_x - l_{x+1})} \\ &= \frac{900 - 800}{900 - \frac{1}{2}(900 - 800)} \\ &= \frac{100}{850} \\ &= 0{,}117647 \\ &\approx 0{,}11765 \end{aligned}$$

Jawab : E

15. Hitunglah m_x berdasarkan asumsi *Constant Force*.
    A. 0,10536
    B. 0,11778
    C. 0,31746
    D. 0,21768
    E. 0,11561

Pembahasan:
Diketahui :
$l_x = 900$ dan $l_{x+1} = 800$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} \mu &= -ln(p_x) \\ m_x &= \mu \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} m_x &= \mu \\ &= -ln(p_x) \\ &= -ln\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right) \\ &= -ln\left(\frac{800}{900}\right) \\ &= 0{,}117783 \\ &\approx 0{,}11778 \end{aligned}$$

Jawab : B

16. Hitunglah m_x berdasarkan asumsi Balducci.
    A. 0,11792
    B. 0,31778
    C. 0,11566
    D. 0,10545
    E. 0,21765

Pembahasan:
Diketahui :
$l_x = 900$ dan $l_{x+1} = 800$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$m_x = \frac{(q_x)^2}{-p_x \cdot ln(p_x)}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} m_x &= \frac{(q_x)^2}{-p_x \cdot ln(p_x)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right)^2}{-\frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot ln\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)} \\ &= \frac{\left(1 - \frac{800}{900}\right)^2}{-\frac{800}{900} \cdot ln\left(\frac{800}{900}\right)} \\ &= 0{,}117919 \\ &\approx 0{,}11792 \end{aligned}$$

Jawab : A

17. Diketahui 100 orang masuk dalam estimasi interval $(20, 21]$ pada umur eksak 20. Tidak ada yang dijadwalkan untuk keluar sebelum umur eksak 21, tetappi terdapat satu orang meninggal (*death*) dan tiga orang ditarik secara acak (*random withdrawals*) yang diamati sebelum umur 21. Dengan menggunakan asumsi distribusi *uniform* untuk kedua kejadian acak tersebut, estimasikan nilai $q_{20}^{t(d)}$.

    A. 0,0104622

    B. 0,0103693

    C. 0,0102427

    D. 0,0101531

    E. 0,0101015

    Pembahasan:
    Diketahui bahwa:

    - 100 orang masuk dalam estimasi interval $(20, 21]$ pada umur eksak 20.
    - Tidak ada yang dijadwalkan untuk keluar sebelum umur eksak 21, tetappi terdapat satu orang meninggal (*death*) dan tiga orang ditarik secara acak (*random withdrawals*) yang diamati sebelum umur 21.

    Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x - (1-s)c_x + (1-r)k_x}$$

Dengan menggunakan asumsi distribusi seragam (uniform) :

$$q_x^{\prime(d)} \quad = \quad b - \sqrt{b^2 - 2q_x^{(d)}}, \;\; b = 1 - 0.5q_x^{(w)} + 0.5q_x^{(d)}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{20}^{(w)} &= \frac{3}{100} = 0.03 \\ q_{20}^{(d)} &= \frac{1}{100} = 0.01 \\ b &= 1 - 0.5q_{20}^{(w)} + 0.5q_{20}^{(d)} = 1 - 0.5(0.03) + 0.5(0.01) = 0.99 \\ q_{20}^{\prime(d)} &= b - \sqrt{b^2 - 2q_{20}^{(d)}} = 0.99 - \sqrt{(0.99)^2 - 2(0.01)} = 0.01015307 \\ &\approx 0.0101531 \end{aligned}$$

Jawab : D

18. Dengan menggunakan data nomor 17 di atas, estimasikan nilai $q_{20}^{t(d)}$ dengan menggunakan distribusi *exponential* untuk kejadian meninggal dan penarikan tersebut.

A. 0,0216831

B. 0,0101017

C. 0,0101536

D. 0,0101145

E. 0,0100721

Pembahasan:
Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x - (1-s)c_x + (1-r)k_x}$$

Dengan menggunakan asumsi distribusi eksponensial :

$$q_x^{\prime(d)} \quad = \quad 1 - \left(p_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(d)}}{q_x^{(d)} + q_x^{(w)}}}, \;\; p_x^{(\tau)} = 1 - q_x^{(d)} + q_x^{(w)}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} p_x^{(\tau)} &= 1 - q_x^{(d)} + q_x^{(w)} = 1 - 0.01 - 0.03 = 0.96 \\ q_x^{\prime(d)} &= 1 - \left(p_x^{(\tau)}\right)^{\frac{q_x^{(d)}}{q_x^{(d)} + q_x^{(w)}}} = 1 - (0.96)^{\frac{0.01}{0.01+0.03}} = 0.010153599 \approx 0.0101536 \end{aligned}$$

Jawab : C

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 19 s.d 20:
Sebuah sampel dari 10 tikus laboratorium menghasilkan data kematian (dalam hari) sebagai berikut: $3, 4, 6, 8, 9, 10, 10, 11, 12$.
Diketahui pula *survival model* yang terjadi berdistribusi exponensial.

19. Estimasikan nilai $\hat{\lambda}$ dengan metode *moments*.

    A. 0,145812

    B. 0,131579

    C. 0,123457

    D. 0,117647

    E. 0,092420

    Pembahasan:
    Diketahui :
    Data sample kematian (dalam hari) sebagai berikut: $3, 4, 6, 8, 9, 10, 10, 11, 12$.

    Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

    Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}\hat{\lambda} &= \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}\\ &= \frac{1}{\frac{1}{10}(3+4+6+8+8+9+10+10+11+12)}\\ &= 0{,}123457\end{aligned}$$

    Jawab : C

20. Estimasikan nilai $\hat{\lambda}$ dengan metode *medians*.

    A. 0,085000

B. 0,081547

C. 0,085574

D. 0,092420

E. 0,087354

Pembahasan:
Diketahui :
Data sample kematian (dalam hari) sebagai berikut: $3, 4, 6, 8, 9, 10, 10, 11, 12$.

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} x_g &= (1-h)x_j + h \cdot x_{j+1} \\ F(x_g) &= 1 - e^{-x_g \hat{\lambda}} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} x_{0,5} &= (1-0,5)x_5 + 0,5 \cdot x_6 \\ &= (0,5)(8) + (0,5)(9) \\ &= 8,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x_{0,5}) &= 1 - e^{-x_{0,5}\hat{\lambda}} \\ 0,5 &= 1 - e^{-x_{0,5}\hat{\lambda}} \\ e^{-x_{0,5}\hat{\lambda}} &= 0,5 \\ -x_{0,5}\hat{\lambda} &= ln(0,5) \\ \hat{\lambda} &= \frac{ln(0,5)}{-x_{0,5}} \\ &= \frac{ln(0,5)}{-8,5} \\ &= 0,081547 \end{aligned}$$

Jawab : B

21. Jika diketahui 2 deret waktu (*times series*) x_t dan y_t, yang masing-masing diasumsikan *random walk*. Manakah di antara pernyataan berikut yang benar ?

A. Tidak ada kombinasi linear dari 2 deret waktu ini yang dapat bersifat *stationary*.

B. Deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$ selalu bersifat *stationary* untuk nilai λ tertentu.

C. Deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$ dapat bersifat *stationary* untuk nilai λ tertentu dan dapat diestimasi dengan menjalankan regresi *least square* biasa dari x_t pada y_t.

D. Deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$ dapat bersifat *stationary* untuk nilai λ tertentu dan dapat ditentukan secara presisi menggunakan teknik regresi.

E. Tidak ada pernyataan yang benar.

Pembahasan:
Jika diketahui 2 deret waktu x_t dan y_t, di mana masing-masing diasumsikan *random walk*, maka pernyataan yang benar di antara kelima pilihan tersebut adalah pilihan C, yaitu deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$ dapat bersifat *stationary* untuk nilai λ tertentu dan dapat diestimasi dengan menjalankan regresi *least square* biasa dari x_t pada y_t.

Jawab : C

22. Anda mencocokkan model berikut ini dalam 48 pengamatan:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$$

Diketahui data sebagai berikut:

Sumber Variasi (*Source of Variation*)	Tingkat Kebebasan (*Degree of Freedom*)	Jumlah Kuadrat (*Sum of Squares*)
Regresi (*Regression*)	3	103.658
Residual(*Error*)	44	69.204

Hitunglah nilai $\bar{R}^2$, yaitu R^2 yang dikoreksi.

A. 0,53

B. 0,54

C. 0,55

D. 0,56

E. 0,57

Pembahasan:
Diketahui :
$n = 48$
$RSS = 69.204$
$ESS = 103.658$
$k = 4$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} TSS &= RSS + ESS \\ R^2 &= \frac{ESS}{TSS} \\ \bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{n-k} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} TSS &= 69.024 + 103.658 \\ &= 172.862 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{ESS}{TSS} \\ &= \frac{103.658}{172.862} \\ &= 0{,}5996575303 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{n-k} \\ &= 1 - \frac{(1-0{,}5996575303)(48-1)}{48-4} \\ &= 0{,}5723614528 \\ &\approx 0{,}57 \end{aligned}$$

Jawab : E

23. Diketahui informasi sebagai berikut:

(i). $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$
$Var(\varepsilon_i) = \left(\frac{x_i}{2}\right)^2$

(ii).

i	x_i	y_i
1	1	7
2	2	5
3	3	2
4	4	-3

Tentukan nilai estimasi *weighted least square* dari β.

A. 2,35

B. 2,52

C. 2,63

D. 2,83

E. 3,12

Pembahasan:
Diketahui :

$$\begin{aligned} y_i &= \beta x_i + \varepsilon_i \\ Var(\varepsilon_i) &= \left(\frac{x_i}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{Var(\varepsilon_i)} \end{aligned}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i^2}$$

Dengan demikian diperoleh :

i	x_i	y_i	$Var(\varepsilon_i)$	w_i	$w_i \cdot x_i \cdot y_i$	x_i^2	$w_i \cdot x_i^2$
1	1	7	0,25	4	28	1	4
2	2	5	1	1	10	4	4
3	3	2	2,25	0,4444	2,6664	9	3,9996
4	4	-3	4	0,25	-3	16	4
Total	10	11	7,5	5,6944	37,66643	30	15,9996

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i^2} \\ &= \frac{37{,}6664}{15{,}9996} \\ &= 2{,}3542 \\ &\approx 2,35\end{aligned}$$

Jawab : A

24. Anda menggunakan *moving average* 3 titik untuk memperkirakan nilai dari sebuah deret waktu. Tiga angka terakhir yang dicatat dari sebuah deret waktu adalah sebagai berikut:
$y_{98} = 101$
$y_{99} = 99$
$y_{100} = 102$
Hitunglah $\hat{y}_{105} - \hat{y}_{104}$, yaitu selisih antara nilai *forecast* dari 5 langkah ke depan dan 4 langkah ke depan.

A. $-0{,}04$

B. 0,04

C. $-0{,}03$

D. 0,03

E. 0,01

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\hat{y}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^{t-1} y_i$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{t+1} &= \hat{y}_{101} = \frac{y_{t-2}+y_{t-1}+y_t}{3} = \frac{y_{98}+y_{99}+y_{100}}{3} = \frac{101+99+102}{3} = 100.6667\\
\hat{y}_{t+2} &= \hat{y}_{102} = \frac{y_{t-1}+y_t+\hat{y}_{t+1}}{3} = \frac{y_{99}+y_{100}+\hat{y}_{101}}{3} = \frac{99+102+100.6667}{3} = 100.5556\\
\hat{y}_{t+3} &= \hat{y}_{103} = \frac{y_t+\hat{y}_{t+1}+\hat{y}_{t+2}}{3} = \frac{y_{100}+\hat{y}_{101}+\hat{y}_{102}}{3} = \frac{102+100.6667+100.5556}{3} = 101.0741\\
\hat{y}_{t+4} &= \hat{y}_{104} = \frac{\hat{y}_{101}+\hat{y}_{102}+\hat{y}_{103}}{3} = \frac{100.6667+100.5556+101.0741}{3} = 100.7654\\
\hat{y}_{t+5} &= \hat{y}_{105} = \frac{\hat{y}_{102}+\hat{y}_{103}+\hat{y}_{104}}{3} = \frac{100.5556+101.0741+100.7654}{3} = 100.7984
\end{aligned}$$

Oleh karena itu didapatkan:

$$\hat{y}_{105} - \hat{y}_{104} = 100.7984 - 100.7654 = 0.033 \approx 0.03$$

Jawab : D

25. Anda diberikan dua model *random walk* yang identik dalam segala aspek, kecuali yang satu mengandung sebuah parameter *drift* positif yang diketahui dan yang lainnya tidak mengandung parameter *drift*. Manakah di antara pernyataan berikut ini yang <u>tidak</u> benar?

A. Untuk model *random walk* tanpa *drift*, semua nilai *forecast* dari waktu T adalah sama.

B. Untuk model *random walk* tanpa *drift*, *standard error* nilai *forecast* dari waktu T naik ketika horison *forecast* naik.

C. Untuk model *random walk* dengan *drift*, nilai *forecast* dari waktu T akan naik secara linier ketika horison *forecast* naik.

D. Untuk model *random walk* dengan *drift*, *standard error* nilai *forecast* dari waktu T sama dengan *standard error* nilai *forecast* yang bersesuaian untuk model *random walk* tanpa *drift*

E. Untuk model *random walk* dengan *drift*, *standard error* nilai *forecast* dari waktu T akan naik atau turun, tergantung dengan parameter *drift*, ketika horison *forecast* naik.

Pembahasan:
Diketahui :
Dua model *random walk* yang identik dalam segala aspek, kecuali model pertama mengandung sebuah parameter *drift* positif yang diketahui sedangkan model lainnya tidak mengandung parameter *drift*.

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

1. Sifat model *random walk* tanpa *drift*

   - Model : $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$
   - Peramalan

   $$\begin{aligned}\hat{y}_{T+1} &= E(y_{T+1}|y_T, \dots, y_1)\\ &= y_T + E(\varepsilon_{T+1})\\ &= y_T\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\hat{y}_{T+2} &= E(y_{T+2}|y_{T+1}, \dots, y_1)\\ &= E(y_{T+1} + \varepsilon_{T+2})\\ &= E(y_T + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2})\\ &= y_T\end{aligned}$$

   Untuk peramalam l periode juga menghasilkan $\hat{y}_{T+1} = y_T$

   - *Standard error*

   $$\begin{aligned}e_1 &= y_{T+1} - \hat{y}_{T+1}\\ &= y_T + \varepsilon_{T+1} - y_T\\ &= \varepsilon_{T+1}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}e_2 &= y_{T+2} - \hat{y}_{T+2}\\ &= y_T + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - y_T\\ &= \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}\end{aligned}$$

   Seterusnya sampai *standard error* ke-l

2. Sifat model *random walk* dengan *drift*

   - Model : $y_t = y_{t-1} + d + \varepsilon_t$
   - Peramalan

   $$\begin{aligned}\hat{y}_{T+1} &= E(y_{T+1}|y_T, \dots, y_1)\\ &= y_T + d + E(\varepsilon_{T+1})\\ &= y_T + d\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\hat{y}_{T+2} &= E(y_{T+2}|y_{T+1}, \dots, y_1)\\ &= E(y_{T+1} + d + \varepsilon_{T+2})\\ &= E(y_T + d + d + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2})\\ &= y_T + 2d\end{aligned}$$

   Untuk peramalan l periode akan menghasilkan $\hat{y}_{T+1} = y_T + ld$

   - *Standard error*

$$\begin{aligned}
e_1 &= y_{T+1} - \hat{y}_{T+1}\\
&= y_T + d + \varepsilon_{T+1} - y_T - d\\
&= \varepsilon_{T+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= y_{T+2} - \hat{y}_{T+2}\\
&= y_T + d + d + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - y_T - d - d\\
&= \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}
\end{aligned}$$

Seterusnya sampai *standard error* ke-l

Berdasarkan sifat-sifat di atas maka yang salah adalah pilihan B karena jika model *random walk* mengandung sebuah parameter *drift* positif maka *standard error* nilai *forecast* dari waktu T akan selalu naik sesuai dengan sifatnya.

Jawab : B

26. Anda mencocokkan model *moving average* order pertama yang *invertible* ke dalam deret waktu. Koefisien *autocorrellation* dari *sample lag* 1 adalah $-0{,}35$. Hitunglah tebakan awal untuk θ (yaitu parameter *moving average*).

    A. 0,2

    B. 0,4

    C. 0,6

    D. 0,8

    E. 1,0

    Pembahasan:
    Diketahui :
    Diketahui model MA order pertama dengan $\rho_1 = -0{,}35$.
    Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\rho_1 = \frac{-\theta}{1+\theta^2}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{-\theta}{1+\theta^2} \\
-0{,}35 &= \frac{-\theta}{1+\theta^2} \\
\\
-0{,}35 + 0{,}35\theta^2 &= \theta \\
0{,}35\theta^2 - \theta + 0{,}35 &= 0 \\
35\theta^2 - 100\theta + 35 &= 0 \\
\theta_{1,2} &= \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4(35)^2}}{2(35)}
\end{aligned}$$

Diperoleh $\theta = 0{,}4083674 \approx 0{,}4$ atau $\theta = 2{,}4488 \approx 2{,}45$. Jadi, nilai θ yang dimaksud adalah 0,4.

Jawab : B

27. Diketahui hasil dari regresi linier sebagai berikut:

t	Aktual (*actual*)	Penyesuaian (*fitted*)
1	75,0	75,6
2	69,0	70,6
3	72,0	70,9
4	74,0	74,0
5	65,0	66,0

Hitunglah estimasi koefisien korelasi deret *lag* 1 (*lag 1 serial correllation coefficient*) untuk residual, menggunakan statistik Durbin-Watson.

A. -0,01

B. -0,02

C. 0,01

D. 0,03

E. 0,06

Pembahasan:
Diketahui :

t	Aktual (*actual*)	Penyesuaian (*fitted*)
1	75,0	75,6
2	69,0	70,6
3	72,0	70,9
4	74,0	74,0
5	65,0	66,0

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_t &= \text{actual} - \text{fitted} \\
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} (\hat{\varepsilon}_t)^2} \\
\hat{p} &= 1 - \frac{d}{2}
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

t	Aktual (*actual*)	Penyesuaian (*fitted*)	$\hat{\varepsilon}_t$	$\hat{\varepsilon}_t^2$	$(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2$
1	75,0	75,6	$-0,6$	0,36	0
2	69,0	70,6	$-1,6$	2,56	1
3	72,0	70,9	1,1	1,21	7,29
4	74,0	74,0	0	0	1,21
5	65,0	66,0	-1	1	1
text				5,13	10,5

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}(\hat{\varepsilon}_t)^2} \\ &= \frac{10,5}{5,13} \\ &= 2,046783626 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= 1 - \frac{d}{2} \\ &= 1 - \frac{2,046783626}{2} \\ &= -0,023391813 \\ &\approx -0,02 \end{aligned}$$

Jawab : B

28. Misalkan Anda melakukan *smoothing* deret waktu y_t menggunakan metode *exponential smoothing* 2 parameter dari Holt:

t	y_t	$\bar{y}_t$	r_t
1995	120,50	117,50	12,00
1996	135,00	130,88	12,96
1997	147,70	144,80	13,64
1998	146,60	$\bar{y}_{1998}$	r_{1998}

Hitunglah *forecast* 2 periode $\hat{y}_{2000}$ dengan terlebih dahulu melengkapi tabel di atas dengan deret *exponential* 2 parameter dari Holt.

A. Lebih kecil dari 166

B. Paling sedikit 166, tetapi lebih kecil dari 172

C. Paling sedikit 172, tetapi lebih kecil dari 176

D. Paling sedikit 176, tetapi lebih kecil dari 180

E. Paling sedikit 180

Pembahasan:

Diketahui :

Smoothing deret waktu y_t menggunakan metode *exponential smoothing* 2 parameter dari Holt.

t	y_t	$\tilde{y}_t$	r_t
1995	120,50	117,50	12,00
1996	135,00	131,15	12,99
1997	147,70	145,21	13,63
1998	146,60	$\tilde{y}_{1998}$	r_{1988}

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)(\bar{y}_{t-1} + r_{t-1}) \\
r_t &= \gamma(\bar{y}_t - \bar{y}_{t-1}) + (1-\gamma)r_{t-1} \\
\bar{y}_{T+l} &= \bar{y}_r + l r_T
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{1996} &= \alpha y_{1996} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{1995} + r_{1995}) \\
131{,}15 &= 135\alpha + (1-\alpha)(117{,}5 + 12) \\
131{,}15 &= 135\alpha + 129{,}5\alpha - 129{,}5\alpha \\
5{,}5\alpha &= 1{,}65 \\
\alpha &= 0{,}3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1996} &= \gamma(\tilde{y}_{1996} - \tilde{y}_{1995}) + (1-\gamma)r_{1995} \\
12{,}99 &= \gamma(131{,}15 - 117{,}5) + (1-\gamma)12 \\
12{,}99 &= 13{,}65\gamma + 12 - 12\gamma \\
1{,}65\gamma &= 0{,}99 \\
\gamma &= 0{,}6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{1998} &= \alpha y_{1998} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{1997} + r_{1997}) \\ &= 0{,}3(146{,}6) + 0{,}7(145{,}21 + 13{,}63) \\ &= 155{,}168\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{1998} &= \gamma(\tilde{y}_{1998} - \tilde{y}_{1997}) + (1-\gamma)r_{1997} \\ &= 0{,}6(155{,}168 - 145{,}21) + 0{,}4(13{,}63) \\ &= 11{,}4268\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{1998+2} &= \tilde{y}_{1998} + 2r_{1998} \\ &= 155{,}168 + 2 \cdot 11{,}4268 \\ &= 178{,}0216\end{aligned}$$

Jawab : D

29. Sebuah tabular *survival model* didefinisikan oleh nilai p_x sebagai berikut:

x	p_x
0	0,9
1	0,8
2	0,5
3	0,2
4	0,1
5	0,0

Berapakah nilai dari ω dalam tabel ini ?

A. 0

B. 1

C. 4

D. 5

E. 6

Pembahasan:

Diketahui :

x	p_x
0	0,9
1	0,8
2	0,5
3	0,2
4	0,1
5	0,0

Berdasarkan keterangan pada tabel, diketahui bahwa $p_5 = 0$. Hal ini berarti peluang dari orang yang saat ini berusia 5 tahun akan hidup hingga 1 tahun ke depan adalah 0. Dengan kata lain, seseorang yang saat ini berusia 5 tahun, pasti akan meninggal dalam kurun waktu 1 tahun mendatang. Artinya, batas usia maksimum dari kelompok tersebut, yang dinotasikan dengan ω adalah 6.

Jawab : E

30. Misalkan ekspektasi harapan hidup dari seseorang yang terdiagnosa menderita penyakit LAS (Lymphadenopath Syndrome), ARC (AIDS-Related Complex), dan AIDS (Acquired Immune Deficiency Syndrome) berturut-turut adalah 6,89, 5,71, dan 0,93. Hitunglah varians dari harapan hidup dari seseorang yang terdiagnosa menderita LAS menggunakan model dari Panjer.

    A. 25,11

    B. 15,53

    C. 32,92

    D. 33,33

    E. 17,59

    Pembahasan:
    Diketahui :
    Ekspektasi harapan hidup dari seseorang yang terdiagnosa menderita penyakit LAS (Lymphadenopath Syndrome), ARC (AIDS-Related Complex), dan AIDS (Acquired Immune Deficiency Syndrome) berturut-turut adalah 6,89, 5,71, dan 0,93.

    Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} E[T_j] &= \frac{1}{\mu_j} \\ Var[T_j] &= \frac{1}{\mu_j^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\frac{1}{\mu_3} = 0{,}93$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{2b}} + \frac{1}{\mu_3} &= 5{,}71 \\
\frac{1}{\mu_{2b}} + 0{,}93 &= 5{,}71 \\
\frac{1}{\mu_{2b}} &= 4{,}78
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{2a}} + \frac{1}{\mu_{2b}} + \frac{1}{\mu_3} &= 6{,}89 \\
\frac{1}{\mu_{2a}} + 4{,}78 + 0{,}93 &= 6{,}89 \\
\frac{1}{\mu_{2a}} &= 1{,}18
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[T_j] &= \frac{1}{\mu_{2a}^2} + \frac{1}{\mu_{2b}^2} + \frac{1}{\mu_3^2} \\
&= 1{,}18^2 + 4{,}78^2 + 0{,}93^2 \\
&= 25{,}1057 \\
&\approx 25{,}11
\end{aligned}$$

Jawab : A

3 A50 Periode November 2015

1. Diketahui *life table* sebagai berikut:

x	l_x
40	100
41	95
42	85

Hitunglah *Force of Mortality* dari orang yang berumur 40,60 (empat puluh koma enam) tahun dengan menggunakan asumsi *Uniform Distribution of Death* sepanjang tahun (dibulatkan 4 desimal)

A. 0,1026

B. 0,1054

C. 0,0515

D. 0,1112

E. 0,2512

Pembahasan:
Diketahui :

x	l_x
40	100
41	95
42	85

Rumus yang digunakan :

Uniform Distribution of Death

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\ \mu_{x+s} &= \frac{q_x}{1 - s \cdot q_x} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
q_{40} &= \frac{100-95}{100} \\
&= 0{,}05 \\
\mu_{40,60} &= \frac{0,05}{1-0,60\cdot 0,05} \\
&= 0{,}051546
\end{aligned}
$$

Jawab : C.

2. Berdasarkan *life table* pada soal nomor 1, hitunglah *Force of Mortality* dari orang yang berumur 41,25 (empat puluh satu koma dua lima) tahun dengan menggunakan asumsi *Constant Force of Mortality* sepanjang tahun (dibulatkan 4 desimal).

   A. 0,1026

   B. 0,1054

   C. 0,0516

   D. 0,1112

   E. 0,2512

   Pembahasan:
   Diketahui :

x	l_x
40	100
41	95
42	85

   Rumus yang digunakan :

   Constant Force of Mortality

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\
{}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\
\mu_{x+s} &= -\ln(p_x)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= \frac{95-85}{95} \\
&= \frac{2}{19} \\
\mu_{x+s} &= -\ln(1-\frac{2}{19}) \\
&= 0{,}111226
\end{aligned}
$$

Jawab : C.

3. Diketahui *life table* sebagai berikut:

x	l_x
20	100
21	96
22	80

Jika tingkat mortalita diasumsikan secara *Uniform Distribution of Death* pada setiap umur, hitunglah probabilitas seseorang yang berumur 20,75 (dua puluh koma tujuh lima) tahun akan meninggal dalam 1 tahun.

A. 0,0658

B. 0,0977

C. 0,0932

D. 0,1240

E. 0,1340

Pembahasan:
Diketahui :

x	l_x
20	100
21	96
22	80

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= {}_{t+x}p_0 \\
{}_tp_x &= p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+t-1}
\end{aligned}
$$

Untuk *Uniform Distibution of Death* dan usia bukan bilangan bulat

$$\begin{aligned} {}_s p_x &= 1 - s \cdot q_x \\ {}_s p_{x+t} &= \frac{{}_{s+t} p_x}{{}_t p_x} = \frac{{}_{s+t} p_x}{1 - t \cdot q_x} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} q_{20,75} &= 1 - \frac{{}_{1,75} p_{20}}{{}_{0,75} p_{20}} \\ &= 1 - \frac{p_{20} \cdot {}_{0,75} p_{20}}{{}_{0,75} p_{20}} \\ &= 1 - \frac{(1 - 0{,}04)(1 - 0{,}75(\frac{1}{6}))}{1 - 0{,}75(0{,}04)} \\ &= 1 - 0{,}865979 \\ &= 0{,}134021 \end{aligned}$$

Jawab : E.

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 4 s.d 6: Suatu survival distribution function (SDF) didefinisikan sebagai berikut:
$S(x) = \frac{c-x}{c+x}, 0 \leq x \leq c$.
Sebuah *life table* dibangun berdasarkan SDF ini dengan menggunakan $l_0 = 100.000$. Nilai _40 dalam *life table* ini adalah 36.000

4. Berapakah nilai ω dalam table ini?

   A. 98

   B. 85

   C. 83

   D. 80

   E. 78

Pembahasan:
Diketahui :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{c-x}{c+x}, 0 \leq x \leq c \\ l_0 &= 100.000 \\ l_4 0 &= 36.000 \end{aligned}$$

Rumus yang digunakan :

$$l_x = l_0 \cdot S(x)$$

ω adalah x terkecil yang menyebabkan $S(x) = 0$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
l_{40} &= l_0 \cdot S(40) \\
\frac{l_{40}}{l_0} &= S(40) \\
\frac{l_{40}}{l_0} &= \frac{c-40}{c+40} \\
36c + 1440 &= 100c - 4000 \\
c &= \frac{5440}{64} \\
&= 85
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \frac{85-\omega}{85+\omega} = 0 \\
\omega &= 85
\end{aligned}$$

Jawab : B.

5. Hitunglah probabilitas dari seseorang yang akan tetap hidup dari sejak kelahirannya sampai dengan umur 75 tahun.

   A. 0,4150

   B. 0,2000

   C. 0,1125

   D. 0,0625

   E. 0,0336

   Pembahasan:
   Diketahui :

$$S(x) = \frac{85-x}{85+x}, 0 \leq x \leq 85$$

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
\mathring{e}_x &= \int_0^\infty {}_tp_x \, dt
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{\frac{85-x-t}{85+x+t}}{\frac{85-x}{85+x}} \\
&= \frac{85-x-t}{85+x+t} \cdot \frac{85+x}{85-x} \\
{}_{75}p_0 &= \frac{85-75}{85+75} \cdot \frac{85}{85} \\
&= \frac{10}{160} \\
&= 0{,}0625
\end{aligned}
$$

Jawab : D.

6. Hitunglah probabilitas dari seseorang yang berumur 15 tahun akan meninggal antara umur 51 dan 65 tahun.

   A. 2/15

   B. 1/6

   C. 1/8

   D. 4/27

   E. 2/9

   Pembahasan:
   Diketahui :

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \frac{85-x}{85+x}, 0 \leq x \leq 85 \\
{}_tp_x &= frac85-x-t85+x+t \cdot \frac{85+x}{85-x}
\end{aligned}
$$

   Rumus yang digunakan :

$$
{}_{n|m}q_x = {}_np_x \cdot {}_mq_{x+n}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
{}_{35|15}q_{15} &= {}_{35}p_{15} \cdot {}_{15}q_{50} \\
&= {}_{36}p_{15} \cdot (1 - {}_{14}p_{51}) \\
&= \frac{85-15-36}{85+15+36} \cdot \frac{85+15}{85-15} \cdot \Big(1 - \frac{85-51-14}{85+51+14} \cdot \frac{85+51}{85-51}\Big) \\
&= \frac{34}{136} \cdot \frac{100}{70} \cdot \Big(1 - \frac{20}{150} \cdot \frac{136}{34}\Big) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Jawab : B.

7. Diketahui fungsi *force of mortality* $\mu(x) = \frac{1}{x+1}, x \geq 0$.
   Tentukan PDF (*probability density function*) dari X.

   A. $\frac{1}{x+1}, x \geq 0$

   B. $\frac{x}{x+1}, x \geq 0$

   C. $e^{x+1}, x \geq 0$

   D. $\frac{x+1}{x}, x \geq 0$

   E. $\frac{1}{(x+1)^2}, x \geq 0$

   Pembahasan:
   Diketahui :

$$\mu(x) = \frac{1}{x+1}, x \geq 0$$

Rumus yang digunakan :

$$f(x) = \mu(x) \cdot \exp\Big[-\int_0^x \mu(t)\, dt\Big]$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mu(x) \cdot \exp\Big[-\int_0^x \mu(t)\, dt\Big] \\
&= \frac{1}{x+1} \cdot \exp\Big[-\int_0^x \frac{1}{t+1}\, dt\Big] \\
&= \frac{1}{x+1} \cdot \exp[-\ln(x+1)] \\
&= \frac{1}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Jawab : E.

8. Jika diketahui ${q_x}^{t(d)} = 0{,}2$ dan ${q_x}^{t(w)} = 0{,}4$, hitunglah ${q_x}^{(t)}$
   A. 0,08
   B. 0,32
   C. 0,12
   D. 0,92
   E. 0,52

   Pembahasan:
   Diketahui :

$$\begin{aligned} q_x^{\prime(d)} &= 0{,}2 \\ q_x^{\prime(w)} &= 0{,}4 \end{aligned}$$

Rumus yang digunakan :

$$\begin{aligned} q_x^{(d)} &= q_x^{\prime(d)}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{\prime(w)}\Big) \\ q_x^{(w)} &= q_x^{\prime(w)}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{\prime(d)}\Big) \\ q_x^{(\tau)} &= q_x^{(d)} + q_x^{(w)} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} q_x^{(d)} &= q_x^{\prime(d)}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{\prime(w)}\Big) \\ &= 0{,}2\Big(1 - \frac{0{,}4}{2}\Big) \\ &= 0{,}16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_x^{(w)} &= q_x^{\prime(w)}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{\prime(d)}\Big) \\ &= 0{,}4\Big(1 - \frac{0{,}2}{2}\Big) \\ &= 0{,}36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_x^{(\tau)} &= q_x^{(d)} + q_x^{(w)} \\ &= 0{,}16 + 0{,}36 \\ &= 0{,}52 \end{aligned}$$

Jawab : E.

9. Jika $\mu_{50+t}^{(d)}$ dan $\mu_{50+t}^{(w)}$ bernilai konstan pada $0 < t < 1$, hitunglah $q_{60}^{(d)}$ jika diketahui $q_{60}^{r(d)} = q_{60}^{r(w)} = 0{,}3$.

   A. 0,180

   B. 0,342

   C. 0,255

   D. 0,168

   E. 0,088

   Pembahasan:
   Diketahui :

$$\mu_{70+t}^{(d)} \text{ dan } \mu_{70+t}^{(w)} \text{ adalah konstan pada } 0 < t < 1$$
$$\mu_{70}^{'(d)} = \mu_{70}^{'(w)} = 0{,}3$$

   Rumus yang digunakan :

$$q_x^{(d)} = q_x^{'(d)}\Big(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)}\Big)$$

   Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} q_x^{(d)} &= q_x^{'(d)}\Big(1 - \frac{1}{2} q_x^{'(w)}\Big) \\ &= 0{,}3\Big(1 - \frac{0{,}3}{2}\Big) \\ &= 0{,}255 \end{aligned}$$

   Jawab : C.

10. Dalam sebuah studi data lengkap, dengan hanya satu kematian pada setiap titik kematian, $\Lambda(t)$ diestimasi dengan menggunakan metode Nelson-Aalen. Jika diketahui $\hat{\Lambda}(t_k) = 0{,}7127475$ dan $\hat{\Lambda}(t_{k+1}) = 0{,}79608083$, hitunglah $\hat{\Lambda}(t_{k+2}) = 0$ (dibulatkan 4 desimal).

    A. 0,4393

    B. 0,8870

    C. 0,4283

    D. 0,3914

    E. 0,7733

    Pembahasan:
    Diketahui :

$$\text{Estimasi Nelson-Aalen}$$
$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(t_k) &= 0{,}7127475 \\ \hat{\Lambda}(t_{k+1}) &= 0{,}79608083\end{aligned}$$

Rumus yang digunakan :

$$\hat{\Lambda}(t_k) \quad = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{r_j} = \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1}, t_k \le t < t_{k+1}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(t_k) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} = 0{,}7127475 \\ \hat{\Lambda}(t_{k+1}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1+1} = 0{,}79608083 \\ 0{,}79608083 &= 0{,}7127475 + \frac{1}{n-k} \\ \frac{1}{n-k} &= 0{,}83333333 \\ n-k &= 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}(t_{k+2}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1+1} + \frac{1}{n-k+2+1} \\ &= 0{,}79608083 + \frac{1}{n-k+1} \\ &= 0{,}79608083 + \frac{1}{12+1} \\ &= 0{,}886989\end{aligned}$$

Jawab : B.

11. Berdasarkan 30 pengamatan, diperoleh model sebagai berikut:
$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$, dimana $R^2 = 0{,}81$
Hitunglah nilai F statistik yang digunakan untuk menguji hubungan linear (dibulatkan 2 desimal).

A. 57,55

B. 62,43

C. 32,00

D. 41,90

E. 26,78

Pembahasan:
Diketahui :

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon, \text{ dimana } R^2 = 0{,}81$$
$$n = 3$$
$$k \text{ (jumlah parameter)} = 3$$

Rumus yang digunakan :

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} \\ &= \frac{\frac{0{,}81}{3-1}}{\frac{1-0{,}81}{30-3}} \\ &= 57{,}552631 \end{aligned}$$

Jawab : A.

12. Berdasarkan 40 pengamatan, diperoleh model sebagai berikut:

Model I	:	$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$
Model II	:	$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$

Dan diketahui data sebagai berikut:

(i) $\sum(Y - \bar{Y})^2 = 150$

(ii) $\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 12$

(iii) Untuk model I, $\hat{\beta}_2 = -2$

(iv) Untuk model II, $R^2 = 0{,}70$

Hitunglah nilai F statistik yang digunakan untuk menguji bahwa β_3 dan β_4 adalah *jointly* sama dengan 0.

A. 21,90

B. 20,88

C. 19,50

D. 21,67

E. 22,80

Pembahasan:
Diketahui :

$$\begin{aligned} \text{Model I:} \quad Y = & \quad \beta_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon \\ \text{Model II:} \quad Y = & \quad \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon \end{aligned}$$

Digunakan untuk mengestimasi 40 pengamatan dan diketahui data sebagai berikut :

i. $\sum(Y - \bar{Y})^2 = 150$
ii. $\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 12$
iii. Untuk model I, $\hat{\beta}_2 = -2$
iv. Untuk model II, $R^2 = 0{,}70$

Rumus yang digunakan :

$$\text{Untuk Model I } (\textit{restricted}) : \quad R^2 = \quad \hat{\beta}_2^2 \Big(\frac{\sum (X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sum (Y - \hat{Y})^2} \Big)$$

$F = \frac{R_{VR}^2 - R_R^2}{m} c \cdot \frac{n-k}{1-R_{VR}^2}$ dengan m selisih jumlah parameter *restricted* dan *unrestricted model* dan k jumlah parameter *unrestricted model*

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} R_R^2 &= \hat{\beta}_2^2 \Big(\frac{\sum (X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sum (Y - \hat{Y})^2} \Big) \\ &= (-2)^2 (\frac{12}{150}) \\ &= 0{,}32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{R_{VR}^2 - R_R^2}{m} c \cdot \frac{n-k}{1 - R_{VR}^2} \\ &= \frac{0{,}7 - 0{,}32}{2} \cdot \frac{40-4}{1-0{,}7} \\ &= 22{,}8 \end{aligned}$$

Jawab : E.

13. Dalam sebuah studi mortalita, diketahui data sebagai berikut:

Waktu t_i	Jumlah Kematian d_i	Jumlah Risiko Y_i
5	2	15
7	2	12
10	1	10
12	2	6

Hitunglah $\tilde{S}(12)$ berdasarkan estimasi Nelson-Aalen $\tilde{H}(12)$ (dibulatkan 3 desimal).

A. 1,202553

B. 0,908307

C. 0,545982

D. 0,454018

E. 0,251338

Pembahasan:
Diketahui :

Waktu t_i	Jumlah Kematian d_i	Jumlah Risiko Y_i
5	2	15
7	2	12
10	1	10
12	2	6

Rumus yang digunakan :

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(t) &= \hat{\Lambda}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{d_j}{r_j}, t_m \leq t < t_{m+1} \\
\tilde{S}(t) &= \exp\Big(- \tilde{H}(t) \Big) \\
&= \exp\Big(- \sum_{j=1}^{m} \frac{d_j}{r_j} \Big), t_m \leq t < t_{m+1}
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}\tilde{H}(12) &= \sum_{j=1}^{4} \frac{d_j}{r_j} \\ &= \frac{2}{15} + \frac{2}{12} + \frac{1}{10} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{11}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}(4) &= \exp\Big(-\tilde{H}(12)\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{11}{15}\Big) \\ &= 0{,}480305\end{aligned}$$

Jawab : B.

14. Data di bawah ini diekstrak dari table mortalita *select* dan *ultimate* dengan periode seleksi 2 tahun:

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
60	80.625	79.954	78.839	62
61	79.137	78.402	77.252	63
62	77.575	76.770	75.578	64

Hitunglah ${}_{0,9}q_{[60]+0,6}$ (dibulatkan 4 desimal).

A. 0,0102

B. 0,0103

C. 0,0104

D. 0,0105

E. 0,0106

Pembahasan:
Diketahui :

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
60	80.625	79.954	78.839	62
61	79.137	78.402	77.252	63
62	77.575	76.770	75.578	64

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
q_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\
q_{[x]+1} &= \frac{l_{[x]+1} - l_{x+2}}{l_{[x]+1}} \\
q_{[x]} &= \frac{l_{[x]} - l_{[x]+1}}{l_{[x]}} \\
{}_t p_x &= {}_{t+x} p_0 \\
{}_t p_x &= p_x p_{x+1} p_{x+2} \cdots p_{x+t-1}
\end{aligned}
$$

Untuk UUD konstan dan usia bukan bilangan bulat

$$
\begin{aligned}
{}_s p_x &= 1 - s \cdot q_x \\
{}_s p_{x+t} &= \frac{{}_{s+t} p_x}{{}_t p_x} = \frac{{}_{s+t} p_x}{1 - t \cdot q_x}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_{0,9} q_{[60]+0,6} &= 1 - {}_{0,9} q_{[60]+0,6} \\
&= 1 - \frac{{}_{1,5} p_{[60]}}{{}_{0,6} p_{[60]}} \\
&= 1 - \frac{p_{[60]} \cdot {}_{0,5}\, p_{[60]+1}}{{}_{0,6} p_{[60]}} \\
&= 1 - \frac{p_{[60]} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot q_{[60]+1})}{1 - 0{,}6 \cdot q_{[60]}} \\
&= 1 - \frac{\frac{79.954}{80.625} \cdot (1 - 0{,}5 \cdot \frac{79.954 - 78.839}{79.954})}{(1 - 0{,}6 \cdot \frac{80.625 - 79.954}{80.625})} \\
&= 0{,}010295
\end{aligned}
$$

Jawab : B.

15. Di bawah ini adalah tabel untuk *double decrement* $l_{40}^{(\tau)} = 2.200$ dengan

x	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{r(d)}$	$q_x^{r(w)}$
40	0,24	0,12	0,26	y
41	$--$	$--$	0,20	$2y$

Hitunglah $l_{42}^{(\tau)}$ (dibulatkan ke satuan terdekat).

A. 803

B. 822

C. 840

D. 860

E. 880

Pembahasan:
Diketahui :

$$l_{40}^{(\tau)} = 2.200 \text{ dengan}$$

x	$q_x^{(d)}$	$q_x^{(w)}$	$q_x^{r(d)}$	$q_x^{r(w)}$
40	0,24	0,12	0,26	y
41	$--$	$--$	0,20	$2y$

Rumus yang digunakan :

$$\begin{aligned} q_x^{(d)} &= q_x^{'(d)}\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{'(w)}\right) \\ q_x^{(w)} &= q_x^{'(w)}\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{'(d)}\right) \\ {}_tp_x^{(\tau)} &= {}_tp_x^{'(d)} \cdot {}_tp_x^{'(w)} \\ {}_tp_x^{'(j)} &= 1 -{}_t q_x^{'(j)} \\ l_{x+1}^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} \cdot p_x^{(\tau)} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
q_{40}^{(w)} &= q_{40}^{'(w)}\Big(1 - \frac{1}{2}q_{40}^{'(d)}\Big) \\
0{,}12 &= y\Big(1 - \frac{0{,}26}{2}\Big) \\
y &= \frac{0{,}12}{0{,}87} \\
&= 0{,}137931
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{40}^{'(w)} &= 0{,}137931 \\
q_{41}^{'(w)} &= 2 \cdot y \\
&= 2 \cdot 0{,}137931 \\
&= 0{,}275862
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{42}^{(\tau)} &= l_{41}^{(\tau)} \cdot p_{41}^{(\tau)} \\
&= l_{40}^{(\tau)} \cdot p_{40}^{(\tau)} \cdot p_{41}^{(\tau)} \\
&= l_{40}^{(\tau)} \cdot p_{40}^{'(d)} \cdot p_{40}^{'(w)} \cdot p_{41}^{(d)} \cdot p_{41}^{(w)} \\
&= 2.200 \cdot (1 - 0{,}26) \cdot (1 - \frac{4}{29}) \cdot (1 - 0{,}20) \cdot (1 - \frac{8}{29}) \\
&= 813{,}0321046
\end{aligned}$$

Jawab : B.

16. Jika $l_x = 14.040$ dan $q_x = \frac{1}{3}$, hitunglah $l_{x+1/4}$ berdasarkan asumsi hiperbolis.

 A. 12.480

 B. 13.440

 C. 14.238

 D. 11.220

 E. 12.230

Pembahasan:
Diketahui :

$$\begin{aligned}
l_x &= 14.040 \\
q_x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
l_{x+s} &= \left(\frac{s}{l_{x+1}} + \frac{1-s}{l_x}\right)^{-1} \\
q_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
q_x &= \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \\
\frac{1}{3} &= \frac{14.040 - l_{x+1}}{14.040} \\
14.040 = 42.120 - 3l_{x+1} & \\
l_{x+1} = \frac{28.020}{3} &= 9.360 \\
l_{x+\frac{1}{4}} &= \left(\frac{0,25}{9.360} + \frac{1-0,25}{14.040}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{12.480}\right)^{-1} \\
12.480 &
\end{aligned}
$$

Jawab : A.

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 17 s.d 20:

Diketahui sampel atas 20 individu ada pada $t = 0$. Semua gagal (*fail*) dalam 5 minggu, dan hanya minggu dimana terjadi kegagalan tersebut dicatat. Hasil pengamatan atas sampel ini adalah 1 individu gagal (*fail*) pada minggu pertama, 3 dalam minggu ke-dua, 7 dalam minggu ke-tiga, 5 dalam minggu ke-empat, dan 1 dalam minggu ke-lima.

17. Hitunglah ${}_{2|}q_0$

A. 0,35

B. 0,38

C. 0,40

D. 0,45

E. 0,47

Pembahasan:

Diketahui :

t	d_t	n_t
$0 \leq t < 1$	1	20
$1 \leq t < 2$	3	19
$2 \leq t < 3$	7	16
$3 \leq t < 4$	5	9
$4 \leq t < 5$	1	4

Rumus yang digunakan :

$$_{t|}q_0 = \frac{d_t}{N}$$

Dengan demikian diperoleh :

$_{2|}q_0$ diestimasi oleh proporsi multinomial dari kematian pada interval ke-3

$$\begin{aligned} _{2|}q_0 &= \frac{d_2}{N} \\ &= \frac{7}{20} \\ &= 0{,}35 \end{aligned}$$

Jawab : A.

18. Hitunglah $S(3)$.

A. 0,35

B. 0,38

C. 0,40

D. 0,45

E. 0,47

Pembahasan:
Diketahui :

t	d_t	n_t
$0 \leq t < 1$	1	20
$1 \leq t < 2$	3	19
$2 \leq t < 3$	7	16
$3 \leq t < 4$	5	9
$4 \leq t < 5$	1	4

Rumus yang digunakan :

$$S(t) = \frac{n_t}{N}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} &S(3) \text{ diestimasi oleh proporsi jumlah yang hidup pada } t = 3 \\ S(3) &= \frac{n_3}{N} \\ &= \frac{9}{20} \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

Jawab : A.

19. Hitunglah q_3 (dibulatkan 3 desimal).

A. 0,624

B. 0,857

C. 0,556

D. 0,520

E. 0,482

Pembahasan:
Diketahui :

t	d_t	n_t
$0 \leq t < 1$	1	20
$1 \leq t < 2$	3	19
$2 \leq t < 3$	7	16
$3 \leq t < 4$	5	9
$4 \leq t < 5$	1	4

Rumus yang digunakan :

$$q_t = \frac{d_t}{n_t}$$

Dengan demikian diperoleh :

q_3 diestimasi oleh proporsi binomial dari kematian pada interval ke-4 dan jumlah yang hidup pada awal interval

$$\begin{aligned} q_3 &= \frac{d_3}{n_3} \\ &= \frac{5}{9} \\ &= 0{,}55555556 \end{aligned}$$

Jawab : C.

20. Dengan mengasumsikan T berdistribusi eksponensial, hitunglah estimasi varians dari $\hat{\lambda}(3{,}5)$ (dibulatkan 4 desimal).

A. 0,4860

B. 0,6280

C. 0,3628

D. 0,8571

E. 0,1389

Pembahasan:
Diketahui :

t	d_t	n_t
$0 \leq t < 1$	1	20
$1 \leq t < 2$	3	19
$2 \leq t < 3$	7	16
$3 \leq t < 4$	5	9
$4 \leq t < 5$	1	4

Rumus yang digunakan :

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{n_{t+1}}{n_t} \\ Var[\hat{\Lambda}(t)] &= \frac{q_t}{p_t \cdot n_t} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \frac{n_4}{n_3} \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var[\hat{\Lambda}(t)] &= \frac{q_t}{p_t \cdot n_t} \\
&= \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{9} \cdot 9} \\
&= 0{,}138888889
\end{aligned}
$$

Jawab : E.

21. Anda mencocokkan sebuah model *Autoregressive* AR(1) terhadap data berikut ini:
$y_1 = 2{,}0$
$y_2 = -1{,}8$
$y_3 = 1{,}4$
$y_4 = -2{,}0$
$y_5 = 1{,}2$
Anda memilih $\varepsilon_1 = 0$, $\mu = 0$, $\rho_1 = 0{,}5$ sebagai nilai awal.
Hitunglah nilai dari jumlah kuadrat dari fungsi $S = \sum[\varepsilon_t|\varepsilon_1 = 0, \mu = 0, \rho_1 = 0{,}5]^2$, yaitu nilai dari $\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i{}^2$ (dibulatkan 2 desimal).

    A. 25,26

    B. 18,87

    C. 20,42

    D. 28,21

    E. 26,63

Pembahasan:

Diketahui :

$$y_1 = 2{,}0$$
$$y_2 = -1{,}8$$
$$y_3 = 1{,}4$$
$$y_4 = -2{,}0$$
$$y_5 = 1{,}2$$
$$\varepsilon_1 = 0$$
$$\mu = 0$$
$$\rho_1 = 0{,}5$$

Rumus yang digunakan :

Untuk $AR(p)$

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \delta + \varepsilon_t \\ \mu &= \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p} \\ \rho_k &= \phi_1^k \\ \varepsilon_t &= y_t - \hat{y}_t \\ \varepsilon_t &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \cdots - \phi_p y_{t-p} - \delta \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\delta}{1 - \phi_1} \\ 0 &= \frac{\delta}{1 - 0{,}5} \\ \delta &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh model $AR(1)$

$$y_t = 0{,}5 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

t	y_t	$\hat{y}_t$	ε_t	ε_t^2
1	2.00		0.00	0.00
2	-1.80	1.00	-2.80	7.84
3	1.40	-0.90	2.30	5.29
4	-2.00	0.70	-2.70	7.29
5	1.20	-1.00	2.20	4.84
Total				25.26

Diperoleh $\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i^2 = 25{,}26$

Jawab : A.

22. Diketahui dua model random walk yang identik dalam segala aspek, kecuali model pertama mengandung sebuah parameter *drift* positif yang diketahui sedangkan model lainnya tidak mengandung parameter *drift*. Manakah yang salah dari 5 pernyataan berikut ini?

    A. Untuk model random walk tanpa *drift*, semua nilai *forecast* dari waktu T adalah sama.

    B. Untuk model random walk dengan *drift*, *standard error* nilai *forecast* dari waktu T akan naik atau turun, tergantung dengan parameter *drift*, ketika horison *forecast* naik.

    C. Untuk model *random walk* dengan *drift*, nilai *forecast* dari waktu T akan naik secara linier ketika horison *forecast* naik.

    D. Untuk model *random walk* dengan *drift*, *standard error* nilai *forecast* dari waktu T sama dengan *standard error* dari nilai *forecast* yang bersesuaian untuk model *random walk* tanpa *drift*.

    E. Untuk model *random walk* tanpa *drift*, *standard error* nilai *forecast* dari waktu T naik ketika horison *forecast* naik.

Pembahasan:
Diketahui :
Dua model *random walk* yang identik dalam segala aspek, kecuali model pertama mengandung sebuah parameter *drift* positif yang diketahui sedangkan model lainnya tidak mengandung parameter *drift*.

Rumus yang digunakan :

1. Sifat model *random walk* tanpa *drift*
    - Model : $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$

- Peramalan

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+1} &= E(y_{T+1}|y_T,\ldots,y_1)\\ &= y_T + E(\varepsilon_{T+1})\\ &= y_T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+2} &= E(y_{T+2}|y_{T+1},\ldots,y_1)\\ &= E(y_{T+1}+\varepsilon_{T+2})\\ &= E(y_T+\varepsilon_{T+1}+\varepsilon_{T+2})\\ &= y_T\end{aligned}$$

Untuk peramalam l periode juga menghasilkan $\hat{y}_{T+1} = y_T$

- *Standard error*

$$\begin{aligned}e_1 &= y_{T+1} - \hat{y}_{T+1}\\ &= y_T + \varepsilon_{T+1} - y_T\\ &= \varepsilon_{T+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_2 &= y_{T+2} - \hat{y}_{T+2}\\ &= y_T + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - y_T\\ &= \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2}\end{aligned}$$

Seterusnya sampai *standard error* ke-l

2. Sifat model *random walk* dengan *drift*

- Model : $y_t = y_{t-1} + d + \varepsilon_t$
- Peramalan

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+1} &= E(y_{T+1}|y_T,\ldots,y_1)\\ &= y_T + d + E(\varepsilon_{T+1})\\ &= y_T + d\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+2} &= E(y_{T+2}|y_{T+1},\ldots,y_1)\\ &= E(y_{T+1}+d+\varepsilon_{T+2})\\ &= E(y_T+d+d+\varepsilon_{T+1}+\varepsilon_{T+2})\\ &= y_T + 2d\end{aligned}$$

Untuk peramalan l periode akan menghasilkan $\hat{y}_{T+1} = y_T + ld$

- *Standard error*

$$\begin{aligned} e_1 &= y_{T+1} - \hat{y}_{T+1} \\ &= y_T + d + \varepsilon_{T+1} - y_T - d \\ &= \varepsilon_{T+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= y_{T+2} - \hat{y}_{T+2} \\ &= y_T + d + d + \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} - y_T - d - d \\ &= \varepsilon_{T+1} + \varepsilon_{T+2} \end{aligned}$$

Seterusnya sampai *standard error* ke-l

Berdasarkan sifat-sifat di atas maka yang salah adalah pilihan B karena jika model *random walk* mengandung sebuah parameter *drift* positif maka *standard error* nilai *forecast* dari waktu T akan selalu naik sesuai dengan sifatnya.

Jawab : B.

23. Jika diketahui
    (i) $\mu_x = F + e^{ex}, x \geq 0$
    (ii) ${}_{0},4p_0 = 0{,}48$

    Hitunglah nilai F (dibulatkan 3 desimal).

    A. $-0{,}090$

    B. $-0{,}200$

    C. 1,090

    D. 0,303

    E. 0,200

    Pembahasan:
    Diketahui :

$$\begin{aligned} \mu_x &= F + e^{2x}, x \geq 0 \\ {}_{0,4}p_0 &= 0{,}48 \end{aligned}$$

Rumus yang digunakan :

$${}_xp_0 = \exp\Big[-\int_0^x \mu(s)\ ds\Big]$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_{0,4}p_0 &= \exp\Big[-\int_0^{0,4} F + e^{2s}\, ds\Big] \\
0{,}48 &= \exp\Big[-0{,}4F - \frac{e^{0,8} - e^0}{2}\Big] \\
\ln(0{,}48) &= -0{,}4F - 0{,}612771 \\
F &= \frac{0{,}733969 - 0{,}612771}{0{,}4} \\
&= 0{,}302995
\end{aligned}
$$

Jawab : D.

24. Diketahui hasil dari regresi linier sebagai berikut:

t	Aktual (actual)	Penyesuaian (fitted)
1	77,0	75,5
2	69,0	70,6
3	72,0	70,9
4	73,0	74,0
5	65,0	66,4

A. $-0{,}07$
B. $-0{,}02$
C. $-0{,}20$
D. $0{,}02$
E. $0{,}36$

Pembahasan:
Diketahui :

t	Aktual (actual)	Penyesuaian (fitted)
1	77,0	75,5
2	69,0	70,6
3	72,0	70,9
4	73,0	74,0
5	65,0	66,4

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \\
\hat{\varepsilon}_t &= \text{nilai aktual} - \text{nilai penyesuaian} \\
\hat{\rho} &= 1 - \frac{d}{2}
\end{aligned}
$$

$\hat{\rho}$ merupakan estimasi koefisien kolerasi deret lag 1 untuk residual

Dengan demikian diperoleh :

t	Aktual (actual)	Penyesuaian (fitted)	$\hat{\varepsilon}_t$	$\hat{\varepsilon}_t^2$	$(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2$
1	77,00	75,50	1.50	2.25	0.00
2	69,00	70,60	-1.60	2.56	9.61
3	72,00	70,90	1.10	1.21	7.29
4	73,00	74,00	-1.00	1.00	4.41
5	65,00	66,40	-1.40	1.96	0.16
Total				8.98	21.47

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \\
&= \frac{21{,}47}{8{,}98} \\
&= 2{,}390869
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho} &= 1 - \frac{d}{2} \\
&= 1 - \frac{2{,}390869}{2} \\
&= -0{,}195435
\end{aligned}
$$

Jawab : C.

25. Untuk sebuah deret waktu y_t, diketahui:

t	y_t	$y_t - \bar{y}$
1	980	-15
2	1.020	25
3	960	-40
4	1.030	35
5	985	-12

Hitunglah estimasi fungsi autokorelasi parsial (*partial autocorrelation*) pada *time displacement* $k = 2$ (dibulatkan 2 desimal).

A. 0,41

B. $-0{,}63$

C. $-0{,}46$

D. $-0{,}84$

E. 0,35

Pembahasan:
Diketahui :

t	y_t	$y_t - \bar{y}$
1	980	-15
2	1.020	25
3	960	-40
4	1.030	35
5	985	-12

Rumus yang digunakan :

$$\textit{Autocorrelation} : r_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (y_t - \hat{y})(y_{i+k} - \hat{y})}{\sum_{i=1}^{n} (y_t - \hat{y})^2}$$

Partial Autocorrelation :

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{11} &= r_1 \\
\hat{\varphi}_{22} &= \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \\
\hat{\varphi}_{kj} &= \hat{\varphi}_{k-1,j} - \varphi_{kk}\varphi_{k-1,k-j} \qquad k = 2, \ldots \qquad j = 1, 2, \ldots, k \\
\hat{\varphi}_{kk} &= \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \varphi_{k-1,j} r_j} \qquad k = 3, \ldots
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{4} (y_t - \hat{y})(y_{i+1} - \hat{y})}{\sum_{i=1}^{5} (y_t - \hat{y})^2} \\
&= \frac{(-15)(25) + (25)(-40) + (-40)(35) + (35)(-12)}{(-15)^2 + (25)^2 + (-40)^2 + (35)^2 + (-12)^2} \\
&= -\frac{1065}{1273} \\
&= -0{,}836606
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{3} (y_t - \hat{y})(y_{i+2} - \hat{y})}{\sum_{i=1}^{5} (y_t - \hat{y})^2} \\
&= \frac{(-15)(-40) + (25)(35) + (-40)(12)}{(-15)^2 + (25)^2 + (-40)^2 + (35)^2 + (-12)^2} \\
&= \frac{1955}{3819} \\
&= 0{,}511914
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{22} &= \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \\
&= \frac{\frac{1955}{3819} - (-\frac{1065}{1273})^2}{1 - (-\frac{1065}{1273})^2} \\
&= -0{,}626467
\end{aligned}$$

Jawab : B.

26. Sebuah distribusi gamma dengan dua parameter didefinisikan oleh *Probability Density Function* (PDF) sebagai berikut:
$f(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$
dengan *mean* dan *variance*-nya adalah $\mu = \beta\alpha$ dan $\sigma^2 = \beta^2\alpha$.

Jika diketahui sampel 10 data kematian tikus laboratorium (dalam hari) adalah 2,3,5,6,7,8,10,11,11,12, hitunglah estimasi dari α dan β dengan metode *moments* (dibulatkan 3 desimal).

A. $\alpha = 1{,}050$ dan $\beta = 7{,}500$

B. $\alpha = 1{,}512$ dan $\beta = 6{,}463$

C. $\alpha = 1{,}473$ dan $\beta = 5{,}090$

D. $\alpha = 1{,}322$ dan $\beta = 8{,}254$

E. $\alpha = 1{,}032$ dan $\beta = 7{,}367$

Pembahasan:
Diketahui :
PDF distribusi gamma dengan *mean* $\mu = \beta\alpha$ dan *variance* $\sigma^2 = \beta^2\alpha$ adalah $f(t) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{\frac{-t}{\beta}}, t > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ Rumus yang digunakan :

$$\begin{aligned}
{\mu_k}' &= E(T^k) \\
{m_k}' &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^k
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
{\mu_1}' &= E(T) \\
&= \mu \\
&= \alpha\beta \\
&= {m_1}' \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{\mu_2}' &= E(T^2) \\
&= \sigma^2 + \mu^2 \\
&= \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2
\end{aligned}$$

Sehingga, $\alpha\beta = \hat{T}$ dan $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$

Dari hasil di atas diperoleh estimasi $\hat{\beta} = \frac{\bar{T}}{\hat{\alpha}}$ disubstitusi ke persamaan 2

$$\hat{\alpha}\left(\frac{\bar{T}}{\hat{\alpha}}\right)^2 + \hat{\alpha}^2\left(\frac{\bar{T}}{\hat{\alpha}}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{T}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i^2 - \bar{T}^2}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{T}^2}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2 - n\bar{T}^2}$$

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{2+3+5+6+7+8+10+11+12}{10} \\ &= 7{,}5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} T_i^2 &= 2^2+3^2+5^2+6^2+7^2+8^2+10^2+11^2+11^2+12^2 \\ &= 673\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{n\bar{T}^2}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2 - n\bar{T}^2} \\ &= \frac{10 \cdot (7.5)^2}{673 - 10 \cdot (7.5)^2} \\ &= \frac{1125}{221} \\ &= 5{,}090497738\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{\bar{T}}{\hat{\alpha}} \\ &= \frac{7{,}25}{\frac{1125}{221}} \\ &= \frac{221}{150} \\ &= 1{,}4733333\end{aligned}$$

Jawab : C.

Informasi berikut digunakan untuk mengerjakan soal nomor 27 dan 28: Diketahui 6 tikus yang baru lahir. Karena kesehatan yang buruk dari induknya, tikus-tikus tersebut mati pada waktu 2,4,6,9,10,12.

27. Hitunglah $S(10)$ dan $\Lambda(10)$ dengan metode Nelson-Aalen (dibulatkan 4 desimal):

    A. $S(10) = 0{,}1667; \Lambda(10) = 1{,}7918$

    B. $S(10) = 0{,}3333; \Lambda(10) = 1{,}0986$

    C. $S(10) = 0{,}2000; \Lambda(10) = 1{,}6094$

    D. $S(10) = 0{,}2771; \Lambda(10) = 1{,}2833$

    E. $S(10) = 0{,}2346; \Lambda(10) = 1{,}4500$

Pembahasan:

Diketahui :

6 tikus yang baru lahir. Karena kesehatan yang buruk dari induknya, tikus-tikus tersebut mati pada waktu $2; 4; 6; 9; 10; 12$

Rumus yang digunakan :

Nelson-Aalen

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{d_j}{r_j}, t_m \leq t < t_{m+1} \\ S(t) &= \exp[-\Lambda(t)] \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \Lambda(10) &= \sum_{j=1}^{5} \frac{d_j}{r_j} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= 1{,}45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(10) &= \exp[-\Lambda(10)] \\ &= \exp[-1{,}45] \\ &= 0{,}23457 \end{aligned}$$

Jawab : E.

28. Hitunglah $S(10)$ dan $\Lambda(10)$ dengan metode *product-limit* (dibulatkan 4 desimal):

    A. $S(10) = 0{,}1667; \Lambda(10) = 1{,}7918$

B. $S(10) = 0{,}3333; \Lambda(10) = 1{,}0986$

C. $S(10) = 0{,}2000; \Lambda(10) = 1{,}6094$

D. $S(10) = 0{,}2771; \Lambda(10) = 1{,}2833$

E. $S(10) = 0{,}2346; \Lambda(10) = 1{,}4500$

Pembahasan:
Diketahui :
6 tikus yang baru lahir. Karena kesehatan yang buruk dari induknya, tikus-tikus tersebut mati pada waktu $2; 4; 6; 9; 10; 12$

Rumus yang digunakan :

Product-Limit

$$\begin{aligned} S(t) &= \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{r_j - d_j}{r_j}\right), t_m \leq t < t_{m+1} \\ \Lambda(t) &= -\ln[S(t)] \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} S(10) &= \prod_{j=1}^{5}\left(\frac{r_j - d_j}{r_j}\right) \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\frac{1}{2} \\ &= 0{,}16666667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda(10) &= -\ln[S(10)] \\ &= -\ln\left[\frac{1}{6}\right] \\ &= 1,791759 \end{aligned}$$

Jawab : A.

29. Misalkan Anda melakukan *smoothing* deret waktu y_t menggunakan metode *exponential smoothing* 2-parameter dari Holt:

t	y_t	$\tilde{y}_t$	r_t
1995	120,50	117,50	12,00
1996	135,00	131,15	12,99
1997	147,70	145,21	13,63
1998	146,60	$\tilde{y}_{1998}$	r_{1988}

Hitunglah *forecast* 2-periode $\hat{y}_{2000}$ dengan terlebih dahulu melengkapi tabel di atas dengan deret *exponential* 2-parameter dari Holt.

A. Lebih kecil dari 177

B. Paling sedikit 177, tetapi lebih kecil dari 180

C. Paling sedikit 180, tetapi lebih kecil dari 185

D. Paling sedikit 185, tetapi lebih kecil dari 192

E. Paling sedikit 192

Pembahasan:

Diketahui :

Smoothing deret waktu y_t menggunakan metode *exponential smoothing* 2 parameter dari Holt.

t	y_t	$\tilde{y}_t$	r_t
1995	120,50	117,50	12,00
1996	135,00	131,15	12,99
1997	147,70	145,21	13,63
1998	146,60	$\tilde{y}_{1998}$	r_{1988}

Rumus yang digunakan :

$$\begin{aligned} \bar{y}_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)(\bar{y}_{t-1} + r_{t-1}) \\ r_t &= \gamma(\bar{y}_t - \bar{y}_{t-1}) + (1-\gamma)r_{t-1} \\ \bar{y}_{T+l} &= \bar{y}_r + l r_T \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{1996} &= \alpha y_{1996} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{1995} + r_{1995}) \\ 131{,}15 &= 135\alpha + (1-\alpha)(117{,}5 + 12) \\ 131{,}15 &= 135\alpha + 129{,}5\alpha - 129{,}5\alpha \\ 5{,}5\alpha &= 1{,}65 \\ \alpha &= 0{,}3 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{1996} &= \gamma(\tilde{y}_{1996} - \tilde{y}_{1995}) + (1-\gamma)r_{1995} \\
12{,}99 &= \gamma(131{,}15 - 117{,}5) + (1-\gamma)12 \\
12{,}99 &= 13{,}65\gamma + 12 - 12\gamma \\
1{,}65\gamma &= 0{,}99 \\
\gamma &= 0{,}6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_{1998} &= \alpha y_{1998} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{1997} + r_{1997}) \\
&= 0{,}3(146{,}6) + 0{,}7(145{,}21 + 13{,}63) \\
&= 155{,}168
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{1998} &= \gamma(\tilde{y}_{1998} - \tilde{y}_{1997}) + (1-\gamma)r_{1997} \\
&= 0{,}6(155{,}168 - 145{,}21) + 0{,}4(13{,}63) \\
&= 11{,}4268
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_{1998+2} &= \tilde{y}_{1998} + 2r_{1998} \\
&= 155{,}168 + 2 \cdot 11{,}4268 \\
&= 178{,}0216
\end{aligned}
$$

Jawab : B.

30. Untuk model *double decrement* di bawah ini
    (i) ${}_tp_{30}^{r(d)} = 1 - \frac{t}{55}, 0 \leq t \leq 55$
    (ii) ${}_tp_{30}^{r(w)} = 1 - \frac{t}{30}, 0 \leq t \leq 30$

    Hitunglah nilai $\mu_{30+15}^{r(w)}$ (dibulatkan 5 desimal).

    A. 0,01678

    B. 0,02000

    C. 0,07500

    D. 0,09167

    E. 0,20556

Pembahasan:

Diketahui :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{30}{}'^{(d)} &= 1-\frac{t}{55}, 0 \leq t \leq 55 \\
{}_tp_{30}{}'^{(w)} &= 1-\frac{t}{30}, 0 \leq t \leq 30
\end{aligned}
$$

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x{}^{(\tau)} &= \prod_{i=j}^{m} {}_tp_x{}'^{(j)} \\
\mu_{x+t}^{(\tau)} &= -\frac{1}{{}_tp_x{}^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}({}_tp_x{}^{(\tau)}) \\
&= -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_x{}^{(\tau)})
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{30}{}^{(\tau)} &= {}_tp_{30}{}'^{(d)} \cdot {}_tp_{30}{}'^{(w)} \\
&= \left(1-\frac{t}{55}\right) \cdot \left(1-\frac{t}{30}\right) \\
&= 1-\frac{17}{330}t+\frac{1}{1650}t^2 \\
&= t^2-85t+1650
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{40+t}^{(\tau)} &= -\frac{1}{{}_tp_x{}^{(\tau)}} \cdot \frac{d}{dt}({}_tp_x{}^{(\tau)}) \\
&= \frac{1}{t^2-85t+1650} \cdot \frac{d}{dt}(-t^2+85t-1650) \\
&= \frac{85-2t}{t^2-85t+1650}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_{30+15}^{(\tau)} &= \frac{85-2(15)}{(15^2)-85(15)+1650} \\
&= 0{,}0916666667
\end{aligned}
$$

Jawab : D.

4 A50 Periode Juni 2016

1. Diketahui informasi sebagai berikut:
   - Probabilitas dari (x) hidup selama 15 tahun adalah 0,60
   - Probabilitas dari (x) hidup selama 20 tahun adalah 0,40

   Untuk seseorang yang hidup mencapai usia $x + 15$, hitunglah probabilitas bahwa orang tersebut akan meninggal 5 tahun berikutnya.

   A. 1/4

   B. 1/3

   C. 1/2

   D. 2/3

   E. 3/4

   Pembahasan:
   Diketahui ${}_{t}p_x = 0,6$ dan ${}_{20}p_x = 0,4$
   sehingga probabilitas orang akan meninggal 5 tahun berikutnya adalah

$$\begin{aligned} {}_{15}p_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ 0,6 &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ S(x) &= \frac{S(x+15)}{0,6} \quad (*) \end{aligned}$$

   selanjutnya

$$\begin{aligned} {}_{20}p_x &= \frac{S(x+20)}{S(x)} \\ 0,4 &= \frac{S(x+20)}{S(x)} \\ S(x) &= \frac{S(x+20)}{0,4} \quad (**) \end{aligned}$$

Berdasarkan (*) dan (**) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{S(x+15)}{0,6} &= \frac{S(x+20)}{0,4} \\
\frac{S(x+15)}{S(x+20)} &= \frac{0,6}{0,4} \\
\frac{S(x+15)}{S(x+20)} &= \frac{2}{3} \\
{}_5p_{x+15} &= \frac{2}{3} \\
1 - {}_5q_{x+15} &= \frac{2}{3} \\
{}_5q_{x+15} &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

SEhingga peluang meninggal orang berusia $x+15$, 5 tahun ke depan adalah 1/3

Jawab. B.

2. Jika diketahui *force of mortality* adalah $\mu_x(d) = \dfrac{3}{4(100-x)}$ dan *force of withdrawal* adalah $\mu_x(w) = \dfrac{5}{4(100-x)}$, hitunglah *conditional density function* untuk kematian seseorang pada umur $70+t$, jika orang tersebut hidup pada umur 70.

A. $\dfrac{30-t}{600}$

B. $\dfrac{30-t}{1200}$

C. $\dfrac{70-t}{600}$

D. $\dfrac{70-t}{1200}$

E. $\dfrac{30-t}{600+t}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mu_x^{(\tau)} &= \mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)} \\
&= \frac{3}{4(100-x)} + \frac{5}{4(100-x)} \\
&= \frac{8}{4(100-x)} \\
&= \frac{2}{100-x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x^{(\tau)} &= \exp\left(-\int_0^t \frac{2}{100-y}dy\right) \\
&= \exp(2\ln(100-t) - 2\ln(100)) \\
&= \frac{(100-t)^2}{10000} \quad (*)
\end{aligned}
$$

Dipunyai fungsi joint pdf t dan j, jika seseorang tetap hidup

$$
\begin{aligned}
f(t,j) &= {}_tp_x^{(\tau)}.\mu_x^{(j)}(t) \\
&= \frac{(100-t)^2}{10000}.\frac{3}{4(100-t)} \\
&= \frac{3(100-t)}{40000} \quad (**)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan (*) dan (**) diperoleh conditional density function seorang pada umur 70+t, jika orang tersebut hidup pada umur 70

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{{}_tp_{70}^{(\tau)}.\mu_{70}^{(d)}(t)}{S(70)} \\
&= \frac{\frac{3(100-(70+t))}{40000}}{\frac{(100-70)^2}{10000}} \\
&= \frac{30-t}{1200}
\end{aligned}
$$

sehingga conditional density function seorang pada umur $70+t$, jika orang tersebut hidup pada umur 70 adalah $\dfrac{30-t}{1200}$

Jawab. B.

3. Atas studi mortalita dari dua propinsi, diperoleh data sebagai berikut:

t_i	Propinsi A		Propinsi B	
	d_j	r_j	d_j	r_j
1	30	300	22	200
2	20	270	16	178
3	17	250	20	162
4	23	233	15	142

- r_j adalah banyak resiko dalam periode (t_{i-1}, t_i)
- d_j adalah banyaknya kematian dalam periode (t_{i-1}, t_i) yang diasumsikan terjadi pada t_i
- $S^T(t)$ adalah estimasi product Limit dari $S(t)$ berdasarkan total semua data pengamatan.
- $S^B(t)$ adalah estimasi product Limit dari $S(t)$ berdasarkan data pengamatan proponsi B.

Hitunglah $|S^T(4) - S^B(4)|$ (dibulatkan menjadi dua desimal)

A. 0,01

B. 0,02

C. 0,03

D. 0,04

E. 0,05

Pembahasan:

$$\begin{aligned} S^T(4) &= \left(\frac{500-52}{500}\right)\left(\frac{448-36}{448}\right)\left(\frac{412-37}{412}\right)\left(\frac{375-36}{378}\right) \\ &= 0,674 \quad (*) \\ S^B(4) &= \left(\frac{200-22}{200}\right)\left(\frac{178-16}{178}\right)\left(\frac{162-20}{162}\right)\left(\frac{142-15}{142}\right) \\ &= 0,635 \quad (**) \end{aligned}$$

Berdasarkan (*) dan (**) diperoleh

$$\begin{aligned} |S^T(4) - S^B(4)| &= |0,674 - 0,635| \\ &= 0,039 \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

Jawab. D.

4. Anda mencocokkan model berikut ini dalam 40 pengamatan:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon \tag{4.1}$$

Diketahui datanya sebagai berikut:

Sumber Variasi (Source of Variation)	Tingkat Kebebasan (Degree of Freedom)	Jumlah Kuadrat (Sum of Squares)
Regresi (Regression)	3	108.761
Residual (Error)	44	62.146

Hitunglah nilai $\bar{R}^2$, yaitu R^2 yang dikoreksi

A. 0,392

B. 0,488

C. 0,572

D. 0,596

E. 0,606

Pembahasan:

$$\begin{aligned} TSS &= RSS + ESS \\ &= 62146 + 108761 \\ &= 170907 \end{aligned}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{ESS}{TSS} \\ &= \frac{108761}{170907} \\ &= 0,636 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{n-k} \\ &= 1 - \frac{(1-0,636)(40-1)}{40-4} \\ &= 0,606 \end{aligned}$$

Jawab. E.

5. Misalkan X adalah variabel acak untuk umur pada saat kematian dengan

$$\mu_x = \frac{1}{3(100-x)}, \text{ untuk } 0 \leq x \leq 100$$

Hitunglah e^o_{19} yaitu rata rata pengharapan hidup untuk seseorang berusia 19

A. 42,67

B. 58,89

C. 60,75

D. 67,67

E. 71,75

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_tp_{19} &= \exp\left(-\int_{19}^{19+t} \frac{1}{3(100-y)}dy\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln(81-t)-\ln(81)}{3}\right) \\ &= \frac{(81-t)^{1/3}}{81^{1/3}} \end{aligned}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} e_{19}^{o} &= \int_0^{\infty} \frac{(81-t)^{1/3}}{81^{1/3}}dt \\ &= \int_0^{100-19} \frac{(81-t)^{1/3}}{81^{1/3}}dt \\ &= 60,75 \end{aligned}$$

Jawab. C.

6. Dalam table mortalita select dan ultimate 2 tahun, Anda diberikan informasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} q[x]+1 &= 0,92q_{x+1} \\ l_{58} &= 85.681 \\ l_{59} &= 83.546 \end{aligned}$$

Hitunglah $l_{[57]+1}$ (dibulatkan)

A. 80.436

B. 80.952

C. 81.772

D. 82.315

E. 85.506

Pembahasan:

$$\begin{aligned} q_{58} &= \frac{l_{58}-l_{59}}{l_{58}} \\ &= \frac{85681-83546}{85681} \\ &= 0,0249 \end{aligned}$$

selanjutnya

$$
\begin{aligned}
q_{[57]+1} &= 0,92q_{58} \\
&= (0,92)(0,0249) \\
&= 0,0029
\end{aligned}
$$

maka

$$
\begin{aligned}
q_{[57]+1} &= \frac{l_{[57]+1} - l_{59}}{l_{[57]+1}} \\
0,0029 &= \frac{l_{[57]+1} - 83546}{l_{[57]+1}} \\
0,0029 l_{[57]+1} &= l_{[57]+1} - 83546 \\
(1 - 0,0029) l_{[57]+1} &= 83546 \\
l_{[57]+1} &= \frac{83546}{1 - 0,0029} \\
l_{[57]+1} &= 85506
\end{aligned}
$$

Jawab. E.

7. Jika diketahui
   a) $e_0^o = 40$
   b) $S(x) = 1 - \dfrac{x}{\omega}$, untuk $0 \le x \le \omega$

   Hitunglah e_{20}^o

   A. 30

   B. 36

   C. 40

   D. 42

   E. 50

   Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x &= \frac{S(t+x)}{S(x)} \\
&= \frac{1 - \frac{t+x}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} \\
&= \frac{\omega - (t+x)}{\omega - x}
\end{aligned}
$$

maka ${}_tp_0 = \dfrac{\omega - t}{\omega}$ dan ${}_tp_{20} = \dfrac{\omega - (t+20)}{\omega - 20}$ selanjutnya

$$\begin{aligned} e_0^o &= \int_0^\infty {}_tp_0 dt \\ 40 &= \int_0^{\omega-0} \frac{\omega - t}{\omega} dt \\ 40 &= \omega - \frac{1}{2}\omega \\ \omega &= 80 \quad (*) \end{aligned}$$

Berdasarkan (*) diperoleh

$$\begin{aligned} e_{20}^o &= \int_0^\infty {}_tp_{20} dt \\ &= \int_0^{80-20} \frac{80 - (t+20)}{80-20} dt \\ &= \int_0^{60} \frac{60 - t}{60} dt \\ &= 30 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $e_{20}^o = 30$

Jawab: A.

8. Informasi di bawah ini adalah tentang model ARIMA:

   a) mean =0
   b) $\Psi_1 = 1,58$
   c) $\Psi_2 = -1,22$
   d) $\Psi_3 = 0,348$
   e) $\Psi_4 = -0,032$
   f) $\sigma^2 = 7$

   Hitunglah deviasi standar atas kesalahan perkiraan tiga langkah ke depan (*forecast error three steps ahead*).

   A. 3,29
   B. 4,25
   C. 4,86
   D. 5,91
   E. 6,62

Pembahasan:
Model ARIMA memiliki mean =0 maka $\Psi_0 = 1,58$

$$\begin{aligned} Var[e_T(3)] &= (\Psi_0^2 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ &= (1^2 + 1,58^2 + (-1,22)^2) \\ &= 34,89 \end{aligned}$$

maka Deviasi standart = $\sqrt{Var[e_T(3)]} = \sqrt{34,89} = 5,91$

Jawab. D.

9. Dalam sebuah model *triple-decrement* untuk seseorang yang sekarang berumur x, diketahui *constant force of decrement* sebagai berikut:
   - $\mu_{x+t}^{(1)} = b$ untuk $t \geq 0$
   - $\mu_{x+t}^{(2)} = b$ untuk $t \geq 0$
   - $\mu_{x+t}^{(3)} = 2b$ untuk $t \geq 0$

   Probabilitas orang tersebut akan keluar dari kelompok dalam 4 tahun karena *decrement* (1) adalah 0,0155.

   Hitunglah berapa lama seseorang yang sekarang berumur x diharapkan tetap berada dalam *table triple decrement* (yaitu $E[T]$) ?

   A. 83,33
   B. 79,65
   C. 72,77
   D. 68,15
   E. 62,50

Pembahasan:

$$\begin{aligned} \mu_{x+t}^{(\tau)} &= \mu_{x+t}^{(1)} + \mu_{x+t}^{(2)} + \mu_{x+t}^{(3)} \\ &= b + b + 2b \\ &= 4b \end{aligned}$$

selanjutnya

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(s)ds\right) \\
&= \exp\left(-\int_0^t 4b \;\; ds\right) \\
&= \exp(-4bt)
\end{aligned}
$$

selanjutnya

$$
\begin{aligned}
{}_4q_x^{(1)} &= \int_0^4 f_{T,j}(s,j)ds \\
{}_4q_x^{(1)} &= \int_0^4 {}_sp_x^{(\tau)}\mu_{x+s}^{(2)}(s)ds \\
0,0155 &= \int_0^4 \exp(-4bs).b \;\; ds \\
0,0155 &= \frac{1}{4} - \frac{\exp(-16b)}{4} \\
b &= \frac{\ln(0,938)}{-16} \\
b &= 0,004
\end{aligned}
$$

selanjutnya

$$
\begin{aligned}
E[T] &= \int_0^\infty {}_tp_x dt \\
&= \int_0^\infty \exp(-4.(0,004)t)dt \\
&= 62,5
\end{aligned}
$$

Jawab. E.

10. Informasi di bawah ini diperoleh dari pengamatan sampel atas enam individu untuk mengestimasi q_x:

    - Semua individu yang masuk pengamatan berumur $x+r$, $0 \leq r < 0,5$
    - Satu individu melakukan *withdrawal* pada umur $x+0,6$
    - Dua individu melakukan *withdrawal* pada umur $x+0,75$
    - Satu individu meninggal pada umur $x+0,7$
    - Dua individu tetap hidup mencapai umur $x+1$

    Dengan menggunakan metode *actuarial estimate* diperoleh $\hat{q}_x = 10/33$. Hitunglah r.

    A. 0,1

B. 0,25

C. 0,3

D. 0,4

E. 0,45

Pembahasan:

$x+r$	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	l_i	k_i	Eksposure Aktuarial
$x+r$	$x+1$	$x+0,7$		r	1	0,7		$1-r$
$x+r$	$x+1$		$x+0,6$	r	1		0,6	$0,6-r$
$x+r$	$x+1$		$x+0,75$	r	1		0,75	$0,75-r$
$x+r$	$x+1$		$x+0,75$	r	1		0,75	$0,75-r$
$x+r$	$x+1$			r	1			$1-r$
$x+r$	$x+1$			r	1			$1-r$
Total								$5,1-6r$

Berdasarkan tabel di atas, sebab hanya terdapat satu kematian pada kolom l_i diperoleh
$\hat{q}_x = \dfrac{1}{5,1-6r}$

$$\begin{aligned} \hat{q}_x &= \frac{1}{5,1-6r} \\ \frac{10}{33} &= \frac{1}{5,1-6r} \\ -60r+51 &= 33 \\ r &= \frac{18}{60} \\ r &= 0,3 \end{aligned}$$

Jawab. C.

11. Diketahui tiga hasil pengamatan sebagai berikut:

0,70 0,82 0,92

Anda mencocokkan sebuah distribusi dengan fungsi kepadatan (*density function*) berikut ini terhadap data:

$$f(x) = (p+1)x^p, \quad 0 < x < 1, \; p > -1$$

Hitunglah estimasi maximum likelihood atas p (dibulatkan 2 desimal).

A. 2,12

B. 2,67

C. 3,7

D. 4,32

E. 6,81

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
L(p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\
L(p) &= \prod_{i=1}^{n} (p+1)x_i^p \\
L(p) &= (p+1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^p \\
\ln(L(p)) &= \ln\left((p+1)^n \left((p+1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^p\right)\right) \\
\ln(L(p)) &= n\ln(p+1) + p\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \\
\ln(L(p)) &= n\ln(p+1) + p\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \\
\frac{\ln(L(p))}{dp} &= \frac{n}{p+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \\
0 &= \frac{n}{p+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \\
p &= \frac{-n - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)} \\
p &= \frac{-3 - \ln(0,7) - \ln(0,82) - \ln(0,92)}{\ln(0,7) + \ln(0,82) + \ln(0,92)} \\
&= 3,698
\end{aligned}$$

sehingga estimasi likelihood atas p sebesar 3,7

Jawab. C.

12. Atas pengamatan pada 120 polis dalam studi pembatalan polis, diperoleh data sebagai berikut:

    i. Studi dibuat sedemikian sehingga untuk setiap satu pembatalan polis, ditambahkan satu polis baru (artinya r_j selalu bernilai 120).

    ii. Pembatalan polis terjadi di akhir tahun dengan pengamatan sebagai berikut:
    1 polis batal di akhir tahun polis ke-1

2 polis batal di akhir tahun polis ke-2
3 polis batal di akhir tahun polis ke-3
..
..
n polis batal di akhir tahun polis ke-n

iii. Estimasi Nelson Aalen untuk fungsi distribusi kumulatif pada tahun ke-n adalah $F_n = 0.8262261$.

Hitunglah n

A. 15

B. 20

C. 30

D. 45

E. 65

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
F_n &= 1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{r_j}\right) \\
0,8262261 &= 1 - \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{100}\right) \\
\exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{100}\right) &= 1 - 0,8262261 \\
\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{100} &= -\ln(1 - 0,8262261) \\
\frac{1}{120} + \frac{2}{120} + ... + \frac{n}{120} &= 1,75 \quad \text{dengan menggunakan konsep jumlah barisan aritmatika} \\
\frac{2}{120} &= 1,75 \\
n^2 + n - 420 &= 0 \\
(n+21)(n-20) &= 0, \text{ karena n harus positif maka n=20}
\end{aligned}
$$

Jawab. B.

13. Untuk sebuah tabel multiple decrement, diketahui informasi sebagai berikut:

(i) Decrement (1) adalah kematian, decrement (2) adalah cacat, decrement (3) adalah withdrawal.

(ii) $q'^{(1)}_{65} = 0,020$

(iii) $q'^{(2)}_{65} = 0,035$

(iv) $q'^{(3)}_{65} = 0,120$

(v) Withdrawal hanya terjadi pada akhir tahun.

(vi) Mortalita dan cacat terdistribusi secara uniform pada umur setiap tahun berdasarkan table decrement tunggal.

Hitunglah $q^{(3)}_{65}$

A. 0,0942

B. 0,1087

C. 0,1135

D. 0,1384

E. 0,1566

Pembahasan:

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} &= q'^{(1)}_x \left(1 - \frac{1}{2} q'^{(2)}_x\right) \\ &= 0,02\left(1 - \frac{0,035}{2}\right) \\ &= 0,0197 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} q_x^{(2)} &= q'^{(2)}_x \left(1 - \frac{1}{2} q'^{(1)}_x\right) \\ &= 0,035\left(1 - \frac{0,02}{2}\right) \\ &= 0,0347 \end{aligned}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} q^{(1)}_{(65)} + q^{(2)}_{(65)} + q^{(3)}_{(65)} &= 1 - \left(1 - q'^{(1)}_{(65)}\right)\left(1 - q'^{(2)}_{(65)}\right)\left(1 - q'^{(3)}_{(65)}\right) \\ 0,0197 + 0,347 + q^{(3)}_{(65)} &= 1 - ((1-0,02)(1-0,035)(1-0,12)) \\ q^{(3)}_{(65)} &= 1 - ((1-0,02)(1-0,035)(1-0,12)) - 0,0197 + 0,347 \\ &= 0,1135 \end{aligned}$$

Jawab. C.

14. Diketahui

$$F(X) = 1 - \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6} \text{ untuk } 0 \leq x \leq 120$$

Hitunglah $E[T]$ untuk $x = 30$, yaitu $\overset{o}{e}_{30}$

A. 66,73

B. 68,92

C. 70,17

D. 74,63

E. 77,14

Pembahasan:

$$\begin{aligned} S(X) &= 1 - F(X) \\ &= 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6} \end{aligned}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{\left(1 - \frac{x+t}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}} \\ &= \left(\frac{120 - x - t}{120 - x}\right)^{1/6} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \overset{o}{e}_{30} &= \int_0^{120-30} {}_tp_{30} dt \\ &= \int_0^{90} \left(\frac{120 - 30 - t}{120 - 30}\right) dt \\ &= \int_0^{90} \left(\frac{90 - t}{90}\right)^{1/6} dt \\ &= 77,142857 \end{aligned}$$

Jawab.E.

15. Berdasarkan soal pada nomor 14, hitunglah $Var[T]$ untuk $x = 30$.

A. 457,77

B. 465,32

C. 469,32

D. 476,11

E. 489,67

Pembahasan:

$$\begin{aligned} Var[T] &= \left(2\int_0^{90} t.{}_tp_{30}dt\right) - {e^o_{30}}^2 \\ &= \left(2\int_0^{90} t\left(\frac{90-t}{90}\right)^{1/6} dt\right) - (77,1428577)^2 \\ &= 6408,7912 - 5951,020386 \\ &= 457,77 \end{aligned}$$

Jawab. A.

16. Diketahui studi mortalita sebagai berikut:

    i. 1.000 orang masuk dalam pengamatan tepat pada umur 80

    ii. 40 orang meninggal dunia pada umur 80,30

    iii. 100 orang baru masuk dalam pengamatan pada umur 80,60

    iv. 20 orang meninggal dunia pada umur 80,80

    Jika estimasi q_{80} dihitung dengan metode exact exposure (asumsi force of mortality adalah konstan) dan actuarial exposure, berapakah selisih absolut dari kedua estimasi tersebut?

    A. 0,000095

    B. 0,000107

    C. 0,000178

    D. 0,000221

    E. 0,000674

    Pembahasan:

Exact Exposure

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{exact} &= 1 - \exp\left(-\frac{d_j}{\varepsilon_j}\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{60}{1000 - 0,7(40) + 0,4(100) + 0,2(20)}\right) \\
&= 0,0577869
\end{aligned}
$$

Actuarial Exposure

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{actuarial} &= \frac{d_j}{\varepsilon_j} \\
&= \frac{60}{1000 + 0,4(100)} \\
&= 0,0576923
\end{aligned}
$$

maka $|\hat{q}_{exact} - \hat{q}_{actuarial}| = 0,0000946 \approx 0,000095$

Jawab. A.

17. Suatu studi dilakukan untuk meneliti data Indeks Prestasi Kumulatif (IPK) mahasiswa sebagai fungsi linear penghasilan orangtua. Diketahui data sebagai berikut:

IPK (Y)	Penghasilan Orangtua (X)
4,00	21
3,00	15
3,50	15
2,00	9

Hitunglah R^2

A. 0,98

B. 0,91

C. 0,87

D. 0,82

E. 0,78

Pembahasan:

i	Y_i	X_i	Y_i^2	X_i^2	X_iY_i
1	4	21	16	441	84
2	3	15	9	225	45
3	3,5	15	12,25	225	52,5
4	2	9	4	81	18

$$\begin{aligned} R^2 &= \left(\frac{4\sum_{i=1}^4 X_iY_i - \sum_{i=1}^4 X_i \sum_{i=1}^4 Y_i}{\sqrt{4\sum_{i=1}^4 X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2}\sqrt{4\sum_{i=1}^4 Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^4 Y_i\right)^2}} \right) \\ &= \frac{4(199,5) - 60(12,5)}{\sqrt{4(972) - (60)^2}\sqrt{4(41,25) - (12,5)^2}} = 0,914286 \end{aligned}$$

Jawab. B.

18. Hitunglah ekspektasi hidup dari seseorang yang terdiagnosa LAS (state 2a menurut model Panjer) bila diketahui informasi berikut ini:

    a) $\mu_{2a} = 0,50$

    b) Variansi dari pengharapan hidup untuk orang yang berada dalam state 2a adalah 5,593.

    c) Ekspektasi pengharapan hidup untuk orang yang berada dalam state 3 adalah 0,7.

A. 3,15

B. 3,75

C. 4,20

D. 4,35

E. 5,20

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_{2a}} &= \frac{1}{0,5} = 2 \\
\frac{1}{\mu_3} &= 0,7 \\
Var[T_{2a}] &= \frac{1}{\mu_{2a}^2} + \frac{1}{\mu_{2b}^2} + \frac{1}{\mu_3^2} \\
5,593 &= 2^2 + \frac{1}{\mu_{2b}^2} + 0,7^2 \\
\frac{1}{\mu_{2b}^2} &= 1,103 \\
\frac{1}{\mu_{2b}} &= 1,105 \\
E[T_{2a}] &= \frac{1}{\mu_{2a}} + \frac{1}{\mu_{2b}} + \frac{1}{\mu_3} \\
&= 2 + 1,05 + 0,7 \\
&= 3,75
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

19. Diketahui 15 pekerja tambang mengalami paparan radiasi yang berbahaya. Tiga orang mengalami kematian pada waktu $t = 2$ dan dua orang mengalami kematian pada waktu $t = 4$. Diketahui pula terdapat ?? withdrawal pada waktu $t = 3$. Dengan menggunakan product limit estimator dari $S(t)$, diperoleh $\hat{S}(5) = 0,60$. Hitunglah x.

    A. 1

    B. 2

    C. 3

    D. 4

    E. 5

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\hat{S}(5) &= \prod_{j=1}^{4}\left(\frac{r_j - d_j}{r_j}\right) \\
0,6 &= \left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{12 - x - 2}{12 - x}\right) \\
\frac{3}{4} &= \frac{10 - x}{12 - x} \\
36 - 3x &= 40 - 4x \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Jawab. D.

20. Sebuah studi mortalita dilakukan atas pengamatan terhadap 50 peserta dimulai dari waktu 0.

Diketahui:

Waktu (t)	Jumlah Kematian (d_t)	Jumlah yang disensor (c_t)
15	3	0
17	0	2
25	2	0
30	0	c_{30}
32	9	0
40	2	0

$\hat{S}(35)$ adalah estimasi product limit dari $S(35)$

$\hat{V}[\hat{S}(35)]$ adalah estimasi variansi dari $\hat{S}(35)$ menggunakan formula Greenwood.

$\dfrac{\hat{V}[\hat{S}(35)]}{[\hat{S}(35)]^2} = 0,012947$

Hitunglah c_{30}, jumlah yang disensor pada waktu $t = 30$.

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

E. 10

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
& \hat{V}[\hat{S}(35)] && = [\hat{S}(35)]^2 \times \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) && = \frac{\hat{V}[\hat{S}(35)]}{[\hat{S}(35)]^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{3}{50(47)} + \frac{3}{44(42)} + \frac{9}{(42-c)(33-c)} && = 0,012947 \\
\Leftrightarrow \quad & 1386 - 75c + c^2 && = 850 \\
\Leftrightarrow \quad & 536 - 75c + c^2 && = 0
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
c = \frac{75 - \sqrt{75c^2 - 4(1)(536)}}{2(1)} = 8
$$

dan

$$
c = \frac{75 + \sqrt{75c^2 - 4(1)(536)}}{2(1)} = 67
$$

sebab hanya ada 50 peserta sehingga $c = 8$

Jawab. D,

21. Tentukanlah dari fungsi berikut ini, manakah force of mortality yang tidak valid?
    - i. $\mu(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$ untuk $x \geq 0$
    - ii. $\mu(x) = x \ \sin x$, untuk $x \geq 0$
    - iii. $\mu(x) = 40$, untuk $x \geq 0$

    A. i saja

    B. ii saja

    C. iii saja

    D. i dan ii saja

    E. ii dan iii saja

Pembahasan:

i. $S(x) = e^{-\int_0^x \frac{1}{(1+t)^3}dt} = e^{\frac{1}{2(1+x)^2}-\frac{1}{2}}$
untuk $x = 0$, $S(0) = 1$
untuk $x = \infty$, $S(\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$ (tidak valid)

ii. $S(x) = e^{-\int_0^x t\sin(t)dt} = e^{x\cos(x)-\sin(x)}$
untuk $x = 0$, $S(0) = 1$
untuk $x = \infty$, $S(\infty) = undefinied$ (tidak valid)

iii. $S(x) = e^{-\int_0^x 40dt} = e^{-40x}$
untuk $x = 0$, $S(0) = 1$
untuk $x = \infty$, $S(\infty) = 0 \neq 0$ (valid)

Jawab. D.

22. Misalkan X adalah variabel acak untuk umur pada saat kematian. Jika diasumsikan X mengikuti hukum de Moivre (berdistribusi uniform) dengan $\omega = 100$. Hitunglah ${}_{15}m_{30}$.

A. 0,016

B. 0,025

C. 0,036

D. 0,039

E. 0,042

Pembahasan:
Dipunyai $\omega = 100$, maka $\mu(x) = \dfrac{1}{100-x}$ dan $S(x) = \dfrac{100-x}{100}$ sehingga

$$\begin{aligned} {}_{15}m_{30} &= \frac{\int_0^{15} S(30+t)\mu(30+t)dt}{\int_0^{15} S(30+t)dt} \\ &= \frac{\int_0^{15} \frac{70-t}{100}.\frac{1}{70-t}dt}{\int_0^{15} \frac{70-t}{100}dt} = 0,016 \end{aligned}$$

Jawab. A.

23. Berdasarkan data Indeks Prestasi Kumulatif mahasiswa dan penghasilan orangtua pada soal nomor 17, hitunglah $F_{1,2}$

A. 19,58

B. 21,33

C. 22,36

D. 22,84

E. 23,32

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{\left(\dfrac{R^2}{k-1}\right)}{\left(\dfrac{1-R^2}{n-k}\right)} \\
&= \frac{\left(\dfrac{0,914286}{2-1}\right)}{\left(\dfrac{1-0,914286}{4-2}\right)} \\
&= 21,33
\end{aligned}
$$

Jawab. B.

24. Diketahui:
    - Studi mortalita dilakukan atas sejumlah n orang.
    - Tidak ada data yang disensor dan tidak ada dua kejadian meninggal pada periode yang sama
    - t_k= Saat kejadian meninggal ke-k
    - Estimasi Nelson-Aalen dari fungsi hazard rate kumulatif pada t_2 adalah $\Lambda(\hat{t}_2) = 49/600$

    Hitunglah estimasi product limit Kaplan-Meier dari fungsi survival pada t_{12}.

    A. 0,22

    B. 0,30

    C. 0,33

    D. 0,45

    E. 0,52

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\Lambda(t_2) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \\
\frac{49}{600} &= \frac{2n-1}{n^2-n} \\
49n^2 - 49n &= 1200n - 600 \\
49n^2 - 1249n + 600 &= 0 \\
n &= \frac{1249 - \sqrt{(-1249)^2 - 4(49)(600)}}{2(49)} = 25 \\
\hat{S}(t_{12}) &= \prod_{j=1}^{12} \left(\frac{r_j - d_j}{r_j} \right) \\
&= \frac{24}{25} . \frac{23}{24} . \frac{22}{23} \ldots \frac{13}{14} \\
&= \frac{13}{25} \\
&= 0,52
\end{aligned}$$

Jawab: E.

25. Dari studi mortalita yang diobservasi pada tahun kalender 2015, diperoleh data sebagai berikut:

Individu	Tanggal Lahir
A	1 Juli 1984
B	1 Januari 1985
C	1 Juli 1985

Dalam periode observasi tersebut, hanya individu B yang meninggal dunia dan tidak ada individu yang melakukan withdrawal. Dengan menggunakan metode *exact exposure* (asumsi force of mortality adalah konstan) diperoleh $\hat{q}_{30} = 0,4204$. Pada tanggal berapa individu B meninggal dunia? (cari tanggal yang terdekat)

A. 1 Agustus 2015

B. 1 September 2015

C. 1 Oktober 2015

D. 1 November 2015

E. 1 Desember 2015

Pembahasan:

y_i= tanggal awal pengamatan-tanggal lahir

z_i=tanggal akhir pengamatan-tanggal lahir
θ_i=tanggal meninggal-tanggal lahir
ϕ_i=tanggal withdraw-tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } y_i \leq x \\ y_i - x & , \text{ jika } x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x & , \text{ jika } x < z_i < x+1 \\ 1 & , \text{ jika } z_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\iota_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \theta_i = 0 \\ \theta_i - x & , \text{ jika} x < \theta_i < x+1 \\ 0 & , \theta_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \phi_i = 0 \\ \phi_i - x & , \text{ jika} x < \phi_i < x+1 \\ 0 & , \phi_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i & , \text{ jika seseorang tidak meninggal dan withdraw} \\ \kappa_i - r_i & , \text{ jika seseorang withdraw} \\ \iota_i - r_i & , \text{ jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Tanggal Lahir	Y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	ι_i	κ_i	Exposure eksak
1 juli 1976	30,5	31,5	0	0	0,5	1	0	0	0,5
1 januari 1977	30	31	$30+x$	0	0	1	x	0	x
1 juli 1977	29,50	30,5	0	0	0	0,5	0	0	0,5
Total									$1+x$

$$\begin{aligned}
\hat{q_{30}} &= 1-\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right)\\
0,424 &= 1-\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right)\\
\exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) &= 0,5796\\
-\frac{1}{1+x} &= \ln(0,5796)\\
\frac{1}{1+x} &= 0,545417\\
c &= 0,833459
\end{aligned}$$

selanjutnya merubah nilai x ke dalam bulanan, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{b}{12} &= 0,833459\\
b &= 10,001511\\
&\approx 10
\end{aligned}$$

Karena individu B lahir pada 1 januari 2015, maka individu B meninggal dunia sekitar 1 november 2015

Jawab. D.

26. Diketahui hasil dari regresi linier sebagai berikut:

t	Aktual (actual)	Penyesuaian (fitted)
1	74,0	75,0
2	69,0	70,6
3	72,0	70,9
4	74,0	74,0
5	65,0	66,0

Hitunglah estimasi koefisien korelasi deret lag 1 (lag 1 serial correlation coefficient) untuk residual, menggunakan statistik Durbin-Watson!

A. 0,1456

B. 0,1026

C. 0.082

D. -0,023

E. -0,071

Pembahasan:

t	Aktual (actual)	Penyesuaian (fitted)	$\hat{\varepsilon_t}$	$\hat{\varepsilon_t}^2$	$(\hat{\varepsilon_t} - \hat{\varepsilon_{t-1}})^2$
1	74,0	75,0	-1	1	0
2	69,0	70,6	-1,6	2,56	0,36
3	72,0	70,9	1,1	1,21	7,29
4	74,0	74,0	0	0	1,21
5	65,0	66,0	-1	1	1
Total			-2,5	5,77	9,86

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^{5} (\hat{\varepsilon_t} - \hat{\varepsilon_{t-1}})^2}{\sum_{t=1}^{5} \hat{\varepsilon_t}^2} \\ &= \frac{3,86}{5,77} \\ &= 1,708839 \end{aligned}$$

selanjutnya akan dihitung koefisien deret lag 1 untuk residual

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \frac{d}{2} \\ &= 1 - \frac{1,708839}{2} \\ &= 0,145581 \\ &\approx 0,1456 \end{aligned}$$

Jawab. A.

27. Diketahui probabilitas seseorang yang berumur 50 untuk hidup selama t tahun adalah

$${}_tp_{50} = e^{0,5(1-1,05^t)}$$

Hitunglah q_{80}

A. 0,06418

B. 0,10242

C. 0,12804

D. 0,18065

E. 0,21312

Pembahasan: $q_{80} = 1 - p_{80}$ jadi pertama kita cari p_{80}

$$
\begin{aligned}
p_{80} &= \frac{S(80+1)}{S(80)} \\
&= \left(\frac{S(50+31)}{S(50)} . \frac{S(50)}{S(50+30)}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{S(50+31)}{S(50)}\right)}{\frac{S(50+30)}{S(50)}} \\
&= \frac{{}_{31}p_{50}}{{}_{30}p_{50}} \\
&= \frac{\exp(0,5(1-1,05^{31}))}{\exp(0,5(1-1,05^{30}))} - 1 \\
&= 0,897584 \\
q_{80} &= 1 - p_{80} \\
&= 1 - 0,897584 \\
&= 0,102416
\end{aligned}
$$

Jawab. B.

28. Berdasarkan soal nomor 27, hitunglah μ_{80}

A. 0,0347

B. 0,0647

C. 0,0872

D. 0,1504

E. 0,2471

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\mu_{80} &= \frac{f(80)}{S(80)} \\
&= \frac{F(80)-F(79)}{S(80)} \\
&= \frac{F(80)-F(79)}{S(79)}\frac{S(79)}{S(80)} \\
&= \frac{S(79)-S(80)}{S(79)}\frac{S(79)}{S(80)} \\
&= \left(1-\frac{S(80)}{S(79)}\right)\left(\frac{S(79)}{S(80)}\right) \\
&= \frac{S(79)}{S(80)}-1 \\
&= \left(\frac{S(50+29)}{S(50)}.\frac{S(50)}{S(50+30)}\right)-1 \\
&= \frac{\left(\frac{S(50+29)}{S(50)}\right)}{\frac{S(50+30)}{S(50)}}-1 \\
&= \frac{{}_{29}p_{50}}{{}_{30}p_{50}}-1 \\
&= \frac{\exp(0,5(1-1,05^{29}))}{\exp(0,5(1-1,05^{30}))}-1 \\
&= 0,108384
\end{aligned}
$$

Jawab. Tidak ada jawaban yang memenuhi

29. Dalam sebuah studi kesehatan untuk n orang yang hidup pada waktu $t = 0$, diketahui tidak ada penambahan peserta. Terdapat 1 kematian pada waktu t_7, 2 kematian pada waktu ??8, dan 2 kematian pada waktu t_9. Dengan menggunakan estimasi product limit dari $S(t)$, diperoleh $\hat{S}(t_7) = 0,90$, $\hat{S}(t_8) = 0,75$, $\hat{S}(t_9) = 0,50$. Hitunglah banyaknya orang yang melakukan terminasi antara t_8 dan t_9.

    A. 2

    B. 3

    C. 4

    D. 5

    E. 6

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(t_8) &= \hat{S}(t_7)\left(\frac{r_8 - d_8}{r_8}\right) \\
0,75 &= 0,9\left(\frac{r_8 - d_8}{r_8}\right) \\
0,75r_8 - 0,9r_8 &= -1,8 \\
-0,15r_8 &= -1,8 \\
r_8 &= 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(t_9) &= \hat{S}(t_8)\left(\frac{r_9 - d_9}{r_9}\right) \\
0,5 &= 0,75\left(\frac{10 - \omega - 2}{10 - \omega}\right) \\
0,5(10 - \omega) &= 36 - 0,75\omega \\
\omega &= \frac{6 - 5}{0,75 - 0,5} \\
\omega &= 4
\end{aligned}
$$

sehingga banyaknya orang yang terminasi adalah 4

Jawab. C.

30. Manakah diantara fungsi di bawah ini yang bukan merupakan probability density function (PDF):

   i. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$, untuk $x \geq 0$

   ii. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, untuk $x \geq 0$

   iii. $f(x) = (2x - 1)e^{-x}$, untuk $x \geq 0$

   A. i saja

   B. ii saja

   C. iii saja

   D. i dan iii

   E. ii dan iii

Pembahasan:

i. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^3}$, untuk $x \geq 0$ jelas $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in R$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} dx &= \int_1^\infty \frac{1}{u^3} du \\ &= -\frac{1}{2u^2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(**Tidak memenuhi syarat pdf**)

ii. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, untuk $x \geq 0$ jelas $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in R$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx &= \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du \\ &= \frac{-1}{u}\Big|_1^\infty \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

(**memenuhi syarat pdf**)

iii. $f(x) = (2x-1)^{-x}$, untuk $x \geq 0$ jelas $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in R$

$$\int_0^\infty (2x-1)e^{-x} dx = \int_0^{-\infty} e^u (2u+1) du$$

misal $u = -x$ maka $du = -dx$

$$\begin{aligned} &= \int_1^0 (2\ln(v)+1) dv \quad \text{misal } v = e^u \text{ maka } dv = e^u du \\ &= 2\int_1^0 \ln(v) dv + \int_1^0 1 dv \end{aligned}$$

nilai $\int_1^0 \ln(v) dv$ tidak bisa ditentukan

(**Tidak memenuhi syarat pdf**)

Jawab. D.

5 A50 Periode November 2016

1. Misalkan X adalah variabel acak untuk umur pada saat kematian dengan

$$\mu_x = \frac{1}{2(100-x)}, \quad \text{untuk} \quad 0 \leq x \leq 100$$

   Hitunglah ${}_{20}p_{36}$

   A. 0,542

   B. 0,633

   C. 0,683

   D. 0,781

   E. 0,829

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_nP_x &= \exp(-\int_x^{x+n} \mu_x \; dx) \\ {}_{20}P_{36} &= \exp\left(-\int_{36}^{56} \frac{1}{2(100-x)} \; dx\right) = 0,829 \end{aligned}$$

   Jawab: E.

2. Jika diketahui:

   a. 100 orang yang diamati berumur x

   b. 60 orang peserta baru masuk dalam pengamatan pada umur $x+s,\ \ 0 < s < 1$

   c. Terdapat 4 kematian dalam interval $(x, x+1]$

   d. Dengan menggunakan metode actuarial exposure diperoleh $q_x \hat{=} 1/35$

   Tentukan s

   A. 1/5

   B. 3/10

   C. 1/3

D. 2/3

E. 7/10

Pembahasan:
Diketahui :

a) 100 orang yang diamati berumur x

b) 60 orang baru masuk pada umur $x+s$

c) terdapat 4 kematian dalam interval $(x, x+1]$

Akan ditentukan s, sehingga :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_x &= \frac{d_j}{\varepsilon_j} \\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{35} &= \frac{4}{100+60(1-s)} \\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{35} &= \frac{4}{160-60s} \\
\Leftrightarrow \quad 160-60s &= 140 \\
\Leftrightarrow \quad 60s &= 160-140 \\
\Leftrightarrow \quad s &= \frac{20}{60} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Jawab: C.

3. Diketahui $\mu_x = 0,005$ untuk semua umur $x > 0$. Probabilitas bahwa seseorang berumur 30 tahun akan tetap hidup untuk 10 tahun berikutnya adalah A. Setelah itu, orang tersebut akan tetap hidup untuk 10 tahun berikutnya lagi, dengan probabilitas sebesar B. Berapakah nilai A/B?

A. 1,00

B. 0,80

C. 0,75

D. 0,50

E. 0,30

Pembahasan:
Diketahui :

- $\mu_x = 0,005$
- ${}_{10}P_{30} = A$

- ${}_{10}P_{40} = B$

Akan ditentukan nilai A dan B dari hasil yang diketahui melalui persamaan :

$$ {}_{t}P_{x} = \exp(-\int_{x}^{x+t} \mu_x \ dx) $$

sehingga diperoleh :

$$ \begin{aligned} {}_{10}P_{30} &= \exp(-\int_{30}^{40} 0,005 \ dx) = 0,606531 \\ {}_{10}P_{40} &= \exp(-\int_{40}^{50} 0,005 \ dx) = 0,606531 \\ \frac{A}{B} &= 1 \end{aligned} $$

Jawab: A.

4. Jika diketahui *force of mortality* adalah $\mu_x^{(d)} = \frac{4}{5(100-x)}$ dan *force of withdrawal* adalah $\mu_x^{(w)} = \frac{6}{5(100-x)}$, hitunglah *conditional density function* untuk kematian seseorang pada umur $70+t$, jika orang tersebut hidup pada umur 70.

A. $\frac{30-t}{600}$

B. $\frac{30-t}{1200}$

C. $\frac{30-t}{1125}$

D. $\frac{70-t}{1200}$

E. $\frac{70-t}{1800}$

Pembahasan:
Diketahui:

$$ \begin{aligned} \mu_x^{(d)} &= \frac{4}{5(100-x)} \\ \mu_x^{(w)} &= \frac{6}{5(100-x)} \end{aligned} $$

- Kondisonal orang tersebut hidup pada umur 70

sehingga :

$$ \begin{aligned} \mu_x^{(\tau)} &= \mu_x^{(w)} + \mu_x^{(d)} \\ &= \frac{4}{5(100-x)} + \frac{6}{5(100-x)} \\ &= \frac{10}{5(100-x)} \end{aligned} $$

selanjutnya

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x^{(\tau)} &= \exp\left(-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(y)\ dy\right) = \frac{(100-t)^2}{10000} \\
S(70) &= {}_{70}P_0 = \frac{9}{100} \\
f(t,j) &= \frac{(100-t)^2}{10000} \times \frac{4}{5(100-t)} = \frac{4(100-t)}{50000}
\end{aligned}
$$

maka conditional density untuk kasus di atas adalah :

$$
\begin{aligned}
\text{conditional density} &= = \frac{f(t,j)}{S(x)} \\
&= \frac{{}_t p_{70}^{(\tau)}\, \mu_{70}^{(d)}}{S(70)} \\
&= \frac{\frac{4(100-(70+t))}{50000}}{\frac{9}{100}} \\
&= \frac{30-t}{1125}
\end{aligned}
$$

Jawab: C.

5. Dalam sebuah studi menggunakan pendekatan estimasi *moment*, diperoleh data jumlah kematian dalam interval $(x, x+1]$, berdasarkan besaran *exposure* yang diberikan sebagai berikut:

Selang	Jumlah Kematian	Exposure
$(0,1]$	12	1100
$(1,2]$	9	1220
$(2,3]$	7	1365
$(3,4]$	5	1522
$(4,5]$	4	1784

Hitunglah $\hat{S}(5)$

A. 0,794

B. 0,832

C. 0,896

D. 0,934

E. 0,971

Pembahasan:

Diketahui bahwa:

i	n'_i	$\hat{q}_i$	p_i
0	1100	$\frac{12}{1100}$	$\frac{1088}{1100}$
1	1220	$\frac{9}{1220}$	$\frac{1211}{1220}$
2	1365	$\frac{7}{1365}$	$\frac{1358}{1365}$
3	1522	$\frac{5}{1522}$	$\frac{1517}{1522}$
4	1784	$\frac{4}{1784}$	$\frac{1780}{1784}$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{S}(5) &= p_0 \times p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \\ &= \frac{1088}{1100} \times \frac{1211}{1220} \times \frac{1358}{1365} \times \frac{1517}{1522} \times \frac{1780}{1784} \\ &= 0.9713678424 \\ &\approx 0.971\end{aligned}$$

Jawab : E.

6. Diantara fungsi berikut ini, manakah yang valid sebagai force mortality

   (i) $\mu(x) = BC^x, B > 0, 0 < C < 1, x \geq 0$

   (ii) $\mu(x) = B(x+1)^{-\frac{1}{2}}, B > 0, x \geq 0$

   (iii) $\mu(x) = k(x+1)^n, n > 0, k > 0, x \geq 0$

   A. (i) saja

   B. (ii) saja

   C. (iii) saja

   D. (i) dan (ii)

   E. (ii) dan (iii)

   Pembahasan:

   Berdasarkan persamaan (i) jelas bahwa untuk $x \geq 0$ maka $\mu(x) \geq 0$ sehingga (i) benar

   Jawab: A.

7. Pada sebuah model *double decrement*, diperoleh informasi sebagai berikut:

   - $l_x^{(T)} = 100$
   - $l_{x+3}^{(T)} = 60$

- ${}_{3}q_x^{(1)} = 0,04$
- ${}_{2|}q_x^{(2)} = 0,06$

Hitunglah ${}_{2}q_x^{(2)}$

A. 0,30

B. 0,32

C. 0,35

D. 0,38

E. 0,40

Pembahasan:

Diketahui :

- $l_x^{(T)} = 100$
- $l_{x+3}^{(T)} = 60$
- ${}_{3}q_x^{(1)} = 0,04$
- ${}_{2|}q_x^{(2)} = 0,06$

sehingga :

$$
\begin{aligned}
& {}_tq_x^{(1)} && = \frac{d_x^{(j)} + d_{x+1}^{(j)} + ... + d_{x+t-1}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} \\
& {}_3q_x^{(1)} && = \frac{d_x^{(j)} + d_{x+1}^{(j)} + d_{x+2}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} \\
\Leftrightarrow \quad & 0,04 && = \frac{d_x^{(j)} + d_{x+1}^{(j)} + d_{x+2}^{(j)}}{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 4 && = d_x^{(j)} + d_{x+1}^{(j)} + d_{x+2}^{(j)} \quad (*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& {}_{2|}q_x^{(2)} && = \frac{d_{x+2}^{(2)}}{l_x^{(\tau)}} \\
\Leftrightarrow \quad & 0,06 && = \frac{d_{x+2}^{(2)}}{100} \\
\Leftrightarrow \quad & 6 && = d_{x+2}^{(2)} \quad (**)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& l_{x+3}^{(\tau)} && = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)} - d_{x+1}^{(1)} - d_{x+1}^{(2)} - d_{x+2}^{(1)} - d_{x+2}^{(2)} \\
\Leftrightarrow \quad & l_{x+3}^{(\tau)} && = l_x^{(\tau)} - (d_x^{(1)} + d_{x+1}^{(1)} + d_{x+2}^{(1)}) - (d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)}) - d_{x+2}^{(2)} \\
\Leftrightarrow \quad & d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)} && = 100 - 4 - 6 - 60 \\
\Leftrightarrow \quad & d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)} && = 30 \quad (***)
\end{aligned}
$$

diperoleh:

$$
{}_2q_2^{(2)} \quad = \quad \frac{d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{30}{100} = 0,3
$$

Jawab: A.

8. Diketahui force of mortality sebagai berikut:

$$
\mu(x) \quad = \quad \begin{cases} 0,01 & , \quad \text{untuk } \ 0 < x \leq 30 \\ 0,02 & , \quad \text{untuk } \ x > 30 \end{cases}
$$

Hitunglah ${}_{20}P_{20}$

A. 0,050

B. 0,238

C. 0,586

D. 0,741

E. 0,867

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_nP_x &= \exp(-\int_x^{x+n} \mu_x \ dx) \\
{}_{20}P_{20} &= \exp\left(-\int_{20}^{40} \mu_x \ dx\right) \\
&= \exp\left(-\left(\int_{20}^{30} 0,01 \ dx + \int_{20}^{30} 0,02 \quad dx\right)\right) \\
&= 0,74082 \\
&= 0,741
\end{aligned}$$

Jawab: D.

9. Jika diasumsikan *force of mortality* adalah sebagai berikut:

   $\mu_x = (1+x)^{-1}$, untuk $x > 0$

   Berapakah nilai ${}_tq_{20}$

   A. $\frac{2t}{20+t}$

   B. $\frac{t}{20+t}$

   C. $\frac{20}{20+t}$

   D. $\frac{t}{21+t}$

   E. $\frac{21}{21+t}$

   Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_np_x &= \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_x \ dx\right) \\
{}_tp_{20} &= \exp\left(-\int_t^{20+t} \frac{1}{1+x} \ dx\right) = \frac{21}{t+21} \\
{}_tq_{20} &= 1 - {}_tp_{20} = 1 - \frac{21}{t+21} \\
&= \frac{t}{21+t}
\end{aligned}$$

   Jawab: D.

10. Sebuah studi mortalita dilakukan atas pengamatan terhadap 50 peserta dimulai dari waktu 0. Diketahui:

Waktu (t)	Jumlah Kematian (d_t)	Jumlah yang disensor (c_t)
15	4	0
17	0	2
25	3	0
30	0	c_{30}
32	8	0
40	3	0

$\hat{S}(35)$ adalah estimasi product limit dari $S(35)$

$\hat{V}[\hat{S}(35)]$ adalah estimasi variansi dari $\hat{S}(35)$ menggunakan formula Greenwood.

$\frac{\hat{V}[\hat{S}(35)]}{[\hat{S}(35)]^2} = 0,012452$

Hitunglah c_{30}, jumlah yang disensor pada waktu $t = 30$.

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 10

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
& \hat{V}[\hat{S}(35)] && = [\hat{S}(35)]^2 \times \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) \\
\Leftrightarrow \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) && = \frac{\hat{V}[\hat{S}(35)]}{[\hat{S}(35)]^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4}{50(46)} + \frac{3}{44(41)} + \frac{8}{(41-c)(33-c)} && = 0,012452 \\
\Leftrightarrow \quad & 1353 - 74c + c^2 && = 884 \\
\Leftrightarrow \quad & 469 - 74c + c^2 && = 0
\end{aligned}$$

sehingga

$$c = \frac{74 - \sqrt{74c^2 - 4(1)(469)}}{2(1)} = 7$$

dan

$$c = \frac{74 + \sqrt{74c^2 - 4(1)(469)}}{2(1)} = 67$$

sebab hanya ada 50 peserta sehingga $c = 7$

Jawab. B.

11. Dari studi mortalita yang diobservasi pada tahun kalender 2007, diperoleh data sebagai berikut:

Individu	Tanggal Lahir
A	1 Juli 1976
B	1 Januari 1977
C	1 Juli 1977

Dalam periode observasi tersebut, hanya individu B yang meninggal dunia dan tidak ada individu yang melakukan *withdrawal*. Dengan menggunakan metode *exact exposure* (asumsi *force of mortality* adalah konstan) diperoleh $\hat{q}_{30} = 0,451$.

Pada tanggal berapa individu B meninggal dunia? (cari tanggal yang terdekat)

A. 1 Agustus 2007

B. 1 September 2007

C. 1 Oktober 2007

D. 1 November 2007

E. 1 Desember 2007

Pembahasan:
Misalkan:
y_i= tanggal awal pengamatan-tanggal lahir
z_i=tanggal akhir pengamatan-tanggal lahir
θ_i=tanggal meninggal-tanggal lahir
ϕ_i=tanggal withdraw-tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } y_i \leq x \\ y_i - x & , \text{ jika } x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x & , \text{ jika } x < z_i < x+1 \\ 1 & , \text{ jika } z_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\iota_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \theta_i = 0 \\ \theta_i - x & , \text{ jika } x < \theta_i < x+1 \\ 0 & , \theta_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \phi_i = 0 \\ \phi_i - x & , \text{ jika} x < \phi_i < x+1 \\ 0 & , \phi_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i & , \text{ jika seseorang tidak meninggal dan withdraw} \\ \kappa_i - r_i & , \text{ jika seseorang withdraw} \\ \iota_i - r_i & , \text{ jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Tanggal Lahir	Y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	ι_i	κ_i	Exposure eksak
1 Jul 1976	30.5	31.5	0	0	0.5	1	0	0	0.5
1 Jan 1977	30	31	$30+x$	0	0	1	x	0	x
1 Jul 1977	29.50	30.5	0	0	0	0.5	0	0	0.5
Total									$1+x$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{30} &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) \\ \Leftrightarrow \quad 0,451 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{1+x}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \exp\left(-\tfrac{1}{1+x}\right) &= 0,549 \\ \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{1+x} &= \ln(0,549) \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{1+x} &= 0,59966 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 0,66762 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \frac{b}{12} &= 0,66762 \\ \Leftrightarrow \quad b &= 8,01145 \end{aligned}$$

Sehingga, jika $30+0.0$ dimulai 1 januari 2007 (bulan ke-1) maka individu B meninggal dunia sekita tanggal 1 September 2007

Jawab. B.

12. Anda mencocokkan model berikut dalam empat pengamatan:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Diberikan data sebagai berikut:

i	X_{2i}	X_{3i}
1	-3	-1
2	-1	3
3	1	-3
4	3	1

Estimasi *least square* dari β_3, dinyatakan sebagai $\hat{\beta_3} = \sum_{i=1}^{4} w_i Y_i$

Tentukan nilai dari (w_1, w_2, w_3, w_4)

A. $(-\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{20})$

B. $(-\frac{1}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20})$

C. $(\frac{1}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, -\frac{1}{20})$

D. $(-\frac{3}{20}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20})$

E. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

Pembahasan:
Diketahui:

$$\hat{\beta_3} = \sum_{i=1}^{4} w_i Y_i = \sum_{i=1}^{4} \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right] Y_i$$

sehingga

$$w_i = \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right]$$

dimana

$$\bar{x_3} = \frac{-2 + 4 + (-4) + 2}{4} = 0$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (4)^2 + (-4)^2 + (2)^2 = 40$$

sehingga

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-2}{40} = \frac{-1}{20} \\ w_2 &= \frac{4}{40} = \frac{2}{20} \\ w_3 &= \frac{-4}{40} = \frac{-2}{20} \\ w_4 &= \frac{2}{40} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Jawab: A.

13. Misalkan X adalah variabel acak untuk umur pada saat kematian.

    Hitunglah ${}_{20}m_{25}$, jika diasumsikan X mengikuti hukum de Moivre (berdistribusi *uniform*) dengan $\omega = 100$.

    A. 0,012

    B. 0,013

    C. 0,014

    D. 0,015

    E. 0,016

    Pembahasan:
    Diketahui $\omega = 100$ maka

    $$\mu(x) = \frac{1}{100 - x}$$

    dan

    $$S(x) = \frac{100 - x}{100}$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
{}_{20}m_{25} &= \frac{\int_0^{20} S(25+t)\mu(25+t)dt}{\int_0^{20} S(25+t)dt} \\
&= \frac{\left(\int_0^{20} \frac{75-t}{100} \times \frac{1}{75-t}\right) dt}{\int_0^{20} \frac{75-t}{100} dt} \\
&= \frac{\int_0^{20} \frac{1}{100} dt}{\int_0^{20} \left(\frac{3}{4} - \frac{t}{100}\right) dt} \\
&= \frac{0,2}{13} \\
&= 0,015
\end{aligned}
$$

Jawab: D.

14. Diketahui model deret waktu sebagai berikut:

$$y_t = 0,8y_{t-1} + 1 + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$$

Juga diberikan:

- $y_T = 7,0$
- $\hat{\varepsilon}_T = 0,4$

Dengan mengasumsikan *error* di periode yang akan datang adalah nol, hitunglah perkiraan 2 periode, yaitu $\hat{y}_T(2)$

A. 6,00

B. 6,12

C. 6,40

D. 6,67

E. 6,71

Pembahasan:

Diketahui $y_t = 0,8y_{t-1} + 1 + \varepsilon_t - 0,5\varepsilon_{t-1}$ adalah ARIMA(1,0,1) atau ARMA(1,1) dengan general form $y_t = \phi y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

$y_T = 0,7$ dan $\hat{\varepsilon_T} = 0,4$ sehingga

$$
\begin{aligned}
\hat{y_T}(2) &= \phi^2 y_T + (\phi+1)\delta - \phi_1\theta_1\hat{\varepsilon}_T \\
&= (0,8)^2(7) + (0,8+1)(1) - (0,8)(0,5)(0,4) \\
&= 6,12
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

15. Dalam sebuah studi kesehatan untuk n orang yang hidup pada waktu $t = 0$, diketahui tidak ada penambahan peserta. Terdapat 2 kematian pada waktu t_5, 2 kematian pada waktu t_6, dan 1 kematian pada waktu t_7. Dengan menggunakan estimasi product limit dari $S(t)$, diperoleh $\hat{S}(t_5) = 0,90$, $\hat{S}(t_6) = 0,72$, $\hat{S}(t_7) = 0,48$. Hitunglah banyaknya orang yang melakukan terminasi antara t_6 dan t_7.

    A. 2

    B. 3

    C. 4

    D. 5

    E. 6

    Pembahasan:
    Diketahui bahwa:

    - n orang hidup pada waktu $t = 0$
    - Tidak terdapat penambahan peserta.
    - Terdapat 2 kematian yang terjadi pada waktu t_5, 2 kematian pada t_6, dan 1 kematian pada t_7.
    - Dengan menggunakan estimasi product limit dari $S(t)$, diperoleh $\hat{S}(t_5) = 0,90$, $\hat{S}(t_6) = 0,72$, $\hat{S}(t_7) = 0,48$.

    Formula yang akan digunakan dalam soal ini adalah:

    $$\hat{S}(t_k) = \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{r_j - d_j}{r_j} \right)$$

    Nilai tersebut berlaku untuk $t_{k-1} \leq t \leq t_k$.

    Dengan demikian diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(t_6) &= \hat{S}(t_5)\left(\frac{r_6 - d_6}{r_6}\right) \\
0,72 &= (0,9)\left(\frac{r_6 - 2}{r_6}\right) \\
0,72r_6 - 0,9r_6 &= -1,8 \\
-0,18r_6 &= -1,8 \\
r_6 &= 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(t_7) &= \hat{S}(t_6)\left(\frac{r_7 - d_7}{r_7}\right) \\
0,48 &= (0,72)\left(\frac{8 - \omega - 1}{8 - \omega}\right) \\
0,48(8 - \omega) &= 0,72(7 - \omega) \\
3,84 - 0,48\omega &= 5,04 - 0,72\omega \\
\omega &= \frac{5,04 - 3,84}{0,72 - 0,48} = 5
\end{aligned}
$$

Jadi, banyaknya orang yang melakukan terminasi antara t_6 dan t_7 adalah 5.

Jawab: D.

16. Jika diketahui ${q_x}'^{(d)} = 0,3$ dan ${q_x}'^{(w)} = 0,5$, hitunglah ${q_x}^{(\tau)}$

A. 0,25

B. 0,35

C. 0,45

D. 0,55

E. 0,65

Pembahasan:
Diketahui bahwa: ${q_x}'^{(d)} = 0,3$ dan ${q_x}'^{(w)} = 0,5$.

Formula yang akan digunakan dalam soal ini adalah: $p_x^{(\tau)} = p_x'^{(d)} \times p_x'^{(w)}$.

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} p_x^{(\tau)} &= p_x^{\prime(d)} \times p_x^{\prime(w)} \\ &= (1 - {q_x}^{\prime(d)})(1 - {q_x}^{\prime(w)}) \\ &= (1 - 0,3)(1 - 0,5) \\ &= 0,35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_x^{(\tau)} &= 1 - p_x^{(\tau)} \\ &= 1 - 0,35 \\ &= 0,65 \end{aligned}$$

Jawab : E.

17. Untuk selang estimasi $(x, x+2]$, diketahui data sebagai berikut:

	$s = 0$	$s = 1$
Jumlah orang yang hidup di umur $x + s$	200	170
Jumlah orang yang keluar di umur $x + s + 0,5$	20	22
Jumlah peserta baru di umur $x + s + 0,25$	40	32
Jumlah orang yang keluar di umur $x + s + 0,75$	20	28
Jumlah orang yang bertahan di umur $x + s + 1$	170	140

Dengan menggunakan metode *actuarial exposure*, hitunglah estimasi ${}_2q_x$, yaitu kemungkinan orang berumur x tahun yang akan meninggal dalam 2 tahun berikutnya.

A. 0,198

B. 0,200

C. 0,202

D. 0,204

E. 0,206

Pembahasan:

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x - (1-s).c_x + (1-r)k_x}$$

untuk $\hat{q}_x$

$$\hat{q}_x = \frac{30}{200 - 20(1-0,5) + 40(1-0,25) - 20(1-0,75)} = 0,139535$$

untuk $\hat{q}_{x+1}$

$$\hat{q}_x = \frac{30}{170 - 22(1-0,5) + 32(1-0,25) - 28(1-0,75)} = 0,068182$$

sehingga

$$\begin{aligned} {}_2\hat{q}_x &= 1 - p_x.p_{x+1} \\ &= 1 - (1-\hat{q}_x)(1-\hat{q}_{x+1}) \\ &= 1 - (1-0,139535)(1-0,068182) \\ &= 0,198203 \end{aligned}$$

Jawab: A.

18. Jika $\mu_{50+t}^{(d)}$ dan $\mu_{50+t}^{(w)}$ bernilai konstan pada $0 < t < 1$, hitunglah $q_{50}^{(d)}$ jika diketahui $q_{50}^{'(d)} = q_{50}^{'(w)} = 0,4$

A. 0,180

B. 0,215

C. 0,255

D. 0,285

E. 0,320

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
p_{50}^{(\tau)} &= p_{50}^{'(w)} . p_{50}^{'(d)} \\
&= \left(1 - q_{50}^{'(w)}\right)\left(1 - q_{50}^{'(d)}\right) \\
&= (1-0,4)(1-0,4) \\
&= 0,36 \\
q_{50}^{(\tau)} &= 1 - 0,36 = 0,64 \\
p_{50}^{'(d)} &= \left(p_{50}^{(\tau)}\right)^{p_{50}^{(d)}/q_{50}^{(\tau)}} \\
\Leftrightarrow \ln\left(p_{50}^{'(d)}\right) &= \frac{p_{50}^{(d)}}{q_{50}^{(\tau)}} \ln\left(p_{50}^{(\tau)}\right) \\
\Leftrightarrow p_{50}^{(d)} &= q_{50}^{(\tau)} \frac{\ln\left(p_{50}^{'(d)}\right)}{\ln\left(p_{50}^{(\tau)}\right)} \\
&= (0,64)\frac{\ln 0,6}{\ln 0,36} \\
&= 0,32
\end{aligned}
$$

Jawab. E.

19. Misalkan Anda melakukan *smoothing* deret waktu y_t menggunakan metode *exponential smoothing* 2-parameter dari *Holt*:

t	y_t	$\tilde{y}_t$	r_t
1995	120,50	117,50	12,00
1996	135,00	131,70	13,65
1997	147,70	146,29	14,36
1998	146,60	$\tilde{y}_{1998}$	r_{1998}

Hitunglah *forecast* 2-periode $\hat{y}_{2000}$ dengan terlebih dahulu melengkapi tabel di atas dengan deret *exponential* 2-parameter dari Holt.

A. Lebih kecil dari 166

B. Paling sedikit 166, tetapi lebih kecil dari 172

C. Paling sedikit 172, tetapi lebih kecil dari 176

D. Paling sedikit 176, tetapi lebih kecil dari 180

E. Paling sedikit 180

Pembahasan:

Mencari Nilai α dan γ

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{1996} &= \alpha y_{1996} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{1995} + r_{1995}) \\
\Leftrightarrow \quad 131,7 &= 135\alpha + (1-\alpha)(117.5 + 12) \\
\Leftrightarrow \quad 131,7 &= 135\alpha + 129,5 - 129,5\alpha \\
\Leftrightarrow \quad 5,5\alpha &= 2,2 \\
\Leftrightarrow \quad \alpha &= \frac{2,2}{5,5} = 0,4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{1996} &= \gamma(\tilde{y}_{1996} - \tilde{y}_{1995}) + (1-\gamma)r_{1995} \\
\Leftrightarrow \quad 13 &= \gamma(131,7 - 117,5) + (1-\gamma)12 \\
\Leftrightarrow \quad 13 &= 12 + 2,2\gamma \\
\Leftrightarrow \quad \gamma &= \frac{13-12}{2,2} = \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{1998} &= \alpha y_{1998} + (1-\alpha)(\tilde{y}_{1997} + r_{1997}) \\
&= (0,4)(146,6) + (1-0,4)(146,29 + 14,36) \\
&= 155,03
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
r_{1998} &= \gamma(\tilde{y}_{1998} - \tilde{y}_{1997}) + (1-\gamma)r_{1997} \\
&= \left(\frac{5}{11}\right)(155,03 - 146,6) + \left(1 - \frac{5}{11}\right)14,36 \\
&= 11,66
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{y}_{1998+2} &= \hat{y}_{1998} + 2r_{1998} \\
&= 155,13 + 2(11,66) \\
&= 178,359
\end{aligned}$$

Jawab. D.

20. Jika diketahui ${q_x}^{t(d)} = 0{,}2$ dan ${q_x}^{t(w)} = 0{,}4$, hitunglah ${q_x}^{(t)}$
    A. 0,08
    B. 0,32

C. 0,12

D. 0,92

E. 0,52

Pembahasan:
Diketahui :

$$
\begin{aligned}
q_x^{\prime(d)} &= 0{,}2 \\
q_x^{\prime(w)} &= 0{,}4
\end{aligned}
$$

Rumus yang digunakan :

$$
\begin{aligned}
q_x^{(d)} &= q_x^{\prime(d)}\Big(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(w)}\Big) \\
q_x^{(w)} &= q_x^{\prime(w)}\Big(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(d)}\Big) \\
q_x^{(\tau)} &= q_x^{(d)} + q_x^{(w)}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
q_x^{(d)} &= q_x^{\prime(d)}\Big(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(w)}\Big) \\
&= 0{,}2\Big(1 - \frac{0{,}4}{2}\Big) \\
&= 0{,}16
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_x^{(w)} &= q_x^{\prime(w)}\Big(1 - \frac{1}{2} q_x^{\prime(d)}\Big) \\
&= 0{,}4\Big(1 - \frac{0{,}2}{2}\Big) \\
&= 0{,}36
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_x^{(\tau)} &= q_x^{(d)} + q_x^{(w)} \\
&= 0{,}16 + 0{,}36 \\
&= 0{,}52
\end{aligned}
$$

Jawab : E.

21. Dalam sebuah populasi tertentu, suatu *cumulative hazard function* didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_x(t) = \begin{cases} 0,010 & , \quad 60 < t \leq 70 \\ 0,015 & , \quad 70 < t \leq 80 \\ 0,025 & , \quad t > 80 \end{cases}$$

Untuk seseorang dari populasi ini yang tepat berumur 65 tahun, hitunglah probabilitas bahwa orang tersebut akan meninggal dunia antara umur 80 dan 83 tahun.

A. 0,041

B. 0,059

C. 0,065

D. 0,068

E. 0,070

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_{15}p_{65} &= \exp\left(-\int_{65}^{80} \mu_x(y)dy\right) \\ &= \exp\left(-\int_{65}^{70} 0,01dy - \int_{70}^{80} 0,015dy\right) \\ &= 0,81873 \end{aligned}$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} {}_{3}p_{80} &= \exp\left(-\int_{80}^{83} \mu_x(y)dy\right) \\ &= \exp\left(-\int_{80}^{83} 0,025dy\right) \\ &= 0,927743 \end{aligned}$$

maka ${}_3q_{80} = 1 - {}_3p_{80} = 1 - 0,927743 = 0,072257$ sehingga

$${}_{15|3}q_{65} = {}_{15}p_{65}{}_{3}q_{80} = 0,059159$$

Jawab. B.

22. Berdasarkan soal nomor 21 di atas, hitunglah probabilitas bahwa orang tersebut akan meninggal dunia sebelum umur 75 tahun.

A. 0,078

B. 0,088

C. 0,095

D. 0,105

E. 0,118

Pembahasan:
Diketahui:

$$\mu_x(t) = \begin{cases} 0,010 & , \quad 60 < t \leq 70 \\ 0,015 & , \quad 70 < t \leq 80 \\ 0,025 & , \quad t > 80 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} {}_tP_x &= \exp(-\int_x^{x+t} \mu_x(y)\ dy) \\ &= \exp\left(-\int_{65}^{70} 0,01dy - \int_{70}^{75} 0,015dy\right) \\ &= 0,882497 \end{aligned}$$

maka

$${}_{75}q_{65} = 1 - {}_{75}p_{65} = 1 - 0,882497 = 0,117503 = 0,118$$

Jawab: E.

23. Diketahui hasil dari regresi linear sebagai berikut:

t	Aktual (*actual*)	Penyesuaian (*fitted*)
1	76.00	75.20
2	70.00	70.50
3	71.00	71.60
4	73.00	73.20
5	66.00	64.80

Hitunglah estimasi koefisien korelasi deret lag 1 (*lag 1 serial correlation coefficient*) untuk residual, menggunakan statistik Durbin-Watson!

A. -0,02

B. 0,05

C. 0,22

D. 0,30

E. 0,42

Pembahasan:

t	Aktual	Penyesuaian	$\hat{\varepsilon_t}$	$\hat{\varepsilon_t}^2$	$(\hat{\varepsilon_t} - \hat{\varepsilon_{t-1}})^2$
1	76	75,2	0,8	0,64	0
2	70	70,5	-0,5	0,25	1,69
3	71	71,6	-0,6	0,36	0,01
4	73	73,2	-0,2	0,04	0,16
5	66	64,8	1,2	1,44	1,96
Total			0,7	2,73	3,82

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon_t} - \hat{\varepsilon_{t-1}})^{2^2}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon_t}} = \frac{3,82}{2,73} = 1,4 \\
p &= 1 - \frac{1,4}{2} = 0,3
\end{aligned}
$$

Jawab. D.

24. Diketahui informasi sebagai berikut:

(i.) $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$
$Var(\varepsilon_i) = \left(\frac{x_i}{2}\right)^2$

(ii.)

i	x_i	y_i
1	1	6
2	2	4
3	3	2
4	4	-2

Tentukan nilai estimasi *weighted least square* dari β

A. 1,35

B. 1,88

C. 1,96

D. 2,04

E. 2,35

Pembahasan:
Akan ditentukan nilai estimasi *weighted least square* dari β. Apabila $w_i = \dfrac{1}{\sigma^2} = \dfrac{1}{Var(\varepsilon_i)}$

i	x_i	y_i	$Var(\varepsilon_i)$	w_i	$w_i x_i y_i$	x_i^2	$w_i x_i^2$
1	1	6	0,25	4	24	1	4
2	2	4	1	1	8	4	4
3	3	2	2,25	0,444444	2,666667	9	4
4	4	-2	4	0,25	-2	16	4
Total	10	10	7,5	5,694444	32,66667	30	16

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2} = \frac{32,667}{16} = 2,041$$

Jawab: D.

25. Untuk sebuah deret waktu y_t, diketahui:

t	y_t	$y_t - \bar{y}$
1	960	-15
2	1030	22
3	880	-10
4	1020	14
5	975	-8

Hitunglah estimasi fungsi autokorelasi parsial (*partial autocorrelation*) pada *time displacement* $k = 2$ (dibulatkan 2 desimal)

A. -0,14

B. -0,63

C. 0,22

D. 0,28

E. 0,36

Pembahasan:

Autocorellation

$$\begin{aligned}
r_k &= \frac{\sum_{i=1}^{n-k}(y_t-\bar{y})(y_{i+k}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2} \\
r_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{4}(y_t-\bar{y})(y_{i+k}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(y_t-\bar{y})^2} \\
&= \frac{(-15)(22)+(22)(-10)+(-10)(14)+(14)(-8)}{(-15)^2+(22)^2+(-10)^2+(14)^2+(-8)^2} \\
&= -0,75023 \\
r_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{4}(y_t-\bar{y})(y_{i+k}-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(y_t-\bar{y})^2} \\
&= \frac{(-15)(-10)+(22)(14)+(-10)(-8)}{(-15)^2+(22)^2+(-10)^2+(14)^2+(-8)^2} \\
&= 0,503274
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}_{22} &= \frac{(0,503274)-(-0,75023)^2}{1-(-0,75023)^2} \\
&= -0,13628 \\
&= -0,14
\end{aligned}$$

Jawab.A.

26. Pada sebuah model *double decrement*, diketahui:

    a) Dalam tabel decrement tunggal yang diasosiasikan dengan penyebab (1), $q'^{(1)}_{40} = 0,100$ dan berdistribusi *uniform* dalam suatu tahun.

    b) Dalam tabel *decrement* tunggal yang diasosiasikan dengan penyebab (2), $q'^{(2)}_{40} = 0,125$ dan semua decrement terjadi pada saat $t = 0,7$.

    Hitunglah $q^{(2)}_{40}$

    A. 0,114

    B. 0,115

    C. 0,116

    D. 0,117

    E. 0,118

    Pembahasan:

Untuk Uniform

$$ {}_tq_x^{\prime(j)} = t q_x^{\prime(j)} $$

Lompatan discrete(discrete jump) pada waktu t

$$ {}_sq_x^{(i)} = \int_0^s \left[\prod_{j=1, j\neq 1}^{n} {}_tp_x^{\prime(j)} \right] \cdot {}_tp_x^{\prime(i)} \cdot \mu_{x+t}^{(i)} \, dt $$

Untuk penyebab 1, ${}_tq_{40}^{\prime(1)} = tq_{40}^{\prime(1)} = 0,1t$ untuk $0 \leq t \leq 1$
untuk penyebab 2, terdapat 1 lompatan sebesar 0,125 pada waktu $t = 0,7$

$$ \begin{aligned} q_{40}^{(2)} &= \int_0^1 \left[\prod_{j=1, j\neq 2}^{2} {}_tp_{40}^{\prime(j)} \right] \cdot {}_tp_{40}^{\prime(2)} \cdot \mu_{40+t}^{(2)} \, dt \\ &= \int_0^1 {}_tp_{40}^{\prime(1)} \cdot {}_tp_{40}^{\prime(2)} \cdot \mu_{40+t}^{(2)} \, dt \\ &= \left({}_{0,7}p_{40}^{\prime(1)} \right) \left(q_{40}^{\prime(2)} \right) \\ &= (1 - (0,1)(0,7))\,(0,125) \\ &= 0,11625 \end{aligned} $$

Jawab: C.

27. Diketahui:
    i. $\mu_x = F + e^{2x}, \;\; x \geq 0$
    ii. ${}_{0,4}p_0 = 0,45$

    Hitunglah nilai F (dibulatkan).

    A. 0,20
    B. 0,30
    C. 0,46
    D. 0,52
    E. 0,63

Pembahasan:

$$ {}_nP_x = \exp(-\int_x^{x+n} \mu_x \;\; dx) $$

selanjutnya

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\int_0^{0,4} F + e^{2x}\ dx\right) && = 0,45 \\
\Leftrightarrow\ & \exp(-0,4F - 0,6128) && = 0,45 \\
\Leftrightarrow\ & \ln(\exp(0,4F - 0,6128)) && = \ln(0,45) \\
\Leftrightarrow\ & -0,4F - 0,6128 && = -0,79851 \\
\Leftrightarrow\ & F && = 0,46427 \\
\Leftrightarrow\ & F && = 0,46
\end{aligned}$$

Jawab. C.

28. Untuk suatu model $ARMA(1,1)$ diberikan persamaan sebagai berikut:

$$y_t = 0,9y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1}$$

Hitunglah ρ_1

A. 0,62

B. 0,73

C. 0,81

D. 0,88

E. 0,92

Pembahasan:
Berdasarkan $y_t = 0,9y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1}$ diperoleh $\phi = 0,9$ dan $\theta = 0,4$ sehingga

$$\rho_1 = \frac{(1-(0,4)(0,9))((0,9)-(0,4))}{1-2(0,9)(0,4)+(0,4)^2}(0,9)^{1-1} = 0,727 = 0,73$$

Jawab: B.

29. Anda mencocokkan model *moving average* order pertama yang *invertible* ke dalam Deret Waktu. Koefisien *autocorrelation* dari sample lag 1 adalah $-0,40$. Hitunglah tebakan awal untuk θ, yaitu parameter *moving average*.

A. 0,3

B. 0,4

C. 0,5

D. 0,6

E. 0,7

Pembahasan:
Diketahui Autocorellation function untuk MA(q) yang invertible

$$\begin{aligned}
& \rho_h && = -\frac{\theta_h \sum_{j=1}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1+\sum_{j=1}^{q} \theta_j^2} \\
& \rho_1 && = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -0,4 && = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 0,4(1+\theta_1^2) && = \theta_1 \\
\Leftrightarrow \quad & 4(1+\theta_1^2) && = 10\theta_1 \\
\Leftrightarrow \quad & 4\theta_1^2 - 10\theta_1 + 4 && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (4\theta_1 - 2)(\theta_1 - 2) && = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \theta_1 = \tfrac{1}{2}\theta_1 && = 2
\end{aligned}$$

Jawab: C.

30. Untuk satu orang yang diamati dalam studi mortalita yang dilakukan dari tanggal 1 Januari 1991 sampai dengan 30 Juni 1993, diperoleh informasi sebagai berikut :

I.	Tanggal lahir	:	1 November 1960
II.	Tanggal dimulainya pengamatan	:	1 Februari 1991
III.	Tanggal kematian	:	1 Mei 1993

Dengan menggunakan metode *exact exposure*, diperoleh $E = e_{30} + e_{31} + e_{32}$

Dengan menggunakan metode *actuarial exposure*, diperoleh $A = e_{30} + e_{31} + e_{32}$

(catatan: e_x adalah *exposure* untuk umur x)

Hitunglah $E + A$ (dalam tahun)

A. 4,25

B. 4,50

C. 4,75

D. 5,00

E. 5,25

Pembahasan:
Misalkan:

y_i = tanggal awal pengamatan-tanggal lahir
z_i =tanggal akhir pengamatan-tanggal lahir
θ_i =tanggal meninggal-tanggal lahir
ϕ_i =tanggal withdraw-tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } y_i \leq x \\ y_i - x & , \text{ jika } x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x & , \text{ jika } x < z_i < x+1 \\ 1 & , \text{ jika } z_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\iota_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \theta_i = 0 \\ \theta_i - x & , \text{ jika } x < \theta_i < x+1 \\ 0 & , \theta_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \phi_i = 0 \\ \phi_i - x & , \text{ jika} x < \phi_i < x+1 \\ 0 & , \phi_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i & , \text{ jika seseorang tidak meninggal dan withdraw} \\ \kappa_i - r_i & , \text{ jika seseorang withdraw} \\ \iota_i - r_i & , \text{ jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{aktuaria} = \begin{cases} s_i - r_i & , \text{ jika seseorang tidak meninggal dan withdraw} \\ \kappa_i - r_i & , \text{ jika seseorang withdraw} \\ 1 - r_i & , \text{ jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Tanggal Lahir	Y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	ι_i	κ_i	Exposure eksak	Eksposure Aktuari
e_{30}	30,25	32,75	32,5		0	1	0		1	1
e_{31}	30,25	32,75	32,5		0	1	0		1	1
e_{32}	30,25	32,75	32,5		0	0,75	0,25		0,25	1
Total									2,25	3

Sehingga $E + A = 2,25 + 3 = 5,25$

Jawab. E.

6 A50 Periode Mei 2017

1. Jika diketahui fungsi survival dari seseorang yang baru lahir adalah sebagai berikut :

$$S_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{250} & , \text{ untuk } 0 \leq x \leq 40 \\ 1 - \frac{x}{100} & , \text{ untuk } 40 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

   Hitunglah probabilitas dari seseorang yang berumur 35 akan meninggal 20 tahun kemudian

   A. 0,15

   B. 0,16

   C. 0,17

   D. 0,18

   E. 0,19

   Pembahasan:
   Diketahui:

$$S_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{250} & , \text{ untuk } 0 \leq x \leq 40 \\ 1 - \frac{x}{100} & , \text{ untuk } 40 \leq x \leq 100 \end{cases}$$

   Rumus yang digunakan adalah:
   ${}_nP_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}$
   Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_{20}p_{35} &= \frac{S(55)}{S(35)} = \frac{1-(\frac{55}{100})^2}{1-\frac{35}{250}} = 0,811047 \\ {}_{20}q_{35} &= 1 - {}_{20}p_{35} = 1 - 0,811047 = 0,1889 = 0,19 \end{aligned}$$

   Jawab:E.0,19

2. Diketahui fungsi survival dari seseorang berumur 40 tahun adalah sebagai berikut:

$$S_{40}(x) = \begin{cases} 1-(0,02t)^2 & , \text{ untuk } 0 \leq t \leq 25 \\ 0.75e^{b(t-25)} & , \text{ untuk } 25 \geq t \end{cases}$$

Dari tiga nilai berikut,

(i) -0,2

(ii) 0

(iii) 0,2

nilai manakah yang menyebabkan fungsi survival menjadi tidak valid

A. -0,2 dan 0

B. 0 dan 0,2

C. -0,2

D. 0

E. 0,2

Pembahasan:
Diketahui :

$$S_{40}(x) = \begin{cases} 1-(0,02t)^2 & , \text{ untuk } 0 \leq t \leq 25 \\ 0.75e^{b(t-25)} & , \text{ untuk } 25 \geq t \end{cases}$$

Rumus yang digunakan adalah:
${}_nP_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_tP_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
{}_tP_{40} &= \frac{S(40+t)}{S(40)} \\
&= \frac{0.75e^{b(t-25)}}{1-(0,02(0))^2} \\
&= \frac{0.75e^{b(t-25)}}{1} \\
&= 0.75e^{b(t-25)}(*)
\end{aligned}
$$

berdasarkan (*) untuk $t \leq 25$, dengan menggunakan simulasi untuk setiap nilai b, diperoleh:

t	-0,2	0	0,2
25	0.75	0.75	0.75
26	0.614048065	0.75	0.916052069
27	0.502740035	0.75	1.118868523
28	0.411608727	0.75	1.3665891
29	0.336996723	0.75	1.669155696
30	0.275909581	0.75	2.038711371
31	0.225895659	0.75	2.490087692
32	0.184947723	0.75	3.041399975
33	0.151422388	0.75	3.714774318
34	0.123974166	0.75	4.537235598
35	0.101501462	0.75	5.541792074
36	0.083102369	0.75	6.768760125
37	0.068038465	0.75	8.267382285
38	0.055705184	0.75	10.09780353
39	0.045607547	0.75	12.33348508
40	0.037340301	0.75	15.06415269
41	0.030571653	0.75	18.39939765
42	0.025029952	0.75	22.47307504
43	0.020492792	0.75	27.44867583
44	0.016778079	0.75	33.52588837

Sehingga nilai yang valid untuk b adalah -0.2, sebab untuk b=0 nilai ${}_tp_{40}$ constant sedangkan untuk b=0.2 nilainya lebih dari 1. Secara valid, semakin berumur seseorang nilai ${}_np_{40}$ semakin rendah < 1, bukan konstan dan > 1. Sehingga nilai yang tidak valid adalah

Jawab:B. 0 dan 0,2

3. Dalam sebuah populasi yang di dalamnya terdapat laki-laki dan perempuan dengan jumlah yang sama pada saat kelahiran, diketahui informasi sebagai berikut.
   (i) Pria : $\mu_x^{pria} = 0,1$ untuk $x \geq 0$
   (ii) Wanita : $\mu_x^{wanita} = 0,06$ untuk $x \geq 0$

   Hitunglah nilai q_{60} untuk populasi ini

   A. 0,046
   B. 0,051
   C. 0,056
   D. 0,061
   E. 0,066

   Pembahasan:
   Diketahui

   (i) Pria : $\mu_x^{pria} = 0,1$ untuk $x \geq 0$
   (ii) Wanita : $\mu_x^{wanita} = 0,06$ untuk $x \geq 0$

   Rumus yang digunakan adalah:
   ${}_tp_x = exp(-\int_0^t \mu_x(s)ds)$
   Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\mu_x^{(w)}(s) &= 0,06 \\
S_0^w(t) &= {}_tp_x^{(w)} = exp(-\int_0^t 0,06ds) = exp(-0,06t) \\
\mu_x^{(p)}(s) &= 0,1 \\
S_0^p(t) &= {}_tp_x^{(p)} = exp(-\int_0^t 0,1ds) = exp(-0,1t)
\end{aligned}
$$

   Selanjutnya untuk semua populasi,

$$
\begin{aligned}
S_0(60) &= \frac{exp(-0,1(60)) + exp(-0,06(60))}{2} = 0,014901 \\
S_0(61) &= \frac{exp(-0,1(61)) + exp(-0,06(61))}{2} = 0,013988
\end{aligned}
$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} q_{60} &= 1 - \frac{S_0(61)}{S_0(60)} \\ &= 0,061307 \end{aligned}$$

Jawab: D. 0,061

4. Dalam suatu populasi yang pada awalnya terdapat 75% wanita dan 25% pria, diketahui:
   i. untuk wanita, *force of mortality* adalah konstan dan bernilai μ
   ii. untuk pria, *force of mortality* adalah kontan dan berniali $1,5\mu$
   iii. pada akhir tahun ke-20, populasi berubah menjadi 80%wanita dan 20% pria

   Hitunglah probabilitas wanita yang *survive* pada tahun ke-1.

   A. 0,972
   B. 0,976
   C. 0,980
   D. 0,984
   E. 0,988

   Pembahasan:
   Diketahui :
   Dalam suatu populasi yang pada awalnya terdapat 75% wanita dan 25% pria, diketahui:
   $\mu_x^w = \mu$
   $\mu_x^p = 1,5\mu$
   Pada akhir tahun ke-20, populasi berubah menjadi 80% wanita dan 20% pria

   Rumus yang digunakan adalah:
   $S_0(t) = exp(-\int_0^t \mu ds)$
   Proses :

$$\begin{aligned} S^w(t) &= exp(-\int_0^t \mu ds) = e^{-\mu t} \\ S^p(t) &= exp(-\int_0^t 1,5\mu ds) = e^{-1,5\mu t} \end{aligned}$$

Sehingga untuk $t = 20$

$$\begin{aligned} S^w(20) &= e^{(-20\mu)} \\ S^p(20) &= e^{(-30\mu)} \end{aligned}$$

misalkan
saat $t = 0$ tedapat X laki-laki dan $3X$ perempuan.
saat $t = 20$ tedapat $(X.e^{-30\mu})$ laki-laki dan $(3X.e^{-20\mu})$ perempuan.
Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{(X.e^{-30\mu})}{(3X.e^{-20\mu})} &= \frac{20}{80} \\ 80.e^{-30\mu} &= 60.e^{-20\mu} \\ e^{-10\mu} &= \frac{60}{80} \\ e^{-\mu} &= (\frac{60}{80})^{\frac{1}{10}} \\ e^{-\mu} &= 0,972 \end{aligned}$$

Sehingga probabilitas wanita survive pada tahun ke 1 adalah:
$S^w(1) = e^{-\mu} = 0,972$

Jawab: A. 0,972

5. Diketahui informasi sebagai berikut

   (i) μ_{x+t} adalah *force of mortality*

   (ii) $R = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}$

   (iii) $S = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+t} + k dt}$

   (iv) kmerupakan konstan sedemikian hingga $S = 0,75R$

   Tentukan ekspresi untuk k

   A. $ln(\frac{1-0,75q_x}{1-p_x})$

   B. $ln(\frac{1-0,75p_x}{1-p_x})$

   C. $ln(\frac{1-p_x}{1-0,75q_x})$

   D. $ln(\frac{1-q_x}{1-0,75q_x})$

   E. $ln(\frac{1-0,75q_x}{1-q_x})$

Pembahasan:
Diketahui:

(i) μ_{x+t} adalah *force of mortality*

(ii) $R = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}$

(iii) $S = 1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+t} + k dt}$

(iv) $S = 0,75R$

Rumus yang digunakan adalah:
${}_tp_x = exp(-\int_x^{x+t} \mu_x(y)dy)$
Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
S &= 0,75R \\
1 - (e^{-\int_0^t \mu_{x+t} + k dt}) &= 0,75(1 - e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}) \\
0,25 - (e^{-(\int_0^t \mu_{x+t} dt + \int_0^t k dt)}) &= -0,75(e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}) \\
0,25 - (\frac{e^{-(\int_0^t \mu_{x+t} dt)}}{e^{\int_0^t k dt}}) &= -0,75(e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt}) \\
0,25 - \frac{{}_tp_x}{e^{kt}} &= -0,75{}_tp_x \\
0,25e^{kt} -{}_t p_x &= -0,75{}_tp_x e^{kt} \\
0,25e^{kt} + 0,75{}_tp_x e^{kt} &= tp_x \\
e^{kt}(0,25 + 0,75{}_tp_x) &= {}_tp_x \\
kt + ln(0,25 + 0,75{}_tp_x) &= ln({}_tp_x) \\
k &= ln({}_tp_x) - ln(0,25 + 0,75{}_tp_x) \\
k &= ln(\frac{{}_tp_x}{(0,25 + 0,75{}_tp_x)})
\end{aligned}
$$

untuk $t = 1$,maka

$$
\begin{aligned}
k &= ln(\frac{p_x}{(0,25 + 0,75{}_tp_x)}) \\
k &= ln(\frac{1 - q_x}{(0,25 + 0,75{}_tp_x)}) \\
k &= ln(\frac{1 - q_x}{(0,25 + 0,75_t(1 - q_x))}) \\
k &= ln(\frac{1 - q_x}{1 - 0,75q_x})
\end{aligned}
$$

Jawab: D.$k = ln(\frac{1-q_x}{1-0{,}75q_x})$

6. Diantara fungsi berikut ini, manakah yang valid sebagai *force of mortality*?

   (i) $\mu(x) = BC^x, B > 0, 0 < C < 1, x \geq 0$

   (ii) $\mu(x) = B(x+1)^{-\frac{1}{2}}, B > 0, x \geq 0$

   (iii) $\mu(x) = k(x+1)^n, n > 0, k > 0, x \geq 0$

   A. i saja

   B. iisaja

   C. iii saja

   D. i dan ii saja

   E. ii dan iii saja

   Pembahasan:
   Diketahui :

   (i) $\mu(x) = BC^x, B > 0, 0 < C < 1, x \geq 0$

   (ii) $\mu(x) = B(x+1)^{-\frac{1}{2}}, B > 0, x \geq 0$

   (iii) $\mu(x) = k(x+1)^n, n > 0, k > 0, x \geq 0$

   Rumus yang digunakan adalah:
   $\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)}$, untuk $x \geq 0, \mu_x \geq 0$
   $S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t)dt}, S(0) = 1$ dan $S(\infty) = 0$

   Dengan demikian diperoleh :
   (i)$S(x) = e^{-\int_0^x BC^t dt} = e^{-\frac{BC^x - B}{ln(C)}}$
   untuk $x = 0, S(0) \neq 1$(tidak valid)

   (ii)$S(x) = e^{-\int_0^x B(t+1)^{-\frac{1}{2}} dt} = e^{-2B(x+1)^{\frac{1}{2}} + 2B}$
   untuk $x = 0, S(0) = 1$
   untuk $x = \infty, S(\infty) = 1$(valid)

   (iii)$S(x) = e^{-\int_0^x k(t+1)^n dt} = e^{-\frac{k(1+x)^{n+1} - k}{n+1}}$
   untuk $x = 0, S(0) = 1$
   untuk $x = \infty, S(\infty) = 1$(valid)

Sehingga yang valid adalah (ii) dan (iii)

Jawab: E. ii dan iii saja

7. Dalam suatu tabel double decrement, diberikan data sebagi berikut:

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
25	0,01	0,15
26	0,02	0,15

Bila diketahui $l_{26}^{(T)} = 8400$ hitunglah perubahan pada $d_{26}^{(1)}$jika $q_{25}^{(2)}$ berubah dari 0,15 menjadi 0,3

A. 20

B. 25

C. 30

D. 35

E. 40

Pembahasan:
Diketahui :

x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$
25	0,01	0,15
26	0,02	0,15

$l_{26}^{(T)} = 8400$
Rumus yang digunakan adalah:
${}_tq_x^{(j)} = \frac{{}_td_x^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}$
${}_tq_x^{(\tau)} = \sum_{j=1}^{m} q_x^{(j)}$
$q_x^{(\tau)} = \frac{l_x^{(\tau)} - l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}}$
Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
d_{26}^{(1)} &= l_{26}^{(\tau)}.q_{26}^{(1)} \\
&= 8400.(0,02) \\
&= 168
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} d_{26}^{(2)} &= l_{26}^{(\tau)}.q_{26}^{(2)} \\ &= 8400.(0,15) \\ &= 1260 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{25}^{(\tau)} &= q_{25}^{(1)}.q_{25}^{(2)} = 0,01+0,15 = 0,16 \\ q_{25}^{(\tau)} &= \frac{l_{25}^{(\tau)} - l_{26}^{(\tau)}}{l_{25}^{(\tau)}} \\ 0,16 &= \frac{l_{25}^{(\tau)} - 8400}{l_{25}^{(\tau)}} \\ l_{25}^{(\tau)} - 0,16 l_{25}^{(\tau)} &= 8400 \\ l_{25}^{(\tau)} &= \frac{8400}{0,84} \\ l_{25}^{(\tau)} &= 10000 \end{aligned}$$

bila $q_{25}^{(2)}$ menjadi 0,3

$$\begin{aligned} q_{25}^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^{m} q_{25}^{(j)} = 0,01+0,3 = 0,31 \\ q_{25}^{(\tau)} &= \frac{10000 - l_{26}^{(\tau)}}{10000} \\ 0,31 &= \frac{10000 - l_{26}^{(\tau)}}{10000} \\ l_{26}^{(\tau)} &= 6900 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{26}^{(1)} &= l_{26}^{(\tau)}.q_{26}^{(1)} \\ &= 6900(0,02) \\ &= 138 \end{aligned}$$

Selisih

$$168 - 138 = 30$$

Jawab: C.30

8. Pada sebuah model double decrement, diperoleh informasi sebagai berikut:

x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(1)}$
30	9,450	40
31	9,220	85
32	8,680	150
33	7,520	315
34	5,600	450

Hitunglah probabilitas bahwa seseorang yang berumur 30 tahun akan berkurang dalam 3 tahun karena decrement ke-2.

A. 0,165

B. 0,170

C. 0,175

D. 0,18

E. 0,185

Pembahasan:
Diketahui :

x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(1)}$
30	9,450	40
31	9,220	85
32	8,680	150
33	7,520	315
34	5,600	450

Rumus yang digunakan adalah:
untuk double decrement:
$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$
${}_nq_x^{(j)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} d_{x+i}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}$
Dengan demikian diperoleh:

Berdasarkan $l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$ diperoleh tabel

x	$l_x^{(T)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
30	9,450	40	190
31	9,220	85	455
32	8,680	150	1010
33	7,520	315	1605
34	5,600	450	

dengan menngunakan konsep jumlah barisan aritmatika

$$ {}_3q_{30}^{(j)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} d_{30+i}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} = \frac{190 + 455 + 1010}{9450} = 0,17513 $$

Jawab: C.0,175

9. Untuk sebuah tabel double decrement penyebab pertama adalah kematian dan penyebab kedua adalah withdrawal, diketahui informasi sebagi berikut

   (i) Kematian terdistribusi unfirofm sepanjang tahun dalam tabel single decrement

   (ii) Withdrwal terjadi di akhir tahun

   (iii) $l_x^{(\tau)} = 1000$

   (iv) $q_x^{(2)} = 0,5$

   (v) $d_x^{(1)} = 0,65 d_x^{(2)}$

   Hitunglah nilai $p_x^{'(2)}$ untuk populasi ini

   A. 0.26

   B. 0,33

   C. 0,4

   D. 0,47

   E. 0,54

   Pembahasan:
   Diketahui:

   (i) Kematian terdistribusi unfirofm sepanjang tahun dalam tabel single decrement

   (ii) Withdrwal terjadi di akhir tahun

   (iii) $l_x^{(\tau)} = 1000$

   (iv) $q_x^{(2)} = 0,5$

(v) $d_x^{(1)} = 0,65 d_x^{(2)}$

Rumus yang digunakan adalah:

${}_tq_x^{(j)} = \frac{\sum_{j=0}^{t-1} d_{x+j}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}}$

$l_{x+1}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)}$

$p_x^{\prime(2)} = (p_x^{(\tau)})^{\frac{q_x^{(2)}}{q_x^{(\tau)}}}$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} q_x^{(2)} &= \frac{\sum_{j=0}^{1-1} d_{x+j}^{(2)}}{l_x^{(\tau)}} \\ 0,5 &= \frac{d_x^{(2)}}{1000} \\ d_x^{(2)} &= 500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_x^{(1)} &= 0,65(d_x^{(2)}) \\ &= 0,65(500) \\ &= 325 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{x+1}^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)} \\ &= 1000 - 325 - 500 \\ &= 175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x^{(\tau)} &= \frac{l_{x+1}^{(\tau)}}{l_x^{(\tau)}} \\ &= \frac{175}{1000} \\ &= 0,175 \end{aligned}$$

$$p_x^{\prime(2)} = (p_x^{(\tau)})^{\frac{q_x^{(2)}}{q_x^{(\tau)}}} = (0,175)^{\frac{0,5}{1-0,75}} = 0,347724$$

Sehingga jawaban yang paling mendekati adalah 0,33

Jawab:B. 0,33

10. Untuk sebuah model double decrement:
    i. $q_x^{'(1)} = 0.3$
    ii. $q_x^{'(2)} = 0.4$
    iii. setiap decrement berdistribusi uniform sepanjang taun dalam tabel double decrement

    Berapakah nilai ${}_{0.3}q_x^{(1)}$

    A. 0,07

    B. 0,076

    C. 0,082

    D. 0,088

    E. 0,094

    Pembahasan:
    Diketahui:
    i. $q_x^{'(1)} = 0.3$
    ii. $q_x^{'(2)} = 0.4$
    iii. setiap decrement berdistribusi uniform sepanjang taun dalam tabel double decrement

    Rumus yang digunakan adalah:
    ${}_sq_x^{(1)} = q_x^{(1)}(s - \frac{q_x^{'(2)}}{q_x^{'(\tau)}}s^2), 0 \leq s \leq 1$

    Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
q_x^{(\tau)} &= 1 - p_x^{(\tau)} \\
&= 1 - ((1 - q_x^{'(1)})(1 - q_x^{'(2)})) \\
&= (1 - \frac{t}{65}).(1 - \frac{t}{30}) \\
&= 1 - ((0.7)(0.6)) \\
&= 0.58
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{0.3}q_x^{(1)} &= q_x^{'(1)}(0.3 - \frac{(q_x^{'(2)})}{q_x^{\tau}} 0,3^2) \\
&= 0,3(0.3 - \frac{0,4}{0,58} 0,3^2) \\
&= 0,071
\end{aligned}$$

Jawab: A.0,07

11. Berikut ini adalah tabel mortalitas select dan ultimate dengan periode seleksi 3 tahun

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	x+3
60	0,10	0.12	0,14	0,16	63
61	0,11	0.13	0,15	0,17	64
62	0,12	0.14	0,16	0,18	65
63	0,13	0,15	0,17	0,19	66
64	0,14	0,16	0,18	0,20	67

(i) Bapak budi adalah indicidu baru yang diamati pada tanggal 1 januari 2015

(ii) Umur bapak budi tanggal 1 Januari 2016 adalah 61

(iii) Padalah probablitas pada 1 januari 2016 bahwa Bapak Budi akan tetap hidup pada tanggal 1 Januari 2021

Hitunglah nilai P

A. $0 \leq P < 0,43$

B. $0,43 \leq P < 0,45$

C. $0,45 \leq P < 0,47$

D. $0,47 \leq P < 0,49$

E. $0,49 \leq P < 1$

Pembahasan: Diketahui:

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$q_{[x]+3}$	x+3
60	0,10	0.12	0,14	0,16	63
61	0,11	0.13	0,15	0,17	64
62	0,12	0.14	0,16	0,18	65
63	0,13	0,15	0,17	0,19	66
64	0,14	0,16	0,18	0,20	67

Rumus yang digunakan adalah:
${}_nP_{[x]+1} = P_{[x]+1}.P_{[x]+2}....P_{[x]+n}$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} p &= {}_5p_{[60]+1} \\ &= P_{[60]+1}.P_{[60]+2}.P_{[60]+3}.P_{[60]+4}.P_{[60]+5} \\ &= P_{61}.P_{62}.P_{63}.P_{64}.P_{65} \\ &= (1-q_{61})(1-q_{[62]})(1-q_{63})(1-q_{64})(1-q_{65}) \\ &= (1-0,12)(1-0,14)(1-0,16)(1-0,17)(1-0,18) \\ &= 0,432666 \\ &= 0,433 \end{aligned}$$

Jawab: B. $0,43 \leq p \leq 0,45$

12. Berikut ini adalah tabel mortalitas select dan ultimate dengan periode seleksi 2 tahun

$[x]$	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$
30	0,00422	0,00465	0,00620
31	0,00454	0,00598	0,00690
32	0,00473	0,00635	0,00790
33	0,00511	0,00680	0,00855
34	0,00550	0,00738	0,00938

Hitunglah nilai ${}_{2|}q_{[30]+1}$

A. 0,0053

B. 0,0058

C. 0,0063

D. 0,0068

E. 0,0073

Pembahasan:
Rumus yang digunakan adalah:
${}_{t|u}q_x =_t P_{x \cdot u} q_{x+t}$
${}_n P_{[x]+1} = P_{[x]+1} . P_{[x]+2} ... P_{[x]+n}$
Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_2P_{[30]+1} &= P_{[30]+1} . P_{[30]+2} \\ &= (1 - q_{[30]+1})(1 - q_{[30]+2}) \\ &= (1 - 0,00465)(1 - 0,0062) \\ &= 0,98917883 \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} {}_2P_{[30]+1} &= {}_2P_{[30]+1} . P_{[30]+1+2} \\ &= {}_2P_{[30]+1} . P_{[30]+3} \\ &= (0,98917883)(0,0069) \\ &= 0,0068 \end{aligned}$$

Jawab:D.0,0068

13. Untuk sebuah studi mortalita pada $(x, x+1]$, diperoleh informasi sebagai berikut:
    i. Pada awal pengamatan, 600 orang hidup pada umur x
    ii. 40 orang baru masuk pada umur $\frac{x+1}{4}$
    iii. 20 orang keluar dari pengamatan pada umur $\frac{x+1}{2}$
    iv. 10 orang keluar dari pengamatan pada umur $\frac{x+3}{4}$
    v. diakhir pengamatan, 500 orang mencapai umur $x+1$

Jika kematian terjadi pada umur $\frac{x+1}{2}$ dan force of mortality adalah konstan pada (x,x+1] , hitunglah estimator eksak dariq_x

A. 0,18

B. 0,21

C. 0,24

D. 0,27

E. 0,3

Pembahasan:
Diketahui :

(i.) Pada awal pengamatan, 600 orang hidup pada umur x

(ii.) 40 orang baru masuk pada umur $\frac{x+1}{4}$

(iii.) 20 orang keluar dari pengamatan pada umur $\frac{x+1}{2}$

(iv.) 10 orang keluar dari pengamatan pada umur $\frac{x+3}{4}$

(v.) diakhir pengamatan, 500 orang mencapai umur $x+1$

Rumus yang digunakan adalah:
$\hat{q}_x = 1 - exp(-\frac{d_x}{e_x})$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
\hat{q}_x &= 1 - exp(-\frac{d_x}{e_x}) \\
&= 1 - exp(-\frac{110}{600 + (1-0,25).40 - (1-0,5).20 - (1-0,75).10 - (1-0,5).110}) \\
&= 0,177 \\
&= 0,18
\end{aligned}$$

Jawab: .0,18

14. Sebuah regresi linier

$$Y_i = 1 + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Y	1	3	5
X	2	4	8

Hitunglah estimasi heteroscedasticity-consistent dari $Var[\hat{\beta}]$

A. 0,0011

B. 0,0015

C. 0,0017

D. 0,0019

E. 0,0021

Pembahasan: Terlebih dahulu akan ditentukan $S_{XX\varepsilon_i^2}$ dan S_{XX} dengan menggunakan beberapa formula berikut

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X - \bar{X})^2} \\
\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\
\varepsilon_i &= Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}\right) \\
Var[\hat{\beta}] &= \frac{S_{XX\varepsilon_i^2}}{(S_{XX})^2}
\end{aligned}$$

Dinyatakan dalam bentuk tabel menjadi :

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	S_{XX}	S_{XY}	$\bar{Y}_i$	ε_i	ε_i^2	$S_{XX\varepsilon_i^2}$
1	2	1	-2,667	-2	7,11	5,33	1,285714	-0,28571	0,081633	0,5805
2	4	3	-0,667	0	0,444	0	2,571429	0,428571	0,183673	0,0816
3	8	5	3,33	2	11,111	6,667	5,142857	-0,14286	0,020408	0,22676
Total	14	9	0	0	18,67	12	9	-6,7E-16	0,285714	0,889
Mean	4,67	3								

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X - \bar{X})^2} = 0,642857 \\
\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 0 \\
Var[\hat{\beta}] &= \frac{S_{XX\varepsilon_i^2}}{(S_{XX})^2} = 0,002551
\end{aligned}$$

Jawab. Anulir

15. Dalam suatu studi mortalitas atas n individu, diketahui informasi sebagai berikut

    (i) tidak ada data yang di sensor dan tidak ada 2 kematian terjadi pada saat yang sama.

    (ii) t_k waktu pada saat kematian ke -k

    (iii) Estimasi Nelson-Aalen atas fungsi kumulatif hazard adalah $\hat{\Lambda}(t_2) = \frac{59}{870}$

    Tentukan estimasi product limit Kaplan-meler dari fungsi survival pada saat t_9

A. 0.76

B. 0.70

C. 0,64

D. 0,58

E. 0,52

Pembahasan:
Diketahui

(i) tidak ada data yang di sensor dan tidak ada 2 kematian terjadi pada saat yang sama.

(ii) t_k waktu pada saat kematian ke -k

(iii) Estimasi Nelson-Aalen atas fungsi kumulatif hazard adalah $\hat{\Lambda}(t_2) = \frac{59}{870}$

Rumus yang digunakan adalah:
$\hat{S}(t) = \prod_{j=1}^{m}(\frac{r_j - d_j}{r_j})$ untuk $t_m \leq t < t_{m+1}$
$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-m+1}$,untuk $t_m \leq t < t_{m+1}$
Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
\hat{\Lambda}(t) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \\
\frac{59}{870} &= \frac{2n-1}{n^2-n} \\
59n^2 - 59n &= 1740n - 870 \\
59n^2 - 1799n + 870 &= 0 \\
n &= \frac{1799 + \sqrt{(-1799)^2 - 4(59)(870)}}{2(59)} = 30
\end{aligned}
$$

Selanjutnya

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(t) &= \prod_{j=1}^{m}(\frac{r_j - d_j}{r_j}) \\
&= \frac{29}{30} \cdot \frac{28}{29} \cdot \frac{27}{28} \cdots \frac{21}{22} \\
&= \frac{21}{30} \\
&= 0,7
\end{aligned}
$$

Jawab: C.7,3

16. Hitunglah ekspektasi hidup dari seseorang yang terdiagnosa LAS (state 2a menurut model panjer) bila diketahui informasi berikut ini:
    (i) $\mu_{21} = 0,5$
    (ii) variansi dari pengharapan hidup orang berada dalam state 2a adalah 7,97
    (iii) Ekspektasi pengharapan hidup untuk orang yang dalam stase 3 adalah 0.6

    A. 4,1
    B. 4,2
    C. 4,3
    D. 4,4
    E. 4,5

Pembahasan:
Diketahui:

(i) $\mu_{21} = 0,5$
(ii) variansi dari pengharapan hidup orang berada dalam state 2a adalah 7,97
(iii) Ekspektasi pengharapan hidup untuk orang yang dalam stase 3 adalah 0.6

Rumus yang digunakan adalah:
$E[T_j] = \frac{1}{\mu_j}$
$Var[T_j] = \frac{1}{\mu_j^2}$ Proses:

$$\begin{aligned}
E[T_3] &= \frac{1}{\mu_3} \\
\frac{1}{\mu_3} &= 0,36 \\
Var[T_{21}] &= \frac{1}{\mu_{2a}^2} + \frac{1}{\mu_{2b}^2} + \frac{1}{\mu_3^2} \\
7,97 &= \frac{1}{0,5^2} + \frac{1}{\mu_{2b}^2} + 0,36 \\
\frac{1}{\mu_{2b}^2} &= 7,97 - (\frac{1}{0,5^2} + 0,36) \\
\frac{1}{\mu_{2b}^2} &= 3,61 \\
\frac{1}{\mu_{2b}} &= 1,9
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} E[T_j] &= \frac{1}{\mu_{2a}} + \frac{1}{\mu_{2b}} + \frac{1}{\mu_3} \\ &= (\frac{1}{0,5} + 1,9 + 0,6) \\ &= 4,5 \end{aligned}$$

Jawab:E. 4,5

17. Dalam sebuah studi kesehatan untuk orang yang hidup pada waktu ke t=0 , diketahui tidak terdapat penambahan peserta. Terdapat 1 kematian pada waktut_6 , 2 kematian pada t_7 , dan 2 kematian pada t_8 . Dengan menggunakan estimasi procut limit dari $S(t)$ diperoleh $\hat{S}(t_6) = 0,6$, $\hat{S}(t_7) = 0,45$, $\hat{S}(t_7) = 0,27$

    Hitunglah banyaknya orang yang melakukan terminasi antara t_7 Dant_8 diketahui data sebagai berikut:

    A. 2

    B. 3

    C. 4

    D. 5

    E. 6

    Pembahasan:
    Diketahui :

    - orang hidup pada waktu t=0
    - Tidak terdapat penambahan peserta
    - 1 kematian pada waktu t_6 , 2 kematian pada t_7 , dan 2 kematian pada $t_8 t_7$
    - Dengan estimasi product limit $S(t)$

    $\hat{S}(t_6) = 0,6$, $\hat{S}(t_7) = 0,45$, $\hat{S}(t_7) = 0,27$

    Rumus yang digunakan adalah:

    $\hat{S}(t) = \prod_{j=1}^{m} (\frac{r_j - d_j}{r_j})$ untuk $t_m \leq t < t_{k-1}$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
\hat{S}(t_7) &= \hat{S}(t_6)(\frac{r_7 - d_7}{r_7}) \\
0,45 &= 0,6(\frac{r_7 - 2}{r_7}) \\
0,45r_7 - 0,6r_7 &= -1,2 \\
-0,15r_7 &= -1,2 \\
r_7 &= 8
\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\hat{S}(t_8) &= \hat{S}(t_7)(\frac{r_8 - d_8}{r_8}) \\
0,27 &= 0,45(\frac{8 - \omega - 2}{8 - \omega}) \\
0,27(8 - \omega) &= 2,7 - 0,45\omega \\
\omega &= \frac{2,7 - 2,16}{0,45 - 0,27} \\
\omega &= 3
\end{aligned}$$

Jawab: B.3

18. Berdasarkan 30 pengamatan, diperoleh model sebagai berikut:
$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$, dimana $R^2 = 0{,}81$
Hitunglah nilai F statistik yang digunakan untuk menguji hubungan linear (dibulatkan 2 desimal).

A. 57,55

B. 62,43

C. 32,00

D. 41,90

E. 26,78

Pembahasan:
Diketahui :

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon, \text{ dimana } R^2 = 0{,}81$$
$$n = 3$$
$$k \text{ (jumlah parameter)} = 3$$

Rumus yang digunakan adalah:

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}}$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} \\ &= \frac{\frac{0{,}81}{3-1}}{\frac{1-0{,}81}{30-3}} \\ &= 57{,}552631 \end{aligned}$$

Jawab : A. 57,55

19. Pada suatu studi data lengkap dengan ukuran sampel mula-mula adalah 10, diketahui estimasi product limit atas $S(12)$ sebagai $\hat{S}(12) = 0,6$. Hitunglah estimasi Nelson-Aalen atas $S(12)$

A. 0,62

B. 0,65

C. 0,68

D. 0,71

E. 0,74

Pembahasan:
Diketahui:
$n = 10$
$\hat{S}(12) = 0,6$
Rumus yang digunakan adalah:
$\hat{S}(t) = \prod_{j=1}^{m}(\frac{r_j - d_j}{r_j})$
$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-m+1}$
Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \hat{S}(12) &= \prod_{j=1}^{m}(\frac{r_j - 1}{r_j}) \\ 0,6 &= \frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} \\ &= \frac{1207}{2520} \end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} S(12) &= exp(-\frac{1207}{2520}) \\ &= exp(-\frac{1207}{2520}) \\ &= 0,619422 \end{aligned}$$

Jawab: A.0,62

20. Atas studi mortalita dua negara, diperoleh data sebagi berikut:

t	Negara A		Negara B	
	d_j	r_j	d_j	r_j
1	30	300	22	200
2	32	270	15	178
3	15	238	18	163
4	20	223	16	145

r_j adalah banyaknya resiko dalam periode (t_{i-1}, t_i)
d_j adalah banyaknya kematian dalam periode (t_{i-1}, t_i), asumsi terjadi pada t_i
$S^T(t)$ adalah estimasi peroduct limit dari$S(t)$ berdasarkan total semua data pengamatan.
$S^B(t) =$ adalah estimasi product limit dari $S(t)$ berdasarkan data pengamatan negara B

Hitunglah $|S^T(4) - S^B(4)|$

A. 0,05

B. 0,04

C. 0,03

D. 0,02

E. 0,01

Pembahasan:
Diketahui :

t	Negara A		Negara B	
	d_j	r_j	d_j	r_j
1	30	300	22	200
2	32	270	15	178
3	15	238	18	163
4	20	223	16	145

Rumus yang digunakan adalah:
Product limit $S(t) = \prod_{j=1}^{m}(\frac{r_j - d_j}{r_j})$
Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
S^T(4) &= (\frac{500-52}{500})(\frac{448-47}{448})(\frac{401-33}{401})(\frac{368-36}{368}) = 0,664 \\
S^B(4) &= (\frac{200-22}{200})(\frac{178-15}{178})(\frac{163-18}{163})(\frac{145-16}{145}) = 0,645
\end{aligned}
$$

Sehingga $|S^T(4) - S^B(4)| = |0,664 - 0,645| = 0,019 = 0,02$
Jawab: D.0,02

21. Sebuah regresi 2 variabel digunakan untuk mencocokkan data berikut ini:

X	Y
2	10
5	6
8	11
9	13

Hitunglah $Cov[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$

A. -1,77

B. -1,85

C. -1,93

D. -2,01

E. -2,09

Pembahasan:
Diketahui :

X	Y
2	10
5	6
8	11
9	13

Rumus yang digunakan adalah:

- $\sum x_i y_i = \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
- $\sum x_i^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2$
- $\sum y_i^2 = \sum(Y_i - \bar{Y})^2$
- $\sum \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum y_i^2 - \frac{x_i y_i}{x_i^2}$
- $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}}$
- $Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = -\bar{X}(\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2})$

Dengan demikian diperoleh :

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$
1	2	10	-4	0	16	0	0
2	5	6	-1	-4	1	16	4
3	8	11	2	1	4	1	2
4	9	13	3	3	9	9	9
Rata-rata	6	10					
Jumlah			0	0	30	26	15

$$\begin{aligned}
\sum \hat{\varepsilon}_i^2 &= \sum y_i^2 - \frac{x_i y_i}{x_i^2} \\
&= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 - \frac{(\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}))^2}{\sum(X_i - \bar{X}} \\
&= 26 - \frac{15^2}{30} \\
&= 18,5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}} \\
&= \sqrt{9,25} \\
\hat{\sigma}^2 &= 9,25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= -\bar{X}(\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}) \\ &= -6(\frac{9,25}{50}) \\ &= -1,85 \end{aligned}$$

Jawab:B. -1,85

22. Untuk sebuha regresi 2 vaiabel berdasakan 8 pengamatan, diperoleh informasi:
$X_i - \bar{X}^2 = 2000$
$\sum \hat{\varepsilon}_i^2 = 975$
Hitunglahs_β, yaitu standar error untuk Diberikan data sebagai s_β berikut:

 A. 0,22
 B. 0,24
 C. 0,28
 D. 0,31
 E. 0,34

Pembahasan:
Diketahui:
$n = 8$
$X_i - \bar{X}^2 = 2000$
$\sum \hat{\varepsilon}_i^2 = 975$

Rumus yang digunakan adalah:
$\sum x_i^2 = \sum(X_i - \bar{X}^2)$
$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}}$
$s_{\hat{\beta}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum x_i^2}}$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \sum x_i^2 &= \sum(X_i - \bar{X}^2) \\ &= 2000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{\sum \hat{\varepsilon_i^2}}{n-2}} \\ &= \sqrt{\frac{957}{8-2}} \\ &= 12.63\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{\hat{\beta}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{\sum x_i^2}} \\ &= \frac{12,63}{\sqrt{2000}} \\ &= 0,28\end{aligned}$$

Jawab:B.0,28

23. Anda mencocokkan model berikut dalam empat pengamatan
$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3, 4.$
Diberikan data sebagai berikut

i	X_{2i}	X_{3i}
1	-4	-2
2	-2	4
3	2	-4
4	4	2

Estimasi least square dari $\beta_3$dinyatakan sebagai $\hat{\beta}_3 = \sum_{i=1}^{4} w_i Y_i$, tentukan nilai (w_1, w_2, w_3, w_4)

a. $\left(-\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{20}\right)$

b. $\left(-\frac{1}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20}\right)$

c. $\left(\frac{1}{20}, -\frac{2}{20}, \frac{2}{20}, -\frac{1}{20}\right)$

d. $\left(-\frac{1}{20}, \frac{2}{20}, -\frac{2}{20}, \frac{1}{20}\right)$

e. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Pembahasan:
Diketahui :

$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

i	X_{2i}	X_{3i}
1	-4	-2
2	-2	4
3	2	-4
4	4	2

Rumus yang digunakan adalah:

$\hat{\beta}_3 = \sum_1^4 w_i Y_i = \sum_1^4 [\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}] Y_i$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} w_i &= [\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}] \\ \bar{x}_3 &= \frac{-2 + 4 + -4 + 2}{4} = 0 \\ \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= (-2)^2 + (-2)^4 + (-4)^2 + (2)^2 = 40 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{2}{40} = -\frac{1}{20} \\ w_2 &= \frac{4}{40} = -\frac{2}{20} \\ w_3 &= -\frac{4}{40} = -\frac{2}{20} \\ w_i &= \frac{2}{40} = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

Jawab: D.$(-\frac{1}{20}, \frac{2}{20}, -\frac{2}{20}, -\frac{1}{20})$

24. Sebuah regresi linear digunakan untuk mencocokkan suatu deret waktu dengan 30 pengamatan, diketahui:

- $\hat{\varepsilon}_1 = -7$
- $\hat{\varepsilon}_{30} = 11$
- $\sum_{t=1}^{t=30} \hat{\varepsilon}_t^2 = 801$

- $\sum_{t=1}^{t=30}(\hat{\varepsilon}_t \text{x } \hat{\varepsilon}_{t-1}) = 2422$

Hitunglah statistik Durbin-Watson

A. 1,31

B. 1,27

C. 1,23

D. 1,19

E. 1,15

Pembahasan:
Diketahui:

- $\hat{\varepsilon}_1 = -7$
- $\hat{\varepsilon}_{30} = 11$
- $\sum_{t=1}^{t=30} \hat{\varepsilon}_t^2 = 2422$
- $\sum_{t=1}^{t=30}(\hat{\varepsilon}_t \text{x } \hat{\varepsilon}_{t-1}) = 801$

Rumus yang digunakan adalah:

$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=30}(\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=30} \hat{\varepsilon_t^2}}$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=2}^{t=30}(\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2 &= \sum_{t=2}^{t=30}(\hat{\varepsilon_t^2} - 2\hat{\varepsilon_t}\hat{\varepsilon_{t-1}} + \hat{\varepsilon_{t-1}^2}) \\
&= \sum_{t=2}^{t=30}\hat{\varepsilon_t^2} - 2\sum_{t=2}^{t=30}\hat{\varepsilon_t}\hat{\varepsilon_{t-1}} + \sum_{t=2}^{t=30}\hat{\varepsilon_{t-1}^2} \\
&= (2422 - (49) - 2(801) + (2422 - (121)) \\
&= 3072
\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{t=30}(\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{t=30}\hat{\varepsilon_t^2}} = \frac{3072}{2422} = 1,26837 = 1,27$$

Jawab: B. 1,27

25. Sebuah model regresi linear $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$ digunakan untuk mencocokkan data berikut ini:

X	Y
0	1
3	2
5	6
8	11

Hitunglah estimasi *heterocedasticity-consistent* dari $Var[\hat{\beta}]$

A. 0,031

B. 0,042

C. 0,053

D. 0,064

E. 0,075

Pembahasan:

Diketahui

$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$

X	Y
0	1
3	2
5	6
8	11

Rumus yang digunakan adalah:

$\hat{\beta} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$

$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$

$\varepsilon_i = Y_i - \hat{\varepsilon}_i = Y_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X})$

$var[\hat{\beta}] = \frac{S_{XX}\varepsilon_i^2}{(S_{XX})^2}$

Dengan demikian diperoleh :

i	X_I	Y_I	$X_I - \bar{X}$	$Y_I - \bar{Y}$	S_{XX}	S_{XY}	$\hat{Y}_I$	ε_i	ε_i^2	$S_{XX}\varepsilon_i^2$
1	0	1	-4	-4	16	16	0,17647	1,176471	1,384083	22,14533
2	3	2	-1	-3	1	3	3,705882	1,705882	2,910035	2,910035
3	5	6	1	1	1	1	6,294118	0,29412	0,086505	0,086505
4	8	11	4	6	16	24	10,17647	0,823529	0,678201	10,85121
Total	16	20	0	0	34	44	20	8,88E-16	5,058824	35,99308
Mean	4	5								

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\
&= 1,294118 \\
\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = -0,17647 \\
Var[\hat{\beta}] &= \frac{S_{XY}\varepsilon_i^2}{(S_{XX})^2} \\
&= 0,031136
\end{aligned}$$

Jawab: A. 0,031136

26. Korelasi serial order pertama (first order serial correlation) yaitu $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$. Nilai $\rho = 0,6$, $Var[v] = 40$ Hitunglah $var[\varepsilon]$

    A. 44,5

    B. 49

    C. 53,5

    D. 58

    E. 62,5

    Pembahasan:
    Diketahui:
    $\rho = 0,6$
    $Var[v] = \sigma_v^2 = 40$
    Rumus yang digunakan adalah:
    $var[v] = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$
    Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} var[v] &= \frac{40}{1-0,6^2} \\ &= 62,5 \end{aligned}$$

Jawab: E. 62,5

27. Diketahui suatu model autoregressive ARMA(1,1) diketahui:

$$\phi = 0,4 \text{ dan } \theta = 0,5$$

Hitunglah ρ_2

A. -0,026

B. -0,029

C. -0,032

D. -0,035

E. -0,038

Pembahasan:
Diketahui :
ARMA(1,1)
$\phi = 0,4$ dan $\theta = 0,5$

Rumus yang digunakan adalah:

$\rho(h) = \frac{(1-\theta\phi)(\phi-\theta)}{1-2\theta\phi+\theta^2}\phi^{h-1}$, untuk $h \geq 1$
Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \rho(2) &= \frac{(1-(0,5)(0,4))((0,4)-(0,5)}{1-2(0,5)(0,4)+0,5^2}(0,4)^{2-1} \\ &= -0,03765 \\ &= -0,038 \end{aligned}$$

Jawab: E.-0,038

28. . Diketahui suatu proses second order autoregressive AR(2) diketahui:

$$\rho_1 = 0,75, \rho_2 = 0,65$$

hitunglah ϕ_1

A. 0,7

B. 0,6

C. 0,5

D. 0,4

E. 0,3

Pembahasan:
Diketahui:
AR(2)
$\rho_1 = 0,75, \rho_2 = 0,65$
Rumus yang digunakan adalah:
Model AR(2) dapat dituliskan dalam bentuk
$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}$
$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}$
$\phi_2 = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}$
Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \\ &= \frac{0,75(1-0,65)}{1-0,75^2} \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

Jawab: B. 0,6

29. Diketahui suatu proses autoregressive-moving average ARMA (1,1) sebagai berikut:

$$y_t = 0,8y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$$

hitunglah ρ_1

A. 0,62

B. 0,66

C. 0,70

D. 0,74

E. 0,78

Pembahasan:
Diketahui:
ARMA(1,1)
$y_t = 0,8y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$
Rumus yang digunakan adalah:

Model ARMA(1,1) dapat dituliskan dalam bentuk
$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$
$\rho(h) = \frac{(1-\theta\phi)(\phi-\theta)}{1-2\theta\phi+\theta^2}\phi^{h-1}$, untuk $h \geq 1$
Dengan demikian diperoleh :
Berdasarkan $y_t = 0,8y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$ diperoleh
$\phi = 0,8$ dan $\theta = 0,2$
Sehingga

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \frac{(1-(0,2)(0,8))((0,8)-(0,2))}{1-2(0,8)(0,2)+0,2^2}(0,8)^{1-1} \\ &= 0,7\end{aligned}$$

Jawab: B. 0,7

30. Dalam sebuah studi regresi dua peubah acak dihasilkan

   a) $\hat{\beta} = 0,2$

   b) $s_{\hat{\beta}} = 0,095$, yaitu *standard error* dari β

   Tentukanlah nilai statistik t beserta keputusan yang diambil dari sebuah uji untuk $H_0 : \beta = 0$ dan $H_1 : \beta \neq 0$ dengan *confidance interval* 95% (diketahui, nilai kritis (*critical value*) untuk 95% *confidance interval* adalah 1,96)

   A. $t = 1,5$ dan oleh karena itu tolak hipotestis nol.

   B. $t = 1,5$ dan oleh karena itu terima hipotestis nol.

   C. $t = 1,8$ dan oleh karena itu tolak hipotestis nol.

   D. $t = 2,1$ dan oleh karena itu terima hipotestis nol.

   E. $t = 2,1$ dan oleh karena itu tolak hipotesis nol.

Pembahasan:
Diketahui

- $\hat{\beta} = 0,2$
- $s_{\hat{\beta}} = 0,095$, yaitu *standard error* dari β
- nilai kritis (*critical value*) untuk 95% *confidance interva*l adalah $t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = 1,96$

H_0 diterima apabila $-t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < T < t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ dimana nilai T diperoleh dari:

$T = \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{0,2}{0,095} = 2,105$

Diperoleh $T = 2,105$ sehingga tolak hipotesis nol

Jawab: E. $t = 2,1$ dan oleh karena itu tolak hipotesis nol.

7 A50 Periode November 2017

1. Diketahui fungsi survival dari seseorang berumur 40 tahun adalah sebagai berikut :

   $$S_{40}(t) \begin{cases} 1-(0,02t)^2, & \text{untuk } 0 \leq \text{t} < 25 \\ 0,75e^{-0,1(t-25)}, & \text{untuk t } \geq 25 \end{cases}$$

   Hitunglah μ_{70}

   A. 0,10

   B. 0,15

   C. 0,20

   D. 0,25

   E. 0,30

   Pembahasan:
   Diketahui:

   $$S_{40}(t) \begin{cases} 1-(0,02t)^2, & \text{untuk } 0 \leq \text{t} < 25 \\ 0,75e^{-0,1(t-25)}, & \text{untuk t } \geq 25 \end{cases}$$

   Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

   $$\begin{aligned} S_x(t) &= \frac{S(x+t)}{S_x} \\ \mu_x &= -\frac{d}{dx} \ln S_x(x) \end{aligned}$$

   Dengan demikian diperoleh :

   $$\begin{aligned} \mu_{70} &= -\frac{d}{dt} \ln S_{40}(t), \qquad \text{di mana t=30} \\ &= \left(-\frac{d}{dt} \ln(0,75e^{-0,1(t-25)})\right)_{t=30} \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

Jawab: A

2. Dalam sebuah populasi tertentu, suatu *hazard function* didefinisikan sebagai berikut: :

$$\mu(t) = \begin{cases} 0.010, & 60 < \mathrm{t} \leq 70 \\ 0.015, & 70 < \mathrm{t} \leq 80 \\ 0.025, & \mathrm{t} > 80 \end{cases}$$

Untuk seseorang dari populasi ini yang tepat berumur 65 tahun, hitunglah probabilitas bahwa orang tersebut akan tetap hidup paling sedikit 5 tahun lagi (dibulatkan 2 desimal).

A. 0.97

B. 0.96

C. 0.95

D. 0.94

E. 0.93

Pembahasan:
Diketahui:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0.010, & 60 < \mathrm{t} \leq 70 \\ 0.015, & 70 < \mathrm{t} \leq 80 \\ 0.025, & \mathrm{t} > 80 \end{cases}$$

Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$_tp_x = exp\left(-\int_0^t \mu_x(s)ds\right)$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_5p_{65} &= exp\left(-\int_0^5 0.01ds\right) \\ &= exp(-0.05) \\ &= 0.951229 \\ &\approx 0.95 \end{aligned}$$

Jawab: C

3. Diketahui:

a) $S_0(t) = \left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}}$, untuk $0 \leq t \leq \omega$

b) $\mu_{65} = \frac{1}{180}$

Hitunglah e^{106}, yaitu ekspektasi hidup pada umur 106 tahun.

A. 2.48

B. 2.59

C. 2.70

D. 2.81

E. 2.92

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{-\frac{d}{dt} S_x(t)}{S_x(t)} \\ {}_t p_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\ e_x &= \sum_{t=1}^{\infty} ({}_t p_x) \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{-\frac{d}{dt} S_0(t)}{S_0(t)} \\ &= \frac{-\frac{d}{dt}\left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(1 - \frac{t}{\omega}\right)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{4\omega\left(1 - \frac{t}{\omega}\right)} \\ \mu_{65} &= \frac{1}{4\omega\left(1 - \frac{65}{\omega}\right)} \\ \frac{1}{180} &= \frac{1}{4\omega - 260} \\ \omega &= \frac{180 + 260}{4} = 110 \end{aligned}$$

Dari sini, selanjutnya kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{\left(100 - \frac{x+t}{110}\right)^{\frac{1}{4}}}{\left(1 - \frac{t}{110}\right)^{\frac{1}{4}}} \\
&= \left(\frac{110 - x - t}{110 - x}\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{106} &= \sum_{t=1}^{4} ({}_tp_{106}) \\
&= \sum_{t=1}^{4} \left(\frac{110 - 106 - t}{110 - 106}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= 2.478608056 \\
&\approx 2.48
\end{aligned}
$$

Jawab: A

4. Untuk suatu tabel *double decrement*, diketahui:

   a) $q_x'^{(1)} = 0.2$
   b) $q_x'^{(2)} = 0.3$
   c) Setiap *decrement* terdistribusi secara *uniform* dalam masing-masing tabel *single decrement* yang diasosiasikan.

   Hitunglah $q_x^{(1)}$ (dibulatkan 3 desimal)

   A. 0.089
   B. 0.126
   C. 0.144
   D. 0.167
   E. 0.192

   Pembahasan:

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$
\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)}\right) \\
q_x^{(2)} &= q_x'^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(1)}\right)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian diperoleh:

$$
\begin{aligned}
q_x^{(1)} &= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} q_x'^{(2)}\right) \\
&= q_x'^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{q_x^{(2)}}{1 - \frac{1}{2} q_x'^{(1)}}\right]\right) \\
&= 0.2 \left(1 - \frac{1}{2} \left[\frac{0.3}{1 - \frac{0.2}{2}}\right]\right) \\
&= 0.167
\end{aligned}
$$

Jawab: D

5. Diketahui tabel mortalita dengan periode seleksi 2 tahun sebagai berikut:

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	$x+2$
50	0.0060	0.0053	0.0070	52
51	0.0070	0.0063	0.0080	53
52	0.0080	0.0073	0.0090	54
53	0.0090	0.0083	0.0100	55

Jika *force of mortality* adalah konstan, hitunglah $1000{}_{2.5}q_{[50]+0.4}$ (dibulatkan 2 desimal)

A. 11.17

B. 12.96

C. 14.35

D. 15.13

E. 16.42

Pembahasan:

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= {}_{x+t}p_0 \\ {}_tp_x &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+t-1} \end{aligned}$$

Untuk asumsi *force of mortality* konstan, didapatkan:

$$\begin{aligned} {}_sp_x &= (p_x)^s \\ {}_tp_{x+s} &= \frac{{}_{s+t}p_x}{{}_sp_x} = \frac{{}_{s+t}p_x}{(p_x)^s} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} {}_{2.5}q_{[50]+0.4} &= 1 - {}_{2.5}\, p_{[50]+0.4} \\ &= 1 - \frac{{}_{2.9}p_{[50]}}{(p_{[50]})^{0.4}} \\ &= 1 - \frac{p_{[50]} \cdot p_{[50]+1} \cdot (p_{52})^{0.9}}{(1 - q_{(50)})^{0.4}} \\ &= 1 - \frac{(1-0.006)(1-0.0053)(1-0.007)^{0.9}}{(1-0.006)^{0.4}} \\ &= 0.01513 \end{aligned}$$

Oleh karena itu didapatkan:

$$1000_{2.5}q_{[50]+0.4} = (1000)(0.01513) = 15.13$$

Jawab : D

6. Pada sebuah studi *double decrement* yang dilakukan pada tahun kalender 2007, diperoleh data sebagai berikut:

Orang ke-	Tanggal Lahir	Tanggal Kematian	Tanggal Withdrawal
1	1 Juli 1912	-	-
2	1 April 1912	1 Desember 2007	-
3	1 Oktober 1911	-	?
4	1 Januari 1912	-	-
5	1 Juni 1912	1 November 2007	-

Diketahui pula $\hat{q}_{95}^{\prime(kematian)} = 0.46825$ dengan menggunakan metode *exact exposure*. Pada tanggal berapa orang ke-3 keluar (*withdrawal*) dari pengamatan pada studi tersebut?

A. 1 April 2007

B. 1 Mei 2007

C. 1 Juni 2007

D. 1 Juli 2007

E. 1 Agustus 2007

Pembahasan:
Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\text{Exact Exposure: } \hat{q} \quad = \quad 1 - exp\left(-\frac{d_j}{\varepsilon_j}\right)$$

di mana:

- y_i = tanggal awal pengamatan - tanggal lahir
- z_i= tanggal akhir pengamatan - tanggal lahir
- θ_i= tanggal meninggal - tanggal lahir
- ϕ_i= tanggal withdrawal - tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0, \text{jika} \quad y_i \leq x \\ y_i - x, \text{jika} \quad x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x, \text{jika} \quad x < z_i < x+1 \\ 1, \text{jika} \quad z_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} 0, \text{jika} \quad \theta_i = 0 \\ \theta_i - x, \text{jika} \quad x < \theta_i < x+1 \\ 0, \text{jika} \quad \theta_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$k_i = \begin{cases} 0, \text{jika} \quad \phi_i = 0 \\ \phi_i - x, \text{jika} \quad x < \phi_i < x+1 \\ 0, \text{jika} \quad \phi_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i, \text{jika seseorang tidak meninggal dan withdrawal} \\ k_i - r_i, \text{jika seseorang withdrawal} \\ l_i - r_i, \text{jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Dengan demikian diperoleh:

Orang	y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	l_i	k_i	Eksposure eksak
1	94.5	95.5			0	0.5			0.5
2	94.57	95.75	95.67		0	0.75	0.67		0.67
3	95.25	96.25		$95.25 + x$	0.25	1		$0.25 + x$	x
4	95	96			0	1			1
5	94.58	95.58	95.42		0	0.58	0.42		0.42

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh eksposure eksak adalah $2.59 + x$. Selain itu, berdasarkan kolom l_i, terdapat dua kematian untuk usia 95 tahun.

Berdasarkan informasi pada tabel di atas, didapatkan:

$$\begin{aligned}
\hat{q}_{95}^{\prime(kematian)} &= 1 - exp\left(-\frac{2}{2.59 + x}\right) \\
0.46825 &= 1 - exp\left(-\frac{2}{2.59 + x}\right) \\
exp\left(-\frac{2}{2.59 + x}\right) &= 1 - 0.46825 \\
-\frac{2}{2.59 + x} &= \ln(0.53175) \\
\frac{2}{2.59 + x} &= 0.63158 \\
x &= \frac{2 - (0.63158)(2.59)}{0.63158} \\
&= 0.576651 \text{ tahun} \\
&= 6.9198 \text{ bulan} \\
&\approx 7 \text{ bulan}
\end{aligned}$$

Karena awal pengamatan dimulai pada tanggal 1 Januari 2017, maka orang ke-3 keluar pada tanggal 1 Agustus 2017.

Jawab : E

7. Jika diketahui *force of mmortality* adalah $\mu_x^{(d)} = \frac{4}{5(100-x)}$ dan *force of withdrawal* adalah $\mu_x^{(w)} = \frac{11}{5(100-x)}$, hitunglah *conditional density function* untuk kematian seseorang pada umur $70 + t$, jika orang tersebut hidup pada umur 70.

A. $\frac{30-t}{600}$

B. $\frac{70-t}{1125}$
C. $\frac{(30-t)^2}{1125}$
D. $\frac{(70-t)^2}{33750}$
E. $\frac{(30-t)^2}{33750}$

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\begin{aligned} \mu_x^{(\tau)} &= \mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)} \\ {}_t p_x^{(\tau)} &= exp\left(-\int_0^t \mu_x^{(\tau)}(y)dy\right) \\ {}_x p_0 &= S(x) \\ f(t,j) &= {}_t p_x^{(\tau)}.\mu_x^{(j)}(t) \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu_x^{(\tau)} &= \mu_x^{(d)} + \mu_x^{(w)} = \frac{4}{5(100-x)} + \frac{11}{5(100-x)} = \frac{3}{(100-x)} \\ {}_t p_x^{(\tau)} &= exp\left(-\int_0^t \frac{3}{100-y}dy\right) = exp\left(3\ln(100-t) - 3\ln(100)\right) = \frac{(100-t)^3}{1000000} \end{aligned}$$

Fungsi *joint pdf* t dan j apabila seseorang masih hidup adalah:

$$f(t,j) = \frac{(100-t)^3}{1000000}.\frac{4}{5(100-t)} = \frac{4(100-t)^2}{5000000}$$

Berdasarkan informasi tersebut, maka diperoleh *conditional density function* seseorang pada umur $70+t$, jika orang tersebut hidup pada umur 70 tahun adalah:

$$\begin{aligned} P &= \frac{{}_t p_{70}^{(\tau)}.\mu_{70}^{(d)}(t)}{S(70)} \\ &= \frac{\frac{4(100-(70+t))^2}{5000000}}{\frac{(100-70)^3}{1000000}} \\ &= \frac{(30-t)^2}{33750} \end{aligned}$$

Jadi, *conditional density function* untuk kematian seseorang pada umur $70+t$, jika orang tersebut hidup pada umur 70 adalah $\frac{(30-t)^2}{33750}$

Jawab : E

8. Atas pengamatan pada 100 polis dalam studi pembatalan polis, diperoleh informasi sebagai berikut:

   i Studi dibuat sedemikian sehingga untuk setiap satu pembatalan polis, ditambahkan satu polis baru (artinya r_j selalu bernilai 100)

   ii Pembatalan polis terjadi di akhir tahun dengan pengamatan sebagai berikut:
   1 polis batal di akhir tahun polis ke-1
   2 polis batal di akhir tahun polis ke-2
   3 polis batal di akhir tahun polis ke-3
   ...
   ...
   n polis batal di akhir tahun polis ke-n

   iii Estimasi empiris Nelson-Aalen untuk fungsi distribusi kumulatif pada tahun ke-n adalah $\hat{F}(n) = 0.698806$

   Hitunglah nilai n.

   A. 12

   B. 13

   C. 14

   D. 15

   E. 16

   Pembahasan:
   Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\hat{F}(n) \quad = \quad 1 - exp\left(-\sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{r_j}\right), \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\hat{F}(n) &= 1 - exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{r_j}\right) \\
0.698806 &= 1 - exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{100}\right) \\
exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{100}\right) &= 1 - 0.698806 = 0.301194 \\
\sum_{j=1}^{n}\frac{d_j}{100} &= -\ln(0.301194) \\
\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} + ... + \frac{n}{100} &= 1.2 \\
\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{100} &= 1.2 \\
n^2 + n - 240 &= 0 \\
(n-15)(n+16) &= 0
\end{aligned}$$

Karena nilai n haruslah positif, maka diperoleh nilai n yang memenuhi adalah 15.

Jawab : D

9. Hasil dari suatu studi dalam periode pengamatan tahun kalender 1983 adalah sebagai berikut:

Orang ke-	Tanggal Lahir	Tanggal Kematian
A	1 April 1922	1 Juni 1983
B	1 Juli 1922	-
C	1 Oktober 1922	1 Maret 1983
D	1 Januari 1923	-
E	1 April 1923	-
F	1 Juli 1923	1 Oktober 1983
G	X	-

i Pada tanggal 1 Januari 1983 semua individu ada dalam studi ini.

ii Tidak ada yang keluar dari studi ini selama periode pengamatan selain karena kematian.

iii Dengan menggunakan pendekatan *actuarial exposure*, diperoleh $\hat{q}_{60} = \frac{4}{9}$

Tentukan nilai $\hat{q}_{60}$ jika dihitung dengan pendekatan *exact exposure* (asumsi *force of mortality* adalah konstan).

A. 0.315

B. 0.468

C. 0.559

D. 0.631

E. 0.689

Pembahasan:
Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\text{Exact Exposure: } \hat{q} \quad = \quad 1 - exp\left(-\frac{d_j}{\varepsilon_j}\right)$$

di mana:

- y_i = tanggal awal pengamatan - tanggal lahir
- z_i= tanggal akhir pengamatan - tanggal lahir
- θ_i= tanggal meninggal - tanggal lahir
- ϕ_i= tanggal withdrawal - tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0, \text{jika} \quad y_i \leq x \\ y_i - x, \text{jika} \quad x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x, \text{jika} \quad x < z_i < x+1 \\ 1, \text{jika} \quad z_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$l_i = \begin{cases} 0, \text{jika} \quad \theta_i = 0 \\ \theta_i - x, \text{jika} \quad x < \theta_i < x+1 \\ 0, \text{jika} \quad \theta_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$k_i = \begin{cases} 0, \text{jika} \quad \phi_i = 0 \\ \phi_i - x, \text{jika} \quad x < \phi_i < x+1 \\ 0, \text{jika} \quad \phi_i \geq x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i, \text{jika seseorang tidak meninggal dan withdrawal} \\ k_i - r_i, \text{jika seseorang withdrawal} \\ l_i - r_i, \text{jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{aktuaria} = \begin{cases} s_i - r_i, \text{jika seseorang tidak meninggal dan withdrawal} \\ k_i - r_i, \text{jika seseorang withdrawal} \\ 1 - r_i, \text{jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Dengan demikian diperoleh:

Orang	y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	l_i	k_i	eksak	aktuaria
A	60.75	61.75	61.75		0.75	1			0.25	0.25
B	60.5	61.5			0.5	1			0.5	0.5
C	60.25	61.25	60.41		0.25	1	0.41		0.75	0.16
D	605	61			0	1			1	1
E	59.75	60.75			0	0.75			0.75	0.75
F	59.5	60.5	60.25		0	0.5			1	0.25
G					0	R			R	R

Berdasarkan tabel di atas, diperoleh total eksposure eksak adalah $4.25 + R$ dan eksposure aktuaria adalah $2.91 + R$. Selain itu, berdasarkan kolom l_i, terdapat dua kematian.

Berdasarkan informasi pada tabel di atas, didapatkan:

$$\begin{aligned} \hat{q}_{60} &= \frac{2}{4.25 + R} \\ \frac{14}{9} &= \frac{2}{4.25 + R} \\ 17 + 4R &= 18 \\ R &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dalam *exact exposure* terdapat 2 kematian dalam kolom l_i. Dengan demikian kita peroleh:

$$\hat{q}_{60} \quad = \quad 1 - exp\left(-\frac{2}{2.91 + \frac{1}{4}}\right) = 0.468956 \approx 0.468$$

Jadi, nilai dari $\hat{q}_{60}$ dengan pendekatan *exact exposure* adalah 0.468

Jawab : B

10. Untuk sebuah model *double decrement*:

    i ${}_tp_{40}^{\prime(1)} = 1 - \frac{t}{65}, 0 \leq t \leq 65$

    ii ${}_tp_{40}^{\prime(2)} = 1 - \frac{t}{30}, 0 \leq t \leq 30$

Hitunglah $\mu_{40+15}^{(\tau)}$ (dibulatkan 3 desimal)

A. 0.058

B. 0.067

C. 0.075

D. 0.080

E. 0.087

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= \prod_{j=1}^{m}({}_tp_x'^{(j)}) \\ \mu_{x+t}^{(\tau)} &= -\frac{1}{{}_tp_x^{(\tau)}}.\frac{d}{dt}\left({}_tp_x^{(\tau)}\right) \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} {}_tp_{40}^{(\tau)} &= \prod_{j=1}^{2}({}_tp_{40}'^{(j)}) \\ &= {}_tp_{40}'^{(1)}.{}_tp_{40}'^{(2)} \\ &= \left(1-\frac{t}{65}\right).\left(1-\frac{t}{30}\right) \\ &= 1-\frac{19}{390}t+\frac{1}{1950}t^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya:

$$\begin{aligned} \mu_{40+t}^{(\tau)} &= -\frac{1}{{}_tp_{40}^{(\tau)}}.\frac{d}{dt}\left({}_tp_{40}^{(\tau)}\right) \\ &= -\frac{1}{1-\frac{19}{390}t+\frac{1}{1950}t^2}.\frac{d}{dt}\left(1-\frac{19}{390}t+\frac{1}{1950}t^2\right) \\ &= -\frac{-\frac{19}{390}+\frac{2}{1950}t}{1-\frac{19}{390}t+\frac{1}{1950}t^2} \end{aligned}$$

Oleh karena itu didapatkan:

$$\mu_{40+15}^{(\tau)} = -\frac{-\frac{19}{390}+\frac{2}{1950}(15)}{1-\frac{19}{390}(15)+\frac{1}{1950}(15)^2} = 0.08667 \approx 0.087$$

Jawab : E

11. Pada sebuah model *double decrement*, diperoleh informasi sebagai berikut:
    - $l_x^{(\tau)} = 100$
    - $l_{x+3}^{(\tau)} = 50$
    - ${}_3q_x^{(1)} = 0.07$
    - ${}_{2|}q_x^{(2)} = 0.08$

    Hitunglah ${}_2q_x^{(2)}$

    A. 0.15

    B. 0.20

    C. 0.25

    D. 0.30

    E. 0.35

    Pembahasan:
    Formula yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} {}_tq_x^{(1)} &= \frac{\sum_{j=0}^{t-1} d_{x+j}^{(1)}}{l_x^{(\tau)}} \\ {}_{t|u}q_x^{(j)} &= \frac{{}_ud_{x+t}^{(j)}}{l_x^{(\tau)}} \end{aligned}$$

Untuk *double decrement* :

$$l_{x+t}^{(\tau)} = l_x^{(\tau)} - \sum_{j=0}^{t-1}\left(d_{x+j}^{(1)} + d_{x+j}^{(2)}\right)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} {}_3q_x^{(1)} &= \frac{\sum_{j=0}^{3-1} d_{x+j}^{(1)}}{l_x^{(\tau)}} \\ {}_3q_x^{(1)} &= \frac{d_x^{(1)} + d_{x+1}^{(1)} + d_{x+2}^{(1)}}{l_x^{(\tau)}} \\ 0.07 &= \frac{d_x^{(1)} + d_{x+1}^{(1)} + d_{x+2}^{(1)}}{100} \\ d_x^{(1)} + d_{x+1}^{(1)} + d_{x+2}^{(1)} &= 7 \end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
l_{x+3}^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - d_x^{(1)} - d_x^{(2)} - d_{x+1}^{(1)} - d_{x+1}^{(2)} - d_{x+2}^{(1)} - d_{x+2}^{(2)} \\
l_{x+3}^{(\tau)} &= l_x^{(\tau)} - \left(d_x^{(1)} + d_{x+1}^{(1)} + d_{x+2}^{(1)}\right) - \left(d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)} + d_{x+2}^{(2)}\right) \\
50 &= 100 - 7 - \left(d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)}\right) - 8 \\
d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)} &= 35
\end{aligned}$$

Oleh karena itu, didapatkan:

$$\begin{aligned}
{}_2q_x^{(2)} &= \frac{\sum_{j=0}^{2-1} d_{x+j}^{(2)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \frac{d_x^{(2)} + d_{x+1}^{(2)}}{l_x^{(\tau)}} \\
&= \frac{35}{100} = 0.35
\end{aligned}$$

Jawab : E

12. Diketahui tiga hasil pengamatan sebagai berikut:

$$0.68 \qquad 0.80 \qquad 0.96$$

Anda mencocokkan sebuah distribusi dengan fungsi kepadatan (*density function*) sebagai berikut ini terhadap data:

$$f(x) = (p+1)x^p, \qquad 0 < x < 1, p > -1$$

Hitung estimasi *maximum likelihood* atas p (dibulatkan 2 desimal)

A. 2.23

B. 2.95

C. 3.62

D. 4.32

E. 6.81

Pembahasan:
Diketahui bahwa:

- $n = 3$
- Data hasil pengamatan adalah 0.68 , 0.80 , dan 0.96
- $f(x) = (p+1)x^p, \quad 0 < x < 1, p > -1$

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
L(p) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} (p+1)(x_i)^p \\
&= (p+1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^p \\
\ln[L_p] &= \ln \left[(p+1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^p \right] \\
\ln[L_p] &= n \ln(p+1) + p \ln \left[\prod_{i=1}^{n} x_i \right] \\
\ln[L_p] &= n \ln(p+1) + p \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)
\end{aligned}$$

Dalam mencari *maximum likelihood*, maka kita gunakan persamaan : $\frac{d}{dp} \ln[L(p)] = 0$. Oleh karena didapatkan:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} \ln[L(p)] &= 0 \\
\frac{d}{dp} \left(n \ln(p+1) + p \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right) &= 0 \\
\frac{n}{\hat{p}+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) &= 0 \\
\hat{p} &= \frac{-n - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}
\end{aligned}$$

Berdasarkan data pengamatan yang diberikan pada soal, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{-3-\sum_{i=1}^{3}\ln(x_i)}{\sum_{i=1}^{3}\ln(x_i)} \\ &= \frac{-3-(\ln(0.68)+\ln(0.8)+\ln(0.96))}{(\ln(0.68)+\ln(0.8)+\ln(0.96))} \\ &= 3.618 \\ &\approx 3.62\end{aligned}$$

Jawab : C

13. Diketahui:
    - Studi mortalita dilakukan atas sejumlah n orang.
    - Tidak ada data yang disensor dan tidak ada dua kejadian meninggal pada periode yang sama.
    - t_k = Saat kejadian meninggal ke -k
    - Estimasi Nelson-Aalen dari fungsi *hazard rate* kumulatif pada t_2 adalah $\hat{\Lambda}(t_2) = \frac{55}{756}$

    Hitunglah estimasi *product limit* Kaplan-Meier dari fungsi *survival* pada t_{10}

    A. 0.52

    B. 0.55

    C. 0.64

    D. 0.69

    E. 0.78

    Pembahasan:
    Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}\hat{S}(t) &= \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{r_j-d_j}{r_j}\right), \text{ untuk } \quad t_m \le t \le t_{m+1} \\ \hat{\Lambda}(t) &= \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{r_j} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+...+\frac{1}{n-m+1}, \text{ untuk } \quad t_m \le t \le t_{m+1}\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}(t_2) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \\
\frac{55}{756} &= \frac{2n-1}{n^2-n} \\
55n^2 - 55n &= 1512n - 756 \\
55n^2 - 1567n + 756 &= 0 \\
(55n-27)(n-28) &= 0
\end{aligned}$$

Berdassarkan betuk persamaan kuadrat di atas, solusi yang mungkin dari n adalah 28. Gunakan nilai tersebut untuk menghitung estimasi *product limit* Kaplan-Meier dari fungsi *survival* pada t_{10}, yaitu:

$$\begin{aligned}
\hat{S}(t_{10}) &= \prod_{j=1}^{10} \left(\frac{r_j - d_j}{r_j} \right) \\
&= \frac{27}{28} . \frac{26}{27} . \frac{25}{26} \cdots \frac{18}{19} \\
&= \frac{18}{28} \\
&= 0.642857143 \\
&\approx 0.64
\end{aligned}$$

Jawab : C

14. Sebuah studi mortalita dilakukan atas pengamatan terhadap 50 peserta dimulai dari waktu ke-0. Diketahui:

Waktu	Jumlah Kematian (d_t)	Jumlah yang disensor (c_t)
15	3	0
17	0	4
25	3	0
30	0	c_{30}
32	8	0
40	2	0

$\hat{S}(35)$ adalah estimasi product limit dari $S(35)$.
$\hat{V}[\hat{S}(35)]$ adalah estimasi variansi dari $\hat{S}(35)$ menggunakan formula Greenwood.
$\frac{\hat{V}[\hat{S}(35)]}{[\hat{S}(35)]^2} = 0.012718$.

Hitunglah c_{30}, jumlah yang disensor pada waktu $t = 30$.

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 10

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\hat{V}[\hat{S}(t)] = [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\hat{V}[\hat{S}(35)] &= [\hat{S}(35)]^2 \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) \\
\frac{\hat{V}[\hat{S}(35)]}{[\hat{S}(35)]^2} &= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) \\
0.012718 &= \left(\frac{3}{50(47)} \right) + \left(\frac{3}{43(40)} \right) + \left(\frac{8}{(40 - c_{30})(32 - c_{30})} \right) \\
\left(\frac{8}{(40 - c_{30})(32 - c_{30})} \right) &= 0.0096972182 \\
1280 - 72c_{30} + c_{30}^2 &= 824.9788584 \\
c_{30}^2 - 72c_{30} + 455.0211416 &= 0
\end{aligned}$$

Nilai dari c_{30} yang memenuhi persamaan kuadrat di atas adalah $c_{30} = 7.00036 \approx 7$ atau $c_{30} = 64.999 \approx 65$. Karena jumlah peserta yang ada adalah 50 orang, maka nilai c_{30} yang mungkin adalah $c_{30} = 7$.

Jawab : B

15. Diketahui model deret waktu sebagai berikut:

$$y_t = 0.9y_{t-1} + 1 + \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1}$$

Juga diberikan:

$$
\begin{aligned}
y_T &= 7.0 \\
\hat{\varepsilon}_T &= 0.5
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan *error* di periode yang akan datang adalah nol, hitunglah perkiraan 2 periode, yaitu $\hat{y}_T(2)$

A. 5.64

B. 6.12

C. 7.30

D. 8.20

E. 9.15

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$
\hat{y}_T(s) = \phi_1^s y_T + (\phi_1^{s-1} + \phi_1 + 1)\delta - \phi_1^{s-1}\theta_1\hat{\varepsilon}_T
$$

Dengan demikian diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\hat{y}_T(2) &= (\phi_1)^2 y_T + (\phi_1 + 1)\delta - \phi_1\theta_1\hat{\varepsilon}_T \\
&= (0.9)^2(7) + (0.9+1)(1) - (0.9)(0.6)(0.5) \\
&= 7.3
\end{aligned}
$$

Jawab : C

16. Anda mencocokkan model *moving average* order pertama yang *invertible* ke dalam Deret Waktu. Koefisien *autocorellation* dari sample lag 1 adalah -0.40. Hitunglah tebakan awal untuk θ (yaitu parameter *moving average*).

A. 0.4

B. 0.5

C. 0.6

D. 0.7

E. 0.8

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

Autocorrelation function untuk MA(q) yang *invertible*

$$\rho_h = -\frac{\theta_h + \sum_{j=1}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j^2}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
-0.4 &= -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
0.4(1+\theta_1^2) &= \theta_1 \\
4\theta_1^2 + 4 &= 10\theta_1 \\
4\theta_1^2 - 10\theta_1 + 4 &= 0 \\
(4\theta_1 - 2)(\theta_1 - 2) &= 0
\end{aligned}$$

Nilai θ_1 yang memenuhi persamaan kuadrat di atas adalah $\theta_1 = \frac{1}{2}$ atau $\theta_1 = 2$. Karena nilai parameter θ_1 haruslah kurang dari 1, maka nilai θ_1 yang dimaksud adalah $\theta_1 = 0.5$

Jawab : B

17. Model berikut ini digunakan untuk mengestimasi 30 pengamatan:
    - Model I : $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$
    - Model II : $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$

    Selain itu, diketahui data sebagai berikut:

    i $\sum(Y - \bar{Y})^2 = 160$

    ii $\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2 = 11$

    iii Untuk model I, $\hat{\beta}_2 = -2$

    iv Untuk model II, $R^2 = 0.60$

    Hitunglah nilai F statistik yang digunakan untuk menguji bahwa β_3 dan β_4 adalah sama dengan 0.

    A. 10.56

    B. 19.50

C. 22.80

D. 26.30

E. 33.62

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$
\begin{aligned}
R_R^2 &= \beta_2^2 \left(\frac{\sum (X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sum (Y_2 - \bar{Y}_2)^2} \right) \\
F &= \frac{R_{UR}^2 - R_R^2}{m} . \frac{n-k}{1 - R_{UR}^2}
\end{aligned}
$$

di mana:
m adalah selisih jumlah parameter *restricted* dan *unrestricted*.
k adalah jumlah parameter *unrestricted* dari model.

Dengan demikian diperoleh:

$$
\begin{aligned}
R_R^2 &= \beta_2^2 \left(\frac{\sum (X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sum (Y_2 - \bar{Y}_2)^2} \right) \\
&= (-2)^2 \left(\frac{11}{160} \right) \\
&= 0.275
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{R_{UR}^2 - R_R^2}{m} . \frac{n-k}{1 - R_{UR}^2} \\
&= \frac{0.6 - 0.275}{2} . \frac{30 - 4}{1 - 0.6} \\
&= 10.5625 \\
&\approx 10.56
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai F statistik yang digunakan untuk menguji bahwa β_3 dan β_4 adalah sama dengan 0 adalah 10.56

Jawab : A

18. Pada suatu model *autoregressive* ARMA(1,1) diketahui informasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 0.3 \\ \theta_1 &= 0.5 \end{aligned}$$

Berapa nilai ρ_2 (dibulatkan 3 desimal) ?

A. -0.029

B. -0.038

C. -0.046

D. -0.054

E. -0.061

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} \rho_h &= \phi_1 \rho_{h-1}, \text{ untuk } h \geq 2 \\ \rho_1 &= \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 \\ \rho_2 &= \phi_1 \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2} \\ &= (0.5)\left(\frac{(0.3 - 0.5)(1 - (0.3)(0.5))}{1 - 2(0.3)(0.5) + (0.5)^2}\right) \\ &= -0.053684 \\ &\approx -0.054 \end{aligned}$$

Jawab : D

19. Diketahui suatu proses *autoregressive-moving average* ARMA(1,1) sebagai berikut:

$$y_t = 0.7y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0.3\varepsilon_{t-1}$$

Berapa nilai ρ_1 (dibulatkan 2 desimal) ?

A. 0.47

B. 0.55

C. 0.62

D. 0.70

E. 0.78

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}\rho_h &= \phi_1\rho_{h-1}, \text{ untuk } h \geq 2\\ \rho_1 &= \frac{(\phi_1-\theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{(\phi_1-\theta_1)(1-\phi_1\theta_1)}{1-2\phi_1\theta_1+\theta_1^2}\\ &= \left(\frac{(0.7-0.3)(1-(0.3)(0.7))}{1-2(0.3)(0.7)+(0.3)^2}\right)\\ &= 0.4716\\ &\approx 0.47\end{aligned}$$

Jawab : A

20. Diketahui informasi sebagai berikut:

i

$$\begin{aligned}y_i &= \beta x_i + \varepsilon_i\\ Var(\varepsilon_i) &= \left(\frac{x_i}{2}\right)^2\end{aligned}$$

ii

i	x_i	y_i
1	1	9
2	2	3
3	3	4
4	4	-3

Tentukan nilai estimasi *weighted least square* dari β, yaitu $\hat{\beta}$ (dibulatkan 2 desimal)

A. 2.62

B. 2.69

C. 2.77

D. 2.85

E. 2.93

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{Var(\varepsilon_i)} \\ \hat{\beta} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2} \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

i	x_i	y_i	$Var(\varepsilon_i)$	w_i	$w_i x_i y_i$	x_i^2	$w_i x_i^2$
1	1	9	0.25	4	36	1	4
2	2	3	1	1	6	4	4
3	3	4	2.25	0.44444	5.3333	9	4
4	4	-3	4	0.25	-3	16	4
Total	10	13	7.5	5.69444	44.3333	30	16

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2} = \frac{44.3333}{16} = 2.77$$

Jawab : C

21. Sebuah regresi 2 variabel dicocokkan ke dalam 5 observasi sebagai berikut:

i	1	2	3	4
X_i	7	12	15	21
$\hat{\varepsilon}_i$	1.017	0.409	-0.557	-2.487

Berapakah nilai X_5 ?

A. 26

B. 27

C. 28

D. 29

E. 30

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :
Sifat residual

- Zero mean : $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i = 0$
- Orthogonality : $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i X_i = 0$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i &= 0 \\
1.017 + 0.409 - 0.557 - 2.487 + \hat{\varepsilon}_5 &= 0 \\
\hat{\varepsilon}_5 &= 1.618
\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i X_i &= 0 \\
1.017(7) + 0.409(12) - 0.557(15) - 2.487(21) + 1.618(X_5) &= 0 \\
X_5 &= 30.009 \\
&\approx 30
\end{aligned}$$

Jawab : E

22. Anda mencocokkan model berikut dalam empat pengamatan:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i \text{ , } i = 1, 2, 3, 4$$

Diberikan data sebagai berikut:

i	X_{2i}	X_{3i}
1	-4	-3
2	-3	4
3	3	-4
4	4	3

Estimasi *least square* dari β_3 dinyatakan sebagai $\hat{\beta_3} = \sum_{i=1}^{4} w_i Y_i$.
Tentukan nilai dari $(w_1; w_2; w_3; w_4)$

A. (-0.08 ; -0.06 ; 0.06 ; 0.08)

B. (-0.06 ; 0.08 ; -0.08 ; 0.06)

C. (0.06 ; -0.08 ; 0.08 ; -0.06)

D. (-0.05 ; 0.10 ; -0.10 ; 0.05)

E. (0.05 ; -0.10 ; 0.10 ; -0.05)

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\hat{\beta}_3 = \sum_{i=1}^{4} w_i Y_i = \sum_{i=1}^{4} \left[\frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \right] Y_i$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} w_i &= \left[\frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \right], \quad \text{di mana} \\ \bar{X} &= \frac{-3 + 4 - 4 + 3}{4} = 0, \quad \text{dan} \\ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 &= (-3)^2 + (4)^2 + (-4)^2 + (3)^2 = 50 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-3}{50} = -0.06 \\ w_2 &= \frac{4}{50} = 0.08 \\ w_3 &= \frac{-4}{50} = -0.08 \\ w_4 &= \frac{3}{50} = 0.06 \end{aligned}$$

Jawab : B

23. Sebuah regresi linier digunakan untuk mengestimasikan 10 titik (X_i, Y_i). Estimasi α adalah $\hat{\alpha}$ dan estimasi β adalah $\hat{\beta}$.
Diketahui pula:

   i $\sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i - \bar{Y})^2 = 49$

   ii Variansi sampel dari Y adalah 8

   Hitunglah $\sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i - Y_i)^2$

   A. 23

B. 26

C. 28

D. 30

E. 32

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$Var(\hat{Y}) = \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{n-1}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
Var(\hat{Y}) &= \frac{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2 + \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{n-1} \\
Var(\hat{Y}) &= \frac{\sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - Y_i)^2 + \sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - \bar{Y})^2}{10-1} \\
8 &= \frac{\sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - Y_i)^2 + 49}{9} \\
\sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - Y_i)^2 &= 23
\end{aligned}$$

Jadi, $\sum(\hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i - Y_i)^2 = 23$

Jawab : A

24. Sebuah model regresi linier $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$ digunakan untuk mengestimasi 8 data pengamatan.
Diketahui:

i $\hat{\beta} = 2.075$

ii $\sum(X_i - \bar{X})^2 = 38$

iii $\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = 185$

Hitunglah R^2 (dibulatkan 3 desimal)

A. 0.584

B. 0.684

C. 0.784

D. 0.884

E. 0.984

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$R^2 = \hat{\beta}_2^2 \left(\frac{\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} \right)$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} R^2 &= \hat{\beta}_2^2 \left(\frac{\sum(X_2 - \bar{X}_2)^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2} \right) \\ &= (2.075)^2 \left(\frac{38}{185} \right) \\ &= 0.884 \end{aligned}$$

Jawab : D

25. Sebuah model regresi linier yang digunakan untuk mengestimasikan 6 data pengamatan menghasilkan nilai $\bar{R}^2 = 0.685$.
Jika model yang sama digunakan untuk mencocokkan 10 data pengamatan yang serupa, berapakah nilai expektasi dari R^2 ?

A. 0.68

B. 0.70

C. 0.72

D. 0.74

E. 0.76

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah :

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-k}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} \bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{n-k} \\ 0.685 &= 1 - \frac{(1 - R^2)(10-1)}{10-2} \\ 0.315 &= \frac{(1 - R^2)(9)}{8} \\ R^2 &= 0.72 \end{aligned}$$

Jadi, nilai expektasi dari R^2 adalah 0.72.

Jawab : C

26. Sebuah regresi dua variabel digunakan untuk mengestimasi 100 titik data.
    Diketahui:
    i $\bar{X} = 140$
    ii $\sum X_i^2 = 5256000$
    iii ESS (error of squares) = 540000

    Hitunglah $Cov[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$ (dibulatkan 2 desimal).

    A. -0.18
    B. -0.23
    C. -0.29
    D. -0.36
    E. -0.44

    Pembahasan:
    Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{ESS}{N-2} \\
\sum (X_2 - \bar{X})^2 &= \sum X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum X_i\right)^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X} \\
Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \frac{-\bar{X}.\sigma^2}{\sum (X_2 - \bar{X})^2}
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{ESS}{N-2} \\ &= \frac{540000}{100-2} \\ &= 5510.2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum(X_2-\bar{X})^2 &= \sum X_i^2 - n\bar{X} \\ &= 5256000 - 100(140)^2 \\ &= 3296000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta}) &= \frac{-\bar{X}.\sigma^2}{\sum(X_2-\bar{X})^2} \\ &= \frac{-140(5510.2)}{3296000} \\ &= -0.23\end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $Cov[\hat{\alpha},\hat{\beta}]$ adalah -0.23

Jawab : B

27. Sebuah regresi linier digunakan untuk mencocokkan suatu deret waktu dengan 30 pengamatan. Diketahui:

i $\hat{\varepsilon}_1 = -8$

ii $\hat{\varepsilon}_{30} = 10$

iii $\sum_{t=1}^{30} \hat{\varepsilon}_t^2 = 3200$

iv $\sum_{t=1}^{30} \hat{\varepsilon}_t \times \hat{\varepsilon}_{t-1} = 760$

Hitunglah statistik Durbin-Watson (dibulatkan 2 desimal).

A. 1.27

B. 1.37

C. 1.47

D. 1.57

E. 1.67

Pembahasan:

Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \\
&= \frac{\sum_{t=2}^{30}(\hat{\varepsilon}_t^2 - 2\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} + \hat{\varepsilon}_{t-1}^2)}{\sum_{t=2}^{30}\hat{\varepsilon}_t^2} \\
&= \frac{\sum_{t=2}^{30}\hat{\varepsilon}_t^2 - 2\sum_{t=2}^{30}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1} + \sum_{t=2}^{30}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2)}{\sum_{t=2}^{30}\hat{\varepsilon}_t^2} \\
&= \frac{(3200-(-8)^2) - 2(760) + (3200 - 10^2)}{3200} \\
&= 1.47375 \\
&\approx 1.47
\end{aligned}$$

Jadi, statistik Durbin-Watson adalah 1.47

Jawab : C

28. Anda melakukan analisis regresi sederhana dan telah menentukan bahwa nilai statistik uji Durbin-Watson adalah 0.7

    Hitunglah nilai aproksimasi dari koefisien autokorelasi sampel (*sample autocorrelation coefficient*) untuk mengukur hubungan antara residual yang berurutan.

    A. 0.65

    B. 0.60

    C. 0.55

    D. 0.50

    E. 0.40

    Pembahasan:

    Rumus yang digunakan adalah :

$$\hat{p} = 1 - \frac{d}{2}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{p} &= 1-\frac{d}{2}\\ &= 1-\frac{0.7}{2}\\ &= 0.65\end{aligned}$$

Jadi, nilai aproksimasi dari koefisien autokorelasi sampel (*sample autocorrelation coefficient*) untuk mengukur hubungan antara residual yang berurutan adalah 0.65

Jawab : A

29. Anda mengestimasikan model regresi linear sederhana berdasarkan pengamatan atas 8 data harian berikut ini:

Hari	Y	X
1	11	2
2	20	2
3	30	3
4	39	3
5	51	4
6	59	4
7	70	5
8	80	5

Dengan menggunakan metode least square, Anda menentukan estimasi regresi linier sebagai

$$\hat{Y} = -25 + 20X$$

Hitunglah nilai dari statistik Durbin Watson (dibulatkan 2 desimal).

A. 2.60

B. 2.82

C. 3.04

D. 3.26

E. 3.48

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

di mana $\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{Y}_t$.

Dengan demikian diperoleh:

Hari	Y	X	$\hat{Y}$	$\hat{\varepsilon}$	$\hat{\varepsilon}^2$	$(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2$
1	11	2	15	-4	16	0
2	20	2	15	5	25	81
3	30	3	35	-5	25	100
4	39	3	35	4	16	81
5	51	4	55	-4	16	64
6	59	4	55	4	16	64
7	70	5	75	-5	25	81
8	80	5	75	5	25	100

Catat bahwa $\sum \hat{\varepsilon}^2 = 164$ dan $\sum(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2 = 571$.

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2} \\
&= \frac{571}{164} \\
&= 3.48
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai dari statistik Durbin Watson adalah 3.48

Jawab : E

30. Anda mengestimasikan model regresi linear $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$ berdasarkan data berikut ini:

Y	3	9	14
X	1	4	10

Hitunglah estimasi *heteroscedasticity-consistent* dari $Var[\hat{\beta}]$ (dibulatkan 4 desimal)

A. 0.0129

B. 0.0139

C. 0.0149

D. 0.0159

E. 0.0169

Pembahasan:
Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{S_{XX}}{S_{XY}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\ \varepsilon_i &= Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}) \\ Var(\hat{\beta}) &= \frac{S_{XX}\varepsilon_i^2}{(S_{XX})^2}\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	S_{XX}	S_{XY}	$\hat{Y}_i$	ε_i	ε_i^2	$S_{XX}\varepsilon_i^2$
1	1	3	-4	-5.67	16	22.67	4	-1	1	16
2	4	9	-1	0.33	1	-0.33	7.5	1.5	2.25	2.25
3	10	14	5	5.33	25	26.67	14.5	-0.5	0.25	6.25
Total	15	26	0	0	42	49	26	0	3.5	24.5
Mean	5	8.67								

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{S_{XX}}{S_{XY}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \\ &= \frac{49}{42} \\ &= 1.1667\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\hat{\beta}) &= \frac{S_{XX}\varepsilon_i^2}{(S_{XX})^2} \\ &= \frac{24.5}{42^2} \\ &= 0.0139\end{aligned}$$

Jadi, estimasi *heteroscedasticity-consistent* dari $Var[\hat{\beta}]$ adalah 0.0139

Jawab : B

8 A50 Periode Mei 2018

1. Diketahui table mortalita dengan periode seleksi 2 tahun sebagai berikut

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	$x+2$
40	0,115	0,140	0,150	42
41	0,120	0,135	0,160	43
42	0,130	0,145	0,190	44

Tingkat kematian menyebar secara seragam di setiap usia. Tentukanlah ${}_{1,6}p_{[41]+0,4}$

A. 0,81

B. 0,82

C. 0,83

D. 0,84

E. 0,85

Pembahasan:

Diketahui kematian menyebar secara UDD, maka

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \\ {}_{1,6}p_{[41]+0,4} &= 1 - {}_{1,6}q_{[41]+0,4} \\ &= 1 - \frac{1,6q_{[41]}}{1-0,4q_{[41]}} \\ &= 1 - \frac{(1,6)(0,12)}{1-(0,4)(0,12)} \\ &= 0,80 \end{aligned}$$

Jawaban yang paling mendekati adalah 0,81

Jawab: A.

2. Untuk sebuah tabel *double decrement* , diberikan

Usia x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
20	1000	70	100
21		66	
22	650		

Setiap *decrement* menyebar seragam untuk tiap usia. Hitunglah ${q'}_{(21)}^{(2)}$

A. 0,1434

B. 0,1560

C. 0,1760

D. 0,1800

E. 0,2000

Pembahasan:
Setiap decrement menyebar seragam (UDD) sehingga

$$\begin{aligned} d_{20}^{(\tau)} &= \sum_{j=1}^{2} d_x^{(j)} = 170 \\ d_{20}^{(\tau)} &= l_{20}^{(\tau)} - l_{21}^{(\tau)} \end{aligned}$$

maka

$$l_{21}^{(\tau)} = l_{20}^{(\tau)} - d_{20}^{(\tau)} = 1000 - 170 = 830$$

selanjutnya

$$\begin{aligned} d_{21}^{(\tau)} &= l_{21}^{(\tau)} - l_{22}^{(\tau)} = 830 - 650 = 180 \\ d_{21}^{(\tau)} &= d_{21}^{(1)} + d_{21}^{(2)} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} d_{21}^{(2)} &= 180 - 66 = 114 \\ q_{21}^{(2)} &= \frac{d_{21}^{(2)}}{l_{21}^{(\tau)}} = \frac{114}{830} \\ q_{21}^{(\tau)} &= \frac{d_{21}^{\tau}}{l_{21}^{(\tau)}} = \frac{180}{830} \end{aligned}$$

Selanjutny dipunyai ${q'}_{21}^{(2)}$ artinya

$$\begin{aligned}
{q'}_{21}^{(2)} &= 1 - {p'}_{21}^{(2)} \\
&= 1 - \left(p_{21}^{(\tau)}\right)^{q_{21}^{(2)}/q_{21}^{(\tau)}} \\
&= 1 - \left(\frac{650}{830}\right)^{\frac{114/830}{180/830}} \\
&= 0,1434
\end{aligned}$$

Jawab. A.

3. Berikut diberikan tabel *double decrement*

   a) $\mu_{x+0,5}^{(1)} = 0,02$

   b) $q_x^{(2)} = 0,01$

   c) Setiap *decrement* menyebar secara seragam pada tiap usia dalam tabel *single decrement* nya

   Hitunglah $p_x^{(1)}$

   A. 0,9750

   B. 0,9803

   C. 0,9831

   D. 0,9860

   E. 0,9901

   Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\frac{q_x^{(1)}}{1 - 0,5q_x^{(\tau)}} &= 0,02 \\
\frac{q_x^{(1)}}{1 - 0,5(0,01 + q_x^{(1)})} &= 0,02 \\
q_x^{(1)} &= 0,02(1 - 0,5(0,01 + q_x^{(1)})) \\
q_x^{(1)} &= 0,02(1 - 0,005 + 0,5q_x^{(1)}) \\
q_x^{(1)} &= 0,02 - 0,0001 + 0,01q_x^{(1)} \\
1,01q_x^{(1)} &= 0,02 - 0,0001 \\
q_x^{(1)} &= 0,1970297
\end{aligned}$$

maka

$$p_x^{(1)} = 1 - q_x^{(1)} = 1 - 0,1970297 = 0,9803$$

Jawab. B.

4. Diberikan

   i.

$$\mu_{x+t} = \begin{cases} 0,03 & , \quad \text{jika } 0 \leq t < 1 \\ 0,08 & , \quad \text{jika } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

   ii. Y=min$(T_x, 2)$

   Hitunglah $E(Y)$

   A. 1,52

   B. 1,61

   C. 1,73

   D. 1,80

   E. 1,92

   Pembahasan:

$$\begin{aligned}
E[Y] &= E[\min(T_x, 2)] \\
&= \int_0^2 t_t p_x \mu_{x+t}\, dt + 2_t p_x \\
&= \int_0^1 t_t p_x \mu_{x+t}\, dt + \int_0^2 {}_t p_x \mu_{x+t}\, dt + 2_t p_x \\
&= \int_0^1 te^{-0,03t}.(0,03)dt + \int_1^2 te^{-0,08t}(0,08)dt + 2e^{-\int_0^2 \mu_t dt} \\
&= \int_0^1 te^{-0,03t}.(0,03)dt + \int_1^2 te^{-0,08t}(0,08)dt + 2e^{-\left(\int_0^1 \mu_t dt + \int_1^2 \mu_t dt\right)} \\
&= \int_0^1 te^{-0,03t}.(0,03)dt + \int_1^2 te^{-0,08t}(0,08)dt + 2e^{-\left(\int_0^1 0,03dt + \int_1^2 0,08dt\right)} \\
&= 0,03(0,490112) + 0,08(1,32482) + 2e^{-(0,03+0,08)} \\
&= 1,912 \\
&= 1,92
\end{aligned}$$

   Jawab. E.

5. Diberikan

$$\mu_x = \begin{cases} 0,03 & , \text{ jika } 30 \leq x < 40 \\ 0,04 + 0,001(x-40)^2 & , \text{ jika } 40 \leq x < 50 \end{cases}$$

Hitunglah ${}_{4|11}q_{30}q_{30}$

A. 0,305

B. 0,325

C. 0,355

D. 0,375

E. 0,400

Pembahasan:

$$_{t|u}q_x = {}_tp_x \cdot {}_uq_{x+t}$$

Dengan mengaplikasikan rumus di atas, sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} {}_4p_{30} &= e^{-\int_{30}^{34} 0{,}03dx} = 0,88692 \\ {}_{11}p_{34} &= e^{-\left(\int_{34}^{40} 0{,}03dx + \int_{40}^{45} 0{,}04+0{,}001(x-40)^2dx\right)} = 0,655953 \\ {}_{4|11}q_{30} &= {}_4p_{30} \cdot {}_{11}q_{34} \\ &= {}_4p_{30} \cdot (1 - {}_{11}p_{34}) \\ &= (0,88692) \times (1 - 0,655953) \\ &= 0,305 \end{aligned}$$

Jawab. A.

6. Jika $l_x = 140$ dan $q_x = \dfrac{1}{5}$. Hitunglah $l_{x+1/4}$ menggunakan asumsi *Hyperbolic (Balducci)*

A. 129

B. 130

C. 131

D. 132

E. 133

Pembahasan:

Dalam asumsi Hyperbolic dipunyai:

$$l_{x+s} = \frac{l_{x+1}}{p_x + sq_x}$$

dimana

$$\begin{aligned} p_x &= 1 - q_x \\ &= 1 - \frac{1}{5} = 0,8 \\ l_{x+1} &= l_x.p_x = (0,8)(140) = 112 \end{aligned}$$

sehingga

$$l_{x+1/4} = l_{x+0,25} = \frac{l_{x+1}}{p_x + 0,25q_x} = \frac{112}{0,8 + (0,25)(0,2)} = \frac{112}{0,85} = 131,76 = 132$$

Jawab. D.

7. Diketahui sebuah proses stokastik, *autoregresive process first order*, AR(1):

$$y_t = 0,9y_{t-1} + 0,8 + \varepsilon_t$$

Dimana forecast untuk 6 periode merupakan

$$\hat{y}_T(6) = 0,9y_t + Z$$

Tentukanlah Z.

A. 2,50

B. 3,75

C. 3,95

D. 4,10

E. 5,20

Pembahasan:
Diketahui:

$$\begin{aligned} y_t &= 0,9y_{t-1} + 0,8 + \varepsilon_t \\ &= \phi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \hat{y}_T(6) = 0,9y_t + Z \end{aligned}$$

$$\hat{y}_T(l) = \phi_1^l y_T + \left(\phi_1^{l-1} + \phi_1^{l-2} + ... + \phi_1 + 1\right)\delta$$

Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} Z &= \left(\phi_1^5 + \phi_1^4 + \phi_1^3 + \phi_1^2 + \phi_1 + 1\right)\delta \\ &= \left(0,9^5 + 0,9^4 + 0,9^3 + 0,9^2 + 0,9 + 1\right)0,8 \\ &= 3,748472 \\ &\approx 3,75 \end{aligned}$$

Jawab. B.

8. Anda mencocokkan model berikut dalam empat pengamatan:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,3,4$$

Diberikan data sebagai berikut:

i	X_{2i}	X_{3i}
1	-3	-1
2	-1	3
3	1	-3
4	3	1

Estimasi *least square* dari β_3, dinyatakan sebagai $\hat{\beta_3} = \sum_{i=1}^{4} w_i Y_i$

Tentukan nilai dari (w_1, w_2, w_3, w_4)

A. $(-\frac{1}{20}, \frac{3}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{20})$

B. $(-\frac{1}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{1}{20})$

C. $(\frac{1}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{3}{20}, -\frac{1}{20})$

D. $(-\frac{3}{20}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{3}{20})$

E. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

Pembahasan:

Diketahui:

$$\hat{\beta_3} = \sum_{i=1}^{4} w_i \, Y_i = \sum_{i=1}^{4} \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right] Y_i$$

sehingga

$$w_i = \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right]$$

di mana

$$\bar{x_3} = \frac{-2 + 4 + (-4) + 2}{4} = 0$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (-2)^2 + (4)^2 + (-4)^2 + (2)^2 = 40$$

sehingga

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{-2}{40} = \frac{-1}{20} \\ w_2 &= \frac{4}{40} = \frac{2}{20} \\ w_3 &= \frac{-4}{40} = \frac{-2}{20} \\ w_4 &= \frac{2}{40} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Jawab. A.

9. Untuk selang estimasi $(x, x+2]$, diketahui data sebagai berikut:

	$s = 0$	$s = 1$
Jumlah orang yang hidup di umur $x + s$	200	170
Jumlah orang yang keluar di umur $x + s + 0,5$	20	22
Jumlah peserta baru di umur $x + s + 0,25$	40	32
Jumlah orang yang keluar di umur $x + s + 0,75$	20	28
Jumlah orang yang bertahan di umur $x + s + 1$	170	140

Dengan menggunakan metode *actuarial exposure*, hitunglah estimasi ${}_2q_x$, yaitu kemungkinan orang berumur x tahun yang akan meninggal dalam 2 tahun berikutnya.

A. 0,198

B. 0,200

C. 0,202

D. 0,204

E. 0,206

Pembahasan:

$$\hat{q}_x = \frac{d_x}{n_x - (1-s).c_x + (1-r)k_x}$$

untuk $\hat{q}_x$

$$\hat{q}_x = \frac{30}{200 - 20(1-0,5) + 40(1-0,25) - 20(1-0,75)} = 0,139535$$

untuk $\hat{q}_{x+1}$

$$\hat{q}_x = \frac{30}{170 - 22(1-0,5) + 32(1-0,25) - 28(1-0,75)} = 0,068182$$

sehingga

$$\begin{aligned}
{}_2\hat{q}_x &= 1 - p_x.p_{x+1} \\
&= 1 - (1-\hat{q}_x)(1-\hat{q}_{x+1}) \\
&= 1 - (1-0,139535)(1-0,068182) \\
&= 0,198203
\end{aligned}$$

Jawab. A.

10. Dalam sebuah model dua decrement, diberikan:
    a) $q_x^{(1)} = 0,05$
    b) $q_x^{(2)} = 0,15$
    c) Setiap decrement menyebar seragam dalam usia pada tabel decrement

    Tentukanlan $\mu_{x+0,2}^{(1)}$

    A. 0,0490

    B. 0,0521

    C. 0,0560

    D. 0,0590

    E. 0,0610

    Pembahasan:

Untuk kasus UDD

$$\mu_{x+t}^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - tq_x^{(\tau)}}$$

Dengan mengaplikasikan rumus di atas, sehingga

$$\begin{aligned} q_x^{(\tau)} &= q_x^{(1)} + q_x^{(2)} = 0,05 + 0,15 = 0,2 \\ \mu_{x+0,2}^{(1)} &= \mu_x^{(1)}(0,2) = \frac{q_x^{(1)}}{{}_{0,2}p_x^{(\tau)}} = \frac{q_x^{(j)}}{1 - 0,2q_x^{(\tau)}} \end{aligned}$$

sehingga $\dfrac{q_x^{(j)}}{1 - 0,2q_x^{(\tau)}} = \dfrac{0,05}{1 - 0,2(0,2)} = \dfrac{0,05}{0,96} = 0,0521$

Jawab. B.

11. Diketahui bahwa mortalita mengikuti

$$l_x = 100 - x, \quad 0 \leq x \leq 100$$

Hitunglah $e_{75,2}$

A. 10,70

B. 10,90

C. 11,10

D. 11,50

E. 11,90

Pembahasan:
Berdasarkan fungsi l_x maka mortalitas ini mengikuti De Moivre's Law

$$e_x = \frac{\omega - x}{2} - \frac{1}{2}$$

dengan $\omega = 100$ sehingga

$$e_{75,2} = \frac{(100 - 75,2)}{2} - \frac{1}{2} = 12,4 - 0,5 = 11,9$$

Jawab. E.

12. Dalam sebuah studi mortalita, ada 20 orang. Kematian terjadi pada waktu 1, 4, 5, dan 7. Satu orang *withdraw* dari studi pada waktu 2, dan dua orang *withdraw* dari studi pada waktu 6.

Sisa 13 orang bertahan sampai waktu ke 10. Hitunglah estimasi *variance* dari *product limit estimator* $S(10)$ menggunakan formula *Greenwood*.

A. 10,0075

B. 0,0082

C. 0,0090

D. 0,0093

E. 0,0103

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\hat{S}(t) &= \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{r_j - d_j}{r_j} \right) \\
\hat{S}(10) &= \left(\frac{20-1}{20} \right) \left(\frac{18-1}{18} \right) \left(\frac{17-1}{17} \right) \left(\frac{14-1}{14} \right) \\
&= \left(\frac{19}{20} \right) \left(\frac{17}{18} \right) \left(\frac{16}{17} \right) \left(\frac{13}{14} \right) \\
&= 0,784127
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{V}[\hat{S}(t)] &= [\hat{S}(t)]^2 \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) \\
\hat{V}[\hat{S}(10)] &= [\hat{S}(10)]^2 \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)} \right) \\
&= [0,784127]^2 \left(\frac{1}{(20)(19)} + \frac{1}{(18)(17)} + \frac{1}{(17)(16)} + \frac{1}{(14)(13)} \right) \\
&= [0,784127]^2 (0,015071) \\
&= 0,009266 \\
&\approx 0,0093
\end{aligned}
$$

Jawab. D.

13. Dalam studi mortalita, 2 kematian terjadi pada waktu 3 dan 3 kematian pada waktu 5. Tidak ada kematian lain sebelum waktu 5. Estimasi *Variance* dari Nelson-alen $H(3)$ adalah 0,002222. Sedangkan estimasi variance dari Nelson-alen $H(5)$ adalah 0,007222

    Tentukanlah jumlah yang *withdraw* di antara waktu 3 dan 5.

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

E. 10

Pembahasan:

$$\text{Estimasi variance } [\hat{H}(t)] = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j}{r_j^2}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(3) &= \frac{2}{r_1^2} \\ 0,002222 &= \frac{2}{r_1^2} \\ r_1^2 &= 900,09 \\ r_1 &\approx 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}(5) &= \frac{3}{r_2^2} \\ 0,007222 &= \frac{3}{r_2^2} \\ r_2^2 &= 415.4 \\ r_2 &= 20,381364 \\ r_2 &\approx 20 \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $30 = 20 + 2 + c \Rightarrow c = 8$. Jadi, jumlah yang *withdraw* di antara waktu 3 dan 5 adalah 8.

Jawab. C.

14. Diberikan

    a) Kematian menyebar secara seragam pada tiap usia

    b) $\mu_{45,5} = 0,3$

    Hitunglah $e^o_{45:\overline{1}|}$

A. 0,8624

B. 0,8712

C. 0,8813

D. 0,8945

E. 0,9001

Pembahasan:
Diketahui bahwa untuk UUD nilai $e^{o}_{45:\overline{1}|} = p_x + \frac{1}{2}q_x$ dan $\mu_{x+0,5} = \dfrac{q_x}{1-0,5q_x}$ sehingga

$$\begin{aligned}
\mu_{45,5} &= \frac{q_{45}}{1-0,5q_{45}} \\
(0,3)(1-0,5q_{45}) &= q_{45} \\
0,3-0,15q_{45} &= q_{45} \\
0,3 &= 1,15q_{45} \\
q_{45} &= \frac{0,3}{1,15} = 0,261 \quad (*)
\end{aligned}$$

dari $(*)$ diperoleh

$$p_{45} = 1 - q_{45} = 1 - 0,261 = 0,739$$

selanjutnya

$$e^{o}_{45:\overline{1}|} = p_{45} + \frac{1}{2}q_{45} = 0,739 + (0,5)(0,261) = 0,8695 = 0,87$$

Jawab. B.

15. Anda diberikan:

    i. $j(x) = 1,3^{x-100}$

    ii. $\mu_x = j(x)/[1+j(x)]$

    Hitunglah q_{103}/q_{102}

    A. 1,01

    B. 1,02

    C. 1,03

    D. 1,04

    E. 1,06

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_np_x &= \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu_x dx\right) \\
p_{103} &= \exp\left(-\int_{103}^{104} \frac{1,3^{x-100}}{1+1,3^{x-100}} dx\right) = 0,48947 \\
p_{102} &= \exp\left(-\int_{102}^{103} \frac{1,3^{x-100}}{1+1,3^{x-100}} dx\right) = 0,51782
\end{aligned}
$$

sehingga $\dfrac{q_{103}}{q_{102}} = \dfrac{1-p_{103}}{1-p_{102}} = \dfrac{1-0,48947}{1-0,51782} = 1,058 = 1,06$

Jawab. E.

16. Sebuah sampel yang merupakan 10 buah mesin dengan waktu kegagalan terjadi (dalam hari) $3, 4, 5, 7, 7, 8, 10, 10, 10, 12$. Asumsikan model survival yang digunakan adalah exponensial, estimasikanlah λ dengan menggunakan metode median.
(*Pdf dari sebaran exponensial* $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$)

A. 0,087

B. 0,092

C. 0,095

D. 0,100

E. 0,130

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
x_{0,5} &= (1-0,5)x_5 + 0,5x_6 \\
&= (0,5)(7) + (0,5)(8) \\
&= 7,5 \\
F(x_{0,5}) &= 1 - e^{-\chi_{0,5}^2} \\
0,5 &= 1 - e^{-\chi_{0,5}^2} \\
e^{-\chi_{0,5}^2} &= 0,5 \\
-\chi_{0,5}\hat{\lambda} &= \ln(0,5) \\
\hat{\lambda} &= \frac{\ln(0,5)}{-7,5} = 0,09242 \approx 0,092
\end{aligned}
$$

Jawab. B.

17. Untuk sebuah tabel mortalita dengan dua tahun seleksi, diberikan :

    i. $q_{[x]} = (1-2k)q_x$ untuk semua x

    ii. $q_{[x]+1} = (1-k)q_{x+1}$ untuk semua x

    iii. $l_{[32]} = 90$

    iv. $l_{32} = 100$

    v. $l_{33} = 90$

    vi. $l_{34} = 63$

    Hitunglah $q_{[32]}$

    A. 1/12

    B. 2/25

    C. 1/15

    D. 2/31

    E. 2/35

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
q_{32} &= \frac{l_{32}-l_{33}}{l_{32}} \\
\frac{q_{[31]+1}}{1-k} &= \frac{l_{32}-l_{33}}{l_{32}} \\
\frac{q_{[32]}}{1-2k} &= \frac{1}{10} \\
q_{[32]} &= (1-2k)\frac{1}{10} \quad (*) \\
q_{33} &= \frac{l_{33}-l_{34}}{l_{32}} \\
\frac{q_{[32]+1}}{1-k} &= \frac{l_{33}-l_{34}}{l_{33}} \\
\frac{q_{[33]}}{1-2k} &= \frac{3}{10} \\
q_{[32]+1} &= \frac{3}{10}(1-k) \quad (**)
\end{aligned}$$

Berdasarkan (*), misalkan $x = l_{[32]+1}$, maka

$$\begin{aligned}
90 - x &= 9(1-2k) \\
x &= 90 - 9 + 18k \\
x &= 81 + 18k
\end{aligned}$$

Subtitusi nilai x ke dalam (**)

$$\begin{aligned}
\frac{81+18k-63}{81+18k} &= \frac{3-3k}{10} \\
\frac{18k+18}{81+18k} &= \frac{3-3k}{10} \\
180k+180 &= 243-243k+54k-54k^2 \\
180k+180 &= 243-189k-54k^2 \\
54k^2+369k-63 &= 0 \\
6k^2+41k-7 &= 0 \\
(6k-1)(k+7) &= 0
\end{aligned}$$

artinya $k=-7$ dan $k=\frac{1}{6}$

untuk $k=-7$ diperoleh $q_{[32]}=(1-2(-7))\frac{1}{10}=\frac{15}{10}$ (tidak memenuhi)

untuk $k=\frac{1}{6}$ diperoleh $q_{[32]}=(1-2(\frac{1}{6}))\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$

Jawab. C.

18. Untuk suatu model $ARMA(1,1)$ diberikan persamaan sebagai berikut:

$$y_t = 0,9y_{t-1}+3+\varepsilon_t-0,4\varepsilon_{t-1}$$

Hitunglah ρ_1

A. 0,62

B. 0,73

C. 0,81

D. 0,88

E. 0,92

Pembahasan:

Berdasarkan $y_t=0,9y_{t-1}+3+\varepsilon_t-0,4\varepsilon_{t-1}$ diperoleh $\phi=0,9$ dan $\theta=0,4$ sehingga

$$\rho_1 = \frac{(1-(0,4)(0,9))((0,9)-(0,4))}{1-2(0,9)(0,4)+(0,4)^2}(0,9)^{1-1}=0,727=0,73$$

Jawab. B.

19. Diketahui dari 50 pengamatan

$$\sum \hat{\varepsilon}^2 = 100$$
$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 200$$
$$\widehat{Var}(\varepsilon) = 30$$

Hitunglah $\bar{R}^2$ untuk $k = 1$

A. 0,34

B. 0,44

C. 0,50

D. 0,54

E. 0,64

Pembahasan:

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = 200} \\ &= 1 - \frac{100}{200} = 0,5 \\ \bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1 - R^2)(n-1)}{(n-k)} \\ &= 1 - \frac{(1 - 0,5)(50 - 1)}{(50 - 1)} = 0,5 \end{aligned}$$

Jawab. C.

20. Diketahui suatu proses autoregressive-moving average ARMA(1,1)

$$y_t = 0,9y_{t-1} + 2 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$$

Hitunglah ρ_1

A. 0,72

B. 0,74

C. 0,76

D. 0,78

E. 0,80

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\rho_x(h) &= \phi\rho_x(h-1)\\ \rho_x(2) &= \phi\rho_x(2-1) = \phi\rho_x(1)\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\rho_x(2) &= \phi\left(\frac{(\theta+\phi)(1+\theta\phi)}{1+2\theta\phi+\theta^2}\right)\\ &= (0,9)\left(\frac{(-0,2+0,9)+(1+(-0,2)(0,9))}{1+2(-0,2)(0,9)+(-0,2)^2}\right)\\ &= 0,759\\ &= 0,76\end{aligned}$$

Jawab. C.

21. Diketahui suatu proses *moving average order* 2, MA(2)

$$y_t = 0,3 + \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1} - 0,4\varepsilon_{t-2}$$

Berapakah nilai optimal dari 2 langkah ke depan dari model tersebut yang dibuat pada waktu t, jika error dari model pada waktu t,$t-1$ and $t-2$ masing ?masing 0,06 dan -0,1 dan 0.2 dan jika diketahui pula nilai dari deret y pada waktu t-1 adalah -0,4?

A. 0

B. 0,23

C. 0,24

D. 0,30

E. 0,64

Pembahasan:
Diketahui : $\varepsilon_t = 0,06$
$\varepsilon_{t-1} = -0,1$
$\varepsilon_{t-2} = 0,2$
$\mu = 0,3$
$\theta_1 = -0,5$
$\theta_2 = 0,4$
$E(y_t) = E[0,3 + \varepsilon_t + 0,5\varepsilon_{t-1} - 0,4\varepsilon_{t-2}] = 0,3$

Jawab. D.

22. Jika diketahui

    (i) $\mu_x = F + e^{ex}, x \geq 0$

    (ii) ${}_{0},4p_0 = 0{,}48$

    Hitunglah nilai F (dibulatkan 3 desimal).

    A. $-0{,}090$

    B. $-0{,}200$

    C. 1,090

    D. 0,303

    E. 0,200

    Pembahasan:

$$
{}_xp_0 = \exp\Big[-\int_0^x \mu(s)\ ds\Big]
$$

Dengan demikian diperoleh :

$$
\begin{aligned}
{}_{0,4}p_0 &= \exp\Big[-\int_0^{0,4} F + e^{2s}\ ds\Big] \\
0{,}48 &= \exp\Big[-0{,}4F - \frac{e^{0,8} - e^0}{2}\Big] \\
\ln(0{,}48) &= -0{,}4F - 0{,}612771 \\
F &= \frac{0{,}733969 - 0{,}612771}{0{,}4} \\
&= 0{,}302995
\end{aligned}
$$

Jawab. D.

23. Sebuah regresi linier dengan dua variabel bebas dan satu konstan digunakan untuk mencocokkan suatu deret dengan 50 pengamatan, diketahui bahwa:

$$
\sum_{t=2}^{50} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2 = 90
$$

$$
\sum_{t=1}^{50} \hat{\varepsilon}_t{}^2 = 59
$$

Diberikan tabel Durbin-Watson Test

N	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
50	1,5	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,32

d_L:batas bawah dari *critical value*
d_U:batas atas dari *critical value*

Apa keputusan yang cocok pada uji Durbin-Watson tersebut?

A. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang positif

B. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang negatif

C. *Residuals* tidak memiliki *serial correlation*

D. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang tak-negatif

E. Hasil uji tidak dapat disimpulkan

Pembahasan:
Diketahui:

Statistika Tes

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{50} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{50} \hat{\varepsilon}_t{}^2}$$

Jika $d = 2$ maka tidak ada korelasi
Jika $0 < d < 2$ maka positif korelasi
Jika $2 < d < 4$ maka negatif korelasi

Untuk menguji korelasi positif:

- Jika $d < d_L$ ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi positif
- Jika $d > d_U$ Tidak ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi positif
- Jika $d_L < d < d_U$ Tes tidak dapat disimpulkan

Untuk menguji korelasi negatif:

- Jika $(4 - d) < d_L$ ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi negatif
- Jika $(4 - d) > d_U$ tidak ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi negatif
- Jika $d_L < (4 - d) < d_U$ Tes tidak dapat disimpulkan

Diperoleh nilai d:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^{50} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{50} \hat{\varepsilon}_t{}^2} \\ &= \frac{90}{50} = 1,53 \end{aligned}$$

Diperoleh $0 < d < 2$ dan $d_L < d < d_U$ dimana $1,5 < d < 1,59$, sehingga kesimpulan yang ditarik "Hasil uji tidak dapat disimpulkan"

Jawab: E.

24. Dalam sebuah regresi model diberikan Untuk *unrestricted model*:

$$ESS_{UR} = 90$$
$$TSS_{UR} = 190$$

Untuk *restricted model*:

$$ESS_R = 40$$
$$TSS_R = 60$$

Hitunglah Statistik $F_{1,98}$

A. 40

B. 42

C. 43

D. 44

E. 45

Pembahasan:

$$\begin{aligned} R^2_{UR} &= 1 - \frac{ESS_{UR}}{TSS_{UR}} = 1 - \frac{90}{190} = \frac{100}{190} \\ R^2_R &= 1 - \frac{ESS_R}{TSS_R} = 1 - \frac{40}{60} = \frac{20}{60} \\ F(1,98) &= \frac{\left(R^2_{UR} - R^2_R\right)/1}{(1 - \frac{100}{190})/(98)} \\ &= 39,925 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Jawab. A.

25. Sebuah regresi linier

$$Y_i = 1 + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Y	1	3	5
X	2	4	8

Hitunglah estimasi heteroscedasticity-consistent dari $Var[\hat{\beta}]$

A. 0,0011

B. 0,0015

C. 0,0017

D. 0,0019

E. 0,0021

Pembahasan: Terlebih dahulu akan ditentukan $S_{XX\varepsilon_i^2}$ dan S_{XX} dengan menggunakan beberapa formula berikut

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X - \bar{X})^2} \\
\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} \\
\varepsilon_i &= Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}\right) \\
Var[\hat{\beta}] &= \frac{S_{XX\varepsilon_i^2}}{(S_{XX})^2}
\end{aligned}$$

Dinyatakan dalam bentuk tabel menjadi :

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	S_{XX}	S_{XY}	$\bar{Y}_i$	ε_i	ε_i^2	$S_{XX\varepsilon_i^2}$
1	2	1	-2,667	-2	7,11	5,33	1,285714	-0,28571	0,081633	0,5805
2	4	3	-0,667	0	0,444	0	2,571429	0,428571	0,183673	0,0816
3	8	5	3,33	2	11,111	6,667	5,142857	-0,14286	0,020408	0,22676
Total	14	9	0	0	18,67	12	9	-6,7E-16	0,285714	0,889
Mean	4,67	3								

$$\begin{aligned}
\hat{\beta} &= \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X - \bar{X})^2} = 0,642857 \\
\hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 0 \\
Var[\hat{\beta}] &= \frac{S_{XX\varepsilon_i^2}}{(S_{XX})^2} = 0,002551
\end{aligned}$$

Jawab. Anulir

26. Sebuah regresi 2 variabel mengestimasi 100 titik,

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

ESS (Error sum of squares)=10000

$\sum X_i^2 = 5000$

Hitunglah standart Error $\hat{\beta}$ dan $\hat{\alpha}$, yaitu $s_{\hat{\beta}}$ dan $s_{\hat{\alpha}}$

A. 0,143 dan 1,010

B. 0,167 dan 1,210

C. 0,182 dan 1,323

D. 0,193 dan 1,433

E. 0,210 dan 1,500

Pembahasan:
Akan dihitung terlebih dahulu $\hat{\sigma}$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{ESS}{n-2} = \frac{10000}{98} \\ &= \sqrt{\frac{10000}{98}} \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} s_{\hat{\beta}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{X_i^2}} = \frac{\sqrt{\frac{10000}{98}}}{\sqrt{5000}} = 0,1428 = 0,143 \\ s_{\hat{\alpha}} &= \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2}}\sigma = \frac{\sqrt{5000}}{\sqrt{(100)(5000)}}\sqrt{\frac{10000}{98}} = 1,01 \end{aligned}$$

Jawab. A.

27. Diberikan model regresi di bawah ini

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$$

Diketahui:
$\sum X_{2i}^2 = 1200$

$\sum X_{3i}^2 = 2200$
$\sum X_{2i}X_{3i} = 2500$
$s^2 = 1000$
Hitunglah $\widehat{COV}(\widehat{\beta_2}, \widehat{\beta_3})$

A. 0,5612

B. 0,6925

C. 0,7125

D. 0,7513

E. 0,8276

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\widehat{COV}(\widehat{\beta_2}, \widehat{\beta_3}) &= \frac{-s^2 \frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sqrt{\sum X_{2i}^2 \sum X_{3i}^2}}}{\left(1 - \left(\frac{\sum X_{2i}X_{3i}}{\sqrt{\sum X_{2i}^2 \sum X_{3i}^2}}\right)^2\right)\left(\sqrt{\sum X_{2i}^2 \sum X_{3i}^2}\right)} \\
&= \frac{-1000 \frac{2500}{\sqrt{(1200)(2200)}}}{\left(1 - \left(\frac{2500}{\sqrt{(1200)(2200)}}\right)^2\right)\sqrt{(1200)(2200)}} = 0,69252
\end{aligned}$$

Jawab. B.

28. Model dengan 48 observasi yang anda miliki, sesuai dengan model berikut:

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$$

Jika diberikan:

Sumber variasi	Derajat Kebebasan	Sum of Square
Regresi	3	103.658
Error	44	69.204

Hitunglah nilai $\bar{R}^2$

A. 0,57

B. 0,58

C. 0,59

D. 0,60

E. 0,61

Pembahasan:

Diketahui :

- $RSS = 69,24$
- $ESS = 103,658$
- $n = 48$
- $k = 4$ karena $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$ memiliki 4 parameter

sehingga

$$\begin{aligned} TSS &= ESS + RSS \\ &= 69,204 + 103,658 \\ &= 172,862 \\ R^2 &= \frac{ESS}{RSS} \\ &= \frac{103,658}{172,862} \\ &= 0,599658 \\ \bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{(n-k)} \\ &= 1 - \frac{(1-0,599658)(47)}{44} \\ &= 0,572362 \end{aligned}$$

Jawab. A.

29. Untuk sebuah *table double decrement*, diberikan:

Usia x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
40	1000	60	55
41	-	-	70
42	750	-	-

Setiap *decrement* menyebar secara uniform, hitunglah nilai ${q'}_{41}^{(1)}$

A. 0,077

B. 0,078

C. 0,079

D. 0,080

E. 0,081

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
l_{41}^{(\tau)} &= l_{40}^{(\tau)} - d_{40}^{(1)} - d_{40}^{(2)} \\
&= 1000 - 60 - 55 \\
&= 885
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{42}^{(\tau)} &= l_{41}^{(\tau)} - d_{41}^{(1)} - d_{41}^{(2)} \\
750 &= 885 - d_{41}^{(1)} - 70 \\
d_{41}^{(1)} &= 65
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{41}^{(1)} &= \frac{d_{41}^{(1)}}{l_{41}^{(\tau)}} = \frac{65}{885} = 0,073446 \\
q_{41}^{(\tau)} &= \frac{d_{41}^{(\tau)}}{l_{41}^{(\tau)}} \\
&= \frac{65+70}{885} = 0,152542 \\
q_{41}^{\prime(1)} &= 1 - p_{41}^{\prime(1)} \\
&= 1 - \left(p_{41}^{(\tau)}\right)^{\frac{q_{41}^{(1)}}{q_{41}^{(\tau)}}} \\
&= 1 - (1 - 0,152542)^{\frac{0,073446}{0,152542}} \\
&= 0,076599
\end{aligned}$$

Jawab. A.

30. Anda mencocokkan model *moving average* order pertama yang *invertible* ke dalam Deret Waktu. Koefisien *autocorellation* dari sample lag 1 adalah -0.40. Hitunglah tebakan awal untuk θ (yaitu parameter *moving average*).

    A. 0.4

    B. 0.5

    C. 0.6

    D. 0.7

    E. 0.8

    Pembahasan:

    Autocorrelation function untuk MA(q) yang *invertible*:

$$\rho_h = -\frac{\theta_h + \sum_{j=1}^{q-h} \theta_j \theta_{j+h}}{1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j^2}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
-0.4 &= -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\
0.4(1+\theta_1^2) &= \theta_1 \\
4\theta_1^2 + 4 &= 10\theta_1 \\
4\theta_1^2 - 10\theta_1 + 4 &= 0 \\
(4\theta_1 - 2)(\theta_1 - 2) &= 0
\end{aligned}$$

Nilai θ_1 yang memenuhi persamaan kuadrat di atas adalah $\theta_1 = \frac{1}{2}$ atau $\theta_1 = 2$. Karena nilai parameter θ_1 haruslah kurang dari 1, maka nilai θ_1 yang dimaksud adalah $\theta_1 = 0.5$

Jawab. B.

9 A50 Periode November 2018

1. Diketahui suatu proses *moving average* order 2, MA(2)
   $y_t = 3 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1} - 0,5\varepsilon_{t-2}$
   Tentukanlah ρ_1 dan ρ_2

   A. -0,0365 dan -0,250

   B. -0,0665 dan -0,275

   C. -0,0665 dan -0,355

   D. -0,0775 dan -0,355

   E. -0,0775 dan -0,388

   Pembahasan:
   Diketahui:
   $\theta_1 = -0,2$
   $\theta_2 = -0,5$

   Rumus Umum untuk MA(q)

$$\rho_k = \frac{\theta_k + \sum_{j=1}^{q=k\theta_j\theta_{j+k}}}{1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j^2}$$

   sehingga untuk MA(2)

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\
&= \frac{-0,2 + (-0,2)(0,5)}{1 + (-0,2)^2 + (-0,5)^2} \\
&= -0,077519 \\
&\approx -0,0775
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \\ &= \frac{(-0,5)}{1 + (-0,2)^2 + (-0,5)^2} \\ &= -0,38759 \\ &\approx -0,388\end{aligned}$$

Jawab: E. -0,0775 dan -0,388

2. Sebuah regresi linier dengan tiga variabel bebas dan satu konstan digunakan untuk mencocokkan suatu deret dengan 100 pengamatan, diketahui bahwa:

$$\sum_{t=2}^{100} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2 = 100$$

$$\sum_{t=1}^{100} \hat{\varepsilon}_t{}^2 = 81$$

Diberikan tabel Durbin-Watson Test

N	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76

d_L:batas bawah dari *critical value*
d_U:batas atas dari *critical value*

Apa keputusan yang cocok pada uji Durbin-Watson tersebut?

A. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang positif

B. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang negatif

C. *Residuals* tidak memiliki *serial correlation*

D. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang tak-negatif

E. Hasil uji tidak dapat disimpulkan

Pembahasan:
Diketahui:

$$\sum_{t=2}^{100} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2 = 100$$

$$\sum_{t=1}^{100} \hat{\varepsilon}_t{}^2 = 81$$

Statistika Tes

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t{}^2}$$

Jika $d = 2$ maka tidak ada korelasi
Jika $0 < d < 2$ maka positif korelasi
Jika $2 < d < 4$ maka negatif korelasi

Untuk menguji korelasi positif:

- Jika $d < d_L$ ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi positif

- Jika $d > d_U$ Tidak ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi positif

- Jika $d_L < d < d_U$ Tes tidak dapat disimpulkan

Untuk menguji korelasi negatif:

- Jika $(4 - d) < d_L$ ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi negatif

- Jika $(4 - d) > d_U$ tidak ada bukti statistik bahwa residual berkorelasi negatif

- Jika $d_L < (4 - d) < d_U$ Tes tidak dapat disimpulkan

Diperoleh nilai d:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t{}^2} \\ &= \frac{100}{81} \\ &= 1,2345 \end{aligned}$$

Diperoleh $0 < d < 2$ dan $d < d_L$

Jawab: A. *Residuals* memiliki *serial correlation* yang positif

3. Dalam sebuah studi regresi dua peubah acak dihasilkan

   a) $\hat{\beta} = 0,2$

   b) $s_{\hat{\beta}} = 0,095$, yaitu *standard error* dari β

   Tentukanlah nilai statistik t beserta keputusan yang diambil dari sebuah uji untuk $H_0 : \beta = 0$ dan $H_1 : \beta \neq 0$ dengan *confidance interval* 95% (diketahui, nilai kritis (*critical value*) untuk 95% *confidance interval* adalah 1,96)

   A. $t = 1,5$ dan oleh karena itu tolak hipotestis nol.

B. $t = 1,5$ dan oleh karena itu terima hipotestis nol.

C. $t = 1,8$ dan oleh karena itu tolak hipotestis nol.

D. $t = 2,1$ dan oleh karena itu terima hipotestis nol.

E. $t = 2,1$ dan oleh karena itu tolak hipotesis nol.

Pembahasan:
Diketahui

- $\hat{\beta} = 0,2$
- $s_{\hat{\beta}} = 0,095$, yaitu *standard error* dari β
- nilai kritis (*critical value*) untuk 95% *confidance interva*l adalah $t_{\frac{\alpha}{2},n-2} = 1,96$

H_0 diterima apabila $-t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < T < t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ dimana nilai T diperoleh dari:

$T = \frac{\hat{\beta}}{s_{\hat{\beta}}} = \frac{0,2}{0,095} = 2,105$

Diperoleh $T = 2,105$ sehingga tolak hipotesis nol

Jawab: E. $t = 2,1$ dan oleh karena itu tolak hipotesis nol.

4. Diberikan *forecast error* 3 langkah ke depan berdasarkan ARIMA model
$e_T(3) = 0,34\varepsilon_{T+3} + 0,26\varepsilon_{T+2} - 0,55\varepsilon_{T+1}$
Diketahui pula, *variance* dari *forecast error* adalah 0,89
Hitunglah *variance* dari *error*, σ^2_ε.

A. 0,89

B. 1,10

C. 1,83

D. 2,15

E. 2,50

Pembahasan:
Diketahui

$$\begin{aligned} e_T(3) &= \psi_0\varepsilon_{T+3} + \psi_1\varepsilon_{T+2} + \psi_2\varepsilon_{T+1} \\ &= e_T(3) = 0,34\varepsilon_{T+3} + 0,26\varepsilon_{T+2} - 0,55\varepsilon_{T+1} \end{aligned}$$

variance dari forecast error = 0,89

$$\begin{aligned}
Var[e_T(l)] &= \left(\psi_0^2 + \psi_1^2 + ... + \psi_{l-1}^2\right)\sigma_\varepsilon^2 \\
Var[e_T(3)] &= \left(\psi_0^2 + \psi_1^2 + ... + \psi_{l-1}^2\right)\sigma_\varepsilon^2 \\
\sigma_\varepsilon^2 &= \frac{Var[e_T(3)]}{\left(\psi_0^2 + \psi_1^2 + ... + \psi_{l-1}^2\right)} \\
&= \frac{0,8}{0,34^2 + (0,26)^2 + (-0,55)^2} \\
&= 1,8324
\end{aligned}$$

Jawab: C. 1,83

5. Pada sebuah analisis regresi, $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, dari 49 pengamatan diketahui bahwa rata-rata dari sample x adalah 1.182,4 dengan standar deviasi 226, sedangkan rata-rata dari sampel y adalah 49,6 dengan standar deviasi 7,1. Korelasi sampel antara x dan y adalah 0,673. Dengan menggunakan informasi di atas hitunglah persamaan regresi nya:

   A. $y = 24,7 + 0,0211x$

   B. $y = 0.0211 + 24,7x$

   C. $y = -25.371,8 + 21,5x$

   D. $y = 21,5 - 25.371,8x$

   E. $y = 25.471 + 21,5x$

   Pembahasan:
   Diketahui:

   1. N= 49
   2. $\bar{x} = 1.182,4$ dan $s_x = 226$
   3. $\bar{y} = 49,6$ dan $s_y = 7,1$
   4. $r = 0,673$

akan dihitung terlebih dahulu nilai r, β, α

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\sum xyn\bar{x}\bar{y}}{(n-1)s_x s_y} \\
\sum xy &= r(n-1)s_x s_y + n\bar{x}\bar{y} \\
&= (0,673)(48)(226)(7,1) + (49)(1.182,4)(49,6) \\
&= 2.925.539,958 \\
\beta &= \frac{\sum xyn\bar{x}\bar{y}}{(n-1)s_x^2} \\
&= \frac{2.925.539,958 - (49)(1.182,4)(49,6)}{48(226)^2} \\
&= 0,021143 \\
\alpha &= \bar{y} - \beta\bar{x} \\
&= 49,6 - (0,021143)(1.182,4) \\
&= 24,6006
\end{aligned}$$

Diperoleh $y = 24,6006 + 0,021143x$

Jawab: A. $y = 24,7 + 0,0211x$

6. Dari soal nomor 5, misalnya ada pengamatan yang ke 50 dimasukkan dalam data. Yang mana dari kemungkinan berikut untuk pengamatan yang ke 50 tersebut yang akan mengubah persamaan regresi paling signifikan?

   A. $x = 900, y = 45$

   B. $x = 1200, y = 40$

   C. $x = 1200, y = 60$

   D. $x = 2400, y = 75$

   E. $x = 2400, y = 25$

   Pembahasan:
   Dari soal nomor 5, diperoleh $y = 24,7 + 0,0211x$
   Untuk data berjumlah 49 diperoleh $\bar{x} = 1.182,4$ dan $\bar{y} = 49,6$

   Akan dilakukan Cek kemungkinan untuk pengamatan yang ke 50 yang mengubah persamaan regresi paling signifikan

a. Untuk $x = 900$, $y = 45$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{(1.182,4)(49) + 900}{50} \\
&= 1.176,752 \\
\bar{y} &= \frac{(49,6)(49) + 45}{50} \\
&= 49,508
\end{aligned}$$

Jika Nilai x disubtitusikan maka $y = 24,7 + 0,0211(1.176,752) = 49,529$

b. Untuk $x = 1200$, $y = 40$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{(1.182,4)(49) + 1200}{50} \\
&= 1.182,752 \\
\bar{y} &= \frac{(49,6)(49) + 40}{50} \\
&= 49,408
\end{aligned}$$

Jika Nilai x disubtitusikan maka $y = 24,7 + 0,0211(1.182,752) = 49,656$

c. Untuk $x = 1200$, $y = 60$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{(1.182,4)(49) + 1200}{50} \\
&= 1.182,752 \\
\bar{y} &= \frac{(49,6)(49) + 60}{50} \\
&= 49,808
\end{aligned}$$

Jika Nilai x disubtitusikan maka $y = 24,7 + 0,0211(1.182,752) = 49,656$

d. Untuk $x = 2400$, $y = 75$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{(1.182,4)(49) + 900}{50} \\
&= 1.206,752 \\
\bar{y} &= \frac{(49,6)(49) + 40}{50} \\
&= 50,108
\end{aligned}$$

Jika Nilai x disubtitusikan maka $y = 24,7 + 0,0211(1.206,752) = 50,162$

e. Untuk $x = 2400, y = 25$

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{(1.182,4)(49) + 2400}{50} \\
&= 1.206,752 \\
\bar{y} &= \frac{(49,6)(49) + 25}{50} \\
&= 49,108
\end{aligned}$$

Jika Nilai x disubtitusikan maka $y = 24,7 + 0,0211(1.206,752) = 50,108$

Dari kelima hasil di atas terlihat perbedaan nilai y yang paling signifikan pada pilihan E

Jawab:E. $x = 2400, y = 25$

7. Jika *error terms* merupakan *heteroscedastic*, estimasi OLS (*ordinary least squares*) dari parameter persamaan regresi akan menjadi?

   A. Bias namun konsisten

   B. Tak-bias, efisien, namun tidak konsisten

   C. Tak-bias dan efisien

   D. Tak-bias, konsisten, namun tidak efisien

   E. Tak-bias, Efisien dan konsisten.

   Pembahasan:
   Kita tahu bahwa syarat untuk OLS adalah variansnya konstan atau tidak ada *heteroscedastic* dan bersifat BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) tetapi apabila terjadi *heteroscedastic* maka estimatornya tidak bersifat BLUE dan variansinya bukan terkecil dari semua unbiased estimator.

   Heteroscedastic tidak membuat OLS menjadi bias tetapi bisa membuat estimasi OLS dari varians koefisien menjadi bias. Dengan demikian, analisis regresi menggunakan data yang heteroskedastik masih akan memberikan perkiraan yang tidak bias untuk hubungan antara variabel prediktor dan hasil (konsisten), tetapi standart error dan hasil inferensi yang diperoleh dari analisis data dicurigai salah. Standard error yang bisa menyebabkan inferensi hasilnya menjadi bias, sehingga hasil tes hipotesis mungkin salah dan membuat kesalahan tipe II (Keputusan menerima hipotesis nol yang salah)

   Ketika terjadi heterokedastik, estimasi OLS menempatkan bobot lebih pada pengamatan dengan variansi error yang besar daripada variansi error yang lebih kecil. Pembobotan terjadi karena jumlah kuadrat residual terkait dengan variansi error yang besar cenderung jauh lebih besar daripada jumlah kuadrat residual terkait dengan variansi error yang lebih rendah. Garis regresi akan disesuaikan untuk meminimalkan jumlah total kuadrat residual, dan ini dapat memberikan hasil terbaik yang bisa dicapai dengan menjamin kecocokan yang sangat baik dalam bagian data yang memiliki variansi besar. Karena pembobotan ini berimplikasi pada estimasi parameter OLS tak-bias dan konsisten, tetapi tidak efisien.

Sumber: Econometric Models and Economic Forecast(Fourth Edition),1998, by Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L., Halaman 146-147

Jawab: D. Tak-bias, konsisten, namun tidak efisien

8. Dari soal nomor 5, berapakah derajat kebebasan (*degree of freedom*) untuk *error*:

   A. 1

   B. 2

   C. 47

   D. 48

   E. 49

   Pembahasan:
   Diketahui $y = 24,7 + 0,0211x$ dan N= 49
   Rumus yang digunakan adalah:

   $$df = n - k$$

   dengan k adalah jumlah parameter termasuk *intercept* (konstan)
   Sehingga diperoleh:

   $$\begin{aligned} y &= 24,7 + 0,0211x \\ &\quad \text{memiliki dua parameter sehingga} \\ df &= 49 - 2 \\ &= 47 \end{aligned}$$

   Jawab: C. 47

9. Diberikan data tingkat suku bunga pada sebuah instrumen sebagai berikut:

Waktu (t)	y_t
1	10%
2	7%
3	8%

Dengan menggunakan metode *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) dimana $\alpha = 0,9$, hitunglah $\hat{y}_4$.

A. 0,0700

B. 0,0751

C. 0,0792

D. 0,0800

E. 0,0833

Pembahasan:
Diketahui:
$t = 1 \longrightarrow y_1 = 0,1$
$t = 2 \longrightarrow y_2 = 0,07$
$t = 3 \longrightarrow y_3 = 0,08$
$\alpha = 0,9$
Rumus yang digunakan:
$\hat{y}_{t+1} = \alpha \left[y_t + (1-\alpha)y_{t-1} + (1-\alpha)^2 y_{t-2} + (1-\alpha)^3 y_{t-3} + ...\right]$
Sehingga proses pengerjaan :

$$\begin{aligned} \hat{y}_4 &= \alpha \left[y_3 + (1-\alpha)y_2 + (1-\alpha)^2 y_1\right] \\ &= 0,9\left[0,08 + (0,1)(0,07) + (0,1)^2(0,1)\right] \\ &= 0,0792 \end{aligned}$$

Jawab:C. 0,0792

10. Diketahui sebuah proses stokastik, *autoregresive process first order*, AR(1):

$$y_t = 0,9y_{t-1} + 0,8 + \varepsilon_t$$

Dimana forecast untuk 6 periode merupakan

$$\hat{y}_T(6) = 0,9y_t + Z$$

Tentukanlah Z.

A. 2,50

B. 3,75

C. 3,95

D. 4,10

E. 5,20

Pembahasan:
Diketahui:

$$\begin{aligned} y_t &= 0,9y_{t-1} + 0,8 + \varepsilon_t \\ &= \phi_1 y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t \hat{y}_T(6) = 0,9y_t + Z \end{aligned}$$

Rumus yang digunakan:

$$\hat{y}_T(l) = \phi_1^l y_T + \left(\phi_1^{l-1} + \phi_1^{l-2} + ... + \phi_1 + 1\right)\delta$$

Sehingga proses pengerjaan :

$$\begin{aligned} Z &= \left(\phi_1^5 + \phi_1^4 + \phi_1^3 + \phi_1^2 + \phi_1 + 1\right)\delta \\ &= \left(0,9^5 + 0,9^4 + 0,9^3 + 0,9^2 + 0,9 + 1\right)0,8 \\ &= 3,748472 \\ &\approx 3,75 \end{aligned}$$

Jawab: B. 3,75

11. Diketahui sebuah proses *autoregresive moving average*

$$y_t = 0,5y_{t-1} + 0,7 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$$

Hitunglah *forecast* l-periode dimana l merupakan bilangan yang sangat besar (mendekati tak-hingga)

A. 1,4

B. 1,7

C. 2,1

D. 2,5

E. 3,0

Pembahasan: Diketahui:

$$y_t = 0,5y_{t-1} + 0,7 + \varepsilon_t - 0,2\varepsilon_{t-1}$$

Rumus yang digunakan:

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty}\hat{y}_T(l) &= \frac{\delta}{1-\phi_1}\\ &= \frac{0,7}{1-0,5}\\ &= 1,4\end{aligned}$$

Jawab: A. 1,4

12. Dalam sebuah regresi model diberikan
Untuk *restricted model*:

$$ESS_R = 35$$
$$TSS_R = 60$$

Untuk *unrestricted model*:

$$ESS_{UR} = 85$$
$$TSS_{UR} = 90$$

Hitunglah Statistik $F_{1,97}$

A. 15

B. 66

C. 123

D. 194

E. Statistik tersebut tak dapat dihitung

Pembahasan:
$TSS = ESS + RSS$ dan $F = \dfrac{(RSS_R - RSS_{UR})/r}{RSS_{UR}/(n-k-1)}$
Dari rumus kita bisa menentukan RSS_R dan RSS_{UR} tetapi karena tidak mengetahui nilai r, k dan n

dimana : r= jumlah restriction
k= jumlah variabel independent
n= ukuran sampel

Sehingga statistik tersebut tidak dapat dihitung

Jawab: E. Sehingga statistik tersebut tidak dapat dihitung

13. Diberikan proses MA(3) dibawah ini
    $y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_3$, dimana σ_t merupakan sebuah *white noise process* dengan nilai rata-rata nol dan variance σ^2.
    Yang manakah pernyataan di bawah yang benar?
    (i) Proses y_t memiliki nilai rata-rata nol
    (ii) Fungsi *autocorrelation* akan memiliki nilai 0 (nol) pada lag 5
    (iii) Proses y_t memiliki *variance* σ_2
    (iv) Fungsi *autocorrelation* akan memiliki nilai 1 (satu) pada lag 0

    A. i) dan iii) saja
    B. ii) saja
    C. ii) dan iv) saja
    D. i),ii) dan iii) saja
    E. i),ii), iii) dan iv)

Pembahasan:
Diketahui $y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \theta_3\varepsilon_3$, dimana σ_t merupakan sebuah *white noise process* dengan nilai rata-rata nol dan variance σ^2.
Fungsi Auto korelasi untuk MA(q)

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{q} \theta_i\theta_{k+i}}{\sum_{i=0}^{q^2} \theta_i^2} \quad k = 1, 2, ..., q$$

$$\rho_k = 0, \quad k > q$$

Dimana $\theta_0 = -1$ dan $\theta_k = 0$ untuk $k \geq q + 1$

Varians dari fungsi MA(q)

$$Var(y_t) = \sigma_t(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2)$$

Maka :

(i) Salah, karena yang memiliki rata-rata nol adalah σ_t sedangkan y_t memiliki rata-rata μ
(ii) Benar, karena fungsi autocorrelation akan bernilai nol setelah lag ke-q pada MA(q) dalam hal ini akan bernilai nol setelah lag ke-3
(iii) Salah, karena untuk MA(3)

$$\begin{aligned} Var(y_t) &= \sigma_t(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \\ &= \sigma(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \end{aligned}$$

(iv) Benar,

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \frac{\theta_0\theta_0}{\theta_0^2}\\ &= \frac{1.1}{1^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

Jawab: C. ii dan iv saja

14. Diberikan

$$\lambda_X(x) = k, \;\; x > 0$$

Tentukanlah m_a, tingkat kematian *central* dalam interval $(a, a+1)$

A. k
B. $\frac{k}{2}$
C. $\frac{k}{2a}$
D. $\frac{2k}{2a+1}$
E. 0

Pembahasan:
Diketahui $\lambda_X(x) = k, \;\; x > 0$
Akan dihitung m_a dengan interval $(a, a+1)$, dimana :

$$m_a = \frac{\int_a^{a+1} S(y)\lambda(y)dy}{\int_a^{a+1} S(y)dy}$$

Jika :

$$\begin{aligned}S(x) &= \exp\left(-\int_0^x \lambda(y)dy\right)\\ &= \exp\left(-\int_0^x kdy\right)\\ &= \exp(-kx)\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+1} S(y)\lambda(y)dy &= \int_a^{a+1} e^{-ky}kdy, \text{ misal } u = -ky \text{ maka } du = -kdy \\
&= k\left[\int_{-ka}^{-k(a+1)} -\frac{e^u}{k}du\right] \\
&= \int_{-ka}^{-k(a+1)} e^u du \\
&= -e^{-k(a+1)} + e^{-ka}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+1} S(y)dy &= \int_a^{a+1} e^{-ky}dy, \text{ misal } u = -ky \text{ maka } du = -kdy \\
&= \int_{-ka}^{-k(a+1)} -\frac{e^u}{k}du \\
&= \frac{-e^{-k(a+1)} + e^{-ka}}{k}
\end{aligned}$$

maka nilai m_a

$$\begin{aligned}
m_a &= \frac{\int_a^{a+1} S(y)\lambda(y)dy}{\int_a^{a+1} S(y)dy} \\
&= \frac{-e^{-k(a+1)} + e^{-ka}}{\frac{-e^{-k(a+1)}+e^{-ka}}{k}} \\
&= \frac{-e^{-k(a+1)} + e^{-ka}.k}{-e^{-k(a+1)} + e^{-ka}} \\
&= k
\end{aligned}$$

Jawab: A. k

15. Diketahui X_1 dan X_2 merupakan peubah acak bebas, didefinisikan bahwa:
Apabila $Y = Min(X_1, X_2)$, $Z = Max(X_1, X_2)$ Maka:

   I. Fungsi Sebaran Survival (*Survival Distribution Function*) dari Y, $S(y)$, merupakan perkalian dari fungsi sebaran survival X_1 dan fungsi sebaran survival X_2

   II. Fungsi Sebaran Kumulatif (*Cumulative Distribution Function*) dari Z, $F(z)$, merupakan perkalian dari fungsi sebaran kumulatif X_1 dan fungsi sebaran kumulatif X_2

   III. Apabila X_1 dan X_2 menyebar exponensial maka Z menyebar eksponensial namun Y tidak.

Yang manakah pernyataan di atas yang benar?

A. I saja

B. I dan II saja

C. I dan III saja

D. II dan III saja

E. I, II, dan III benar

Pembahasan:
Diketahui X_1 dan X_2 merupakan peubah acak bebas,didefinisikan $Y = Min(X_1, X_2)$, $Z = Max(X_1, X_2)$ maka:

I. $Y = Min(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= 1 - [P(X_1 > x)P(X_2 > x)] \\ 1 - F_Y(y) &= P(X_1 > x)P(X_2 > x) \\ S_Y(y) &= S_{X_1}(x)S_{X_2}(x) \end{aligned}$$

II. $Z = Max(X_1, X_2)$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \\ &= F_{X_1}(x)F_{X_2}(x) \end{aligned}$$

III. Salah, karena jika X_1 dan X_2 sama-sama menyebar exponensial maka Z dan Y harus memiliki sifat yang sama yaitu menyebar exponensial membawa sifat fungsi distribusi

Jawab: B. I dan II saja

16. Yang manakah dari pernyataan di bawah yang benar pada asumsi linier untuk l_{x+t} dimana $0 < t < 1$?

1) ${}_{0,5}q_x < {}_{0,5}q_{x+0,5}$

2) $t_x = {}_{1-t}p_x \cdot {}_tq_{x+1-t}$

3) $\mu_{x+t} < {}_tq_x$

A. 1 dan 2 saja

B. 1 dan 3 saja

C. 2 dan 3 saja

D. 2 saja

E. 1,2, dan 3

Pembahasan:

a) ${}_{0,5}q_x < {}_{0,5}q_{x+0,5}$
${}_{0,5}q_x = 0,5q_x$ sedangkan ${}_{0,5}q_{x+0,5} = \dfrac{(1-0,5)q_x}{1-0,5q_x}$
Jika diambil sebarang bilangan jelas ${}_{0,5}q_x < {}_{0,5}q_{x+0,5}$ (Benar)

b) $t_x = {}_{1-t}p_x \cdot {}_tq_{x+1-t}$

$$\begin{aligned} {}_{1-t}p_x \cdot {}_tq_{x+1-t} &= (1-(1-t)q_x) \cdot \frac{(1-1+t)q_x}{1-(1-t)q_{x+1}} \\ &= (1-1+t)q_x \\ &= t \,.\, q_x \\ &= {}_tq_x \text{ Benar} \end{aligned}$$

c) $\mu_{x+t} < {}_tq_x$
$\mu_{x+t} = \dfrac{q_x}{1-t.q_x}$ sedangkan ${}_tq_x = t.q_x$
Jika diambil sebarang bilangan diperoleh $\mu_{x+t} > {}_tq_x$ (Salah)

Jawab: A. 1 dan 2 saja

17. Diberikan informasi
$l_x = 10.000$, $L_{x+1} = 8.000$, dan $q_{x+1} = 0,25$
$l_{x+1} = 8.100$, $L_{x+2} = 6.000$, $m_{x+2} = 0,3645$

Tentukanlah ${}_2p_{x+0,5}$ dengan menggunakan metode eksponensial (*constant force*)

A. 0,44

B. 0,46

C. 0,54

D. 0,56

E. 0,64

Pembahasan:
Diketahui

$l_x = 10.000$, $L_{x+1} = 8.000$, dan $q_{x+1} = 0,25$
$l_{x+1} = 8.100$, $L_{x+2} = 6.000$, $m_{x+2} = 0,3645$ Akan kita hitung ${}_2p_{x+0,5}$ dengan menggunakan metode eksponensial (*constant force*) maka : Langkah Pertama

$$\begin{aligned}
q_{x+1} &= 1 - p_{x+1} \\
&= 1 - \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \\
0,25 &= \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_{x+1}} \\
0,25\,.\,l_{x+1} &= l_{x+1} - l_{x+2} \\
l_{x+2} &= l_{x+1} - 0,25\,.\,l_{x+1} \\
&= 0,75\,.\,l_{x+1} \\
&= 0,75\,.\,8100 \\
&= 6075
\end{aligned}$$

Langkah Kedua

$$\begin{aligned}
m_x &= \frac{d_x}{L_x} = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} \quad \text{sehingga} \\
m_{x+2} &= \frac{l_{x+2} - l_{x+3}}{l_{x+2}} \\
0,3645 &= \frac{6075 - l_{x+3}}{6000} \\
l_{x+3} &= 6075 - 0,3645\,.\,6000 \\
&= 3888
\end{aligned}$$

Langkah Ketiga

$$\begin{aligned}
{}_2p_{x+0,5} &= \frac{l_{x+0,5+2}}{l_{x+0,5}} \\
&= \frac{l_{x+2}\,(p_{x+2})^{\frac{1}{2}}}{l_{x+0,5}} \\
&= \frac{l_{x+2}\left(\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{l_x\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{6075\,\left(\frac{3888}{6075}\right)^{\frac{1}{2}}}{10000\left(\frac{8100}{10000}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{4860}{9000} = 0,54
\end{aligned}$$

Jawab: C. 0,54

18. Misakan ada 100 pengamatan dan diketahui

$$Var[\hat{S}(t)] = 0,00056,\ Var[\hat{S}(r)] = 0,00040$$

Jika $S(t) > 2S(r)$ dan $t < r$,
Tentukan $100Cov[\hat{S}(t), \hat{S}(r)]$

A. 0,0010

B. 0,0015

C. 0,0020

D. 0,0025

E. 0,0030

Pembahasan:
Diketahui

$Var[\hat{S}(t)] = 0,00056$, $Var[\hat{S}(r)] = 0,00040$
$S(t) > 2S(r)$ dan $t < r$

Akan dihitung 100Cov$[\hat{S}(t), \hat{S}(r)]$

$$\begin{aligned}
Var\left[\hat{S}(t)\right] &= \frac{S(t)F(t)}{n} = \frac{S(t)(1-S(t))}{n} \\
0,00056(100) &= S(t) - S(t)^2 \\
S(t)^2 - S(t) - 0,056 &= 0 \\
(S(t) - 0,940454)(S(t) - 0,059545) &= 0 \\
S(t) = 0,940454 \quad \text{atau} & \quad S(t) = 0,059545
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var\left[\hat{S}(r)\right] &= \frac{S(r)F(r)}{n} = \frac{S(r)(1-S(r))}{n} \\
0,0004(100) &= S(r) - S(r)^2 \\
S(r)^2 - S(r) - 0,04 &= 0 \\
(S(r) - 0,95825)(S(t) - 0,0417424) &= 0 \\
S(t) = 0,95825 \quad \text{atau} & \quad S(t) = 0,0417424
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
100Cov[\hat{S}(t), \hat{S}(r)] &= \frac{100.q_t.q_r}{n} \\
&= \frac{100.0,059545.0,0417424}{100} \\
&= 0,00224
\end{aligned}$$

Jawab: D. 0,00224

19. Pada sebuah pengamatan *double-decrement*
Jika $\mu_{70+t}^{(d)}$ dan $\mu_{70+t}^{(w)}$ adalah konstan pada $0 < t < 1$,
Tentukanlah $q_{70}^{(d)}$ jika diketahui $q'^{(d)}_{70} = q'^{(w)}_{70} = 0,20$

    A. 0,170

    B. 0,180

    C. 0,190

    D. 0,195

    E. 0,200

    Pembahasan:
    Diketahui $\mu_{70+t}^{(d)}$ dan $\mu_{70+t}^{(w)}$ adalah konstan pada $0 < t < 1$, dan $q'^{(d)}_{70} = q'^{(w)}_{70} = 0,20$ sehingga:

$$\begin{aligned}
q_x^{(d)} &= q_x^{'(d)}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot q_x^{'(w)}\right] \\
q_{70}^{(d)} &= q_{70}^{'(d)}\left[1 - \frac{1}{2} \cdot q_{70}^{'(w)}\right] \\
&= 0,2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)(0,2)\right] \\
&= 0,18
\end{aligned}$$

    Jawab: B. 0,180

20. Dalam sebuah sampel terdapat 10.000 orang pada usia x.

    1) 1000 orang baru masuk pada usia $x + 1/4$

    2) 2000 meninggal pada interval $(x, x + 1)$

    Tentukanlah *moment estimator* dari q_x dimana kematian menyebar linier (UDD).

A. 0,186

B. 0,197

C. 0,205

D. 0,220

E. 0,235

Pembahasan:
Diketahui :

- $l_x = 10.000$
- 1000 orang baru masuk pada usia $x + 1/4$
- 2000 meninggal pada interval $(x, x+1)$

sehingga *moment estimator* dari q_x dimana kematian menyebar linier (UDD) adalah

$$\begin{aligned}\hat{q}_x &= \frac{d}{n_x - (1-s).c_x + (1-r).k_x} \\ &= \frac{2000}{10.000 - 0,5(2000) + 0,75(1000)} \\ &= 0,20512\end{aligned}$$

Jawab: C. 0,205

Untuk soal 21-22!
Dalam studi mortalita untuk tahun kalender 2017, ada 240 jiwa yang lahir pada tahun 1986 dan 1987, dimana 10 orang lahir pada tanggal 1 setiap bulannya . Berikut data kematian dan withdrawals

No	Tanggal Lahir	Tanggal Kejadian	Kejadian
1	1 Februari 1986	1 Maret 2017	Withdrawal
2	1 April 1986	1 Maret 2017	Meninggal
3	1 Juni 1986	1 Juli 2017	Meninggal
4	1 Agustus 1986	1 Februari 2017	Withdrawal
5	1 Maret 1987	1 Januari 2017	Meninggal

21. Hitunglah q_{30} dengan perhitungan estimasi aktuaria.

A. 0,0060

B. 0,0073

C. 0,0084

D. 0,0098

E. 0,0125

Pembahasan:
Diketahui 240 jiwa yang lahir pada tahun 1986 dan 1987, dimana 10 orang lahir pada tanggal 1 setiap bulannya.

No	Tanggal Lahir	Tanggal Kejadian	Kejadian
1	1 Februari 1986	1 Maret 2017	Withdrawal
2	1 April 1986	1 Maret 2017	Meninggal
3	1 Juni 1986	1 Juli 2017	Meninggal
4	1 Agustus 1986	1 Februari 2017	Withdrawal
5	1 Maret 1987	1 Januari 2017	Meninggal

y_i= tanggal awal pengamatan-tanggal lahir
z_i=tanggal akhir pengamatan-tanggal lahir
θ_i=tanggal meninggal-tanggal lahir
ϕ_i=tanggal withdraw-tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } y_i < x \\ y_i - x & , \text{ jika } x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x & , \text{ jika } x < z_i < x+1 \\ 1 & , \text{ jika } z_i < x+1 \end{cases}$$

$$\iota_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \theta_i = 0 \\ \theta_i - x & , \text{ jika} x < \theta_i < x+1 \\ 0 & , \theta_i > x+1 \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \phi_i = 0 \\ \phi_i - x & , \text{ jika} x < \phi_i < x+1 \\ 0 & , \phi_i > x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i & , \text{ jika seseorang tidak meninggal dan withdraw} \\ \kappa_i - r_i & , \text{ jika seseorang withdraw} \\ \iota_i - r_i & , \text{ jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Tanggal Lahir	Y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	ι_i	κ_i	Exposure eksak	10ε
1-Jan-86	31.00	32.00			00.00	1.00			1.00	10.00
1-Feb-86	30.92	31.91	00.00	31.08	0.92	1.00	0	0	0.08	00.84
1-Mar-86	30.84	31.84			0.84	1,00			0.16	1.61
1-Apr-86	30.75	31.75	30.92	0.00	0.75	1.00	0.92	0	0.25	2.46
1-May-86	30.67	31.67			0.67	1.00			0.33	3.28
1-Jun-86	30.59	31.58	31.08	0.00	0.59	1.00	0	0	0.41	4.13
1-Jul-86	30.51	31.50			0.51	1.00			0.49	4.95
1-Aug-86	30.42	31.42	0.00	30.51	0.42	1,00	0	0.51	0.08	0.85
1-Sep-86	30.34	31.33			0.34	1.00			0.66	6.65
1-Oct-86	30.25	31.25			0.25	1.00			0.75	7.47
1-Nov-86	30.17	31.16			0.17	1.00			0.83	8.32
1-Dec-86	30.09	31.08			0.09	1.00			0.91	9.14
1-Jan-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	9.97
1-Feb-87	29.92	30.91			0.00	0.91			0.91	9.12
1-Mar-87	29.84	30.84	29.84	0.00	0.00	0.84	0	0	0.00	0.00
1-Apr-87	29.75	30.75			0.00	0.75			0.75	7.51
1-May-87	29.67	30.67			0.00	0.67			0.67	6.69
1-Jun-87	29.59	30.58			0.00	0.58			0.58	5.84
1-Jul-87	29.51	30.50			0.00	0.50			0.50	5.02
1-Aug-87	29.42	30.42			0.00	0.42			0.42	4.17
1-Sep-87	29.34	30.33			0.00	0.33			0.33	3.32
1-Oct-87	29.25	30.25			0.00	0.25			0.25	2.50
1-Nov-87	29.17	30.16			0.00	0.16			0.16	1.65
1-Dec-87	29.09	30.08			0.00	0.08			0.08	0.83
Total									11.63	116.28

Bisa dilihat pada kolom ι_i terjadi satu kematian untuk usia 30 tahun sehingga

$$q_{30} = \frac{1}{116,28} = 0,008599$$

Jawab: C. 0,0084

22. Dengan menggunakan usia *nearest birthday*. Hitunglah p_{30} dengan menggunakan metode *exact exposure* (asumsi konstan *force of mortality*).

A. 0,951

B. 0,963

C. 0.972

D. 0.986

E. 0.991

Pembahasan:

Diketahui 240 jiwa yang lahir pada tahun 1986 dan 1987, dimana 10 orang lahir pada tanggal 1 setiap bulannya.

No	Tanggal Lahir	Tanggal Kejadian	Kejadian
1	1 Februari 1986	1 Maret 2017	Withdrawal
2	1 April 1986	1 Maret 2017	Meninggal
3	1 Juni 1986	1 Juli 2017	Meninggal
4	1 Agustus 1986	1 Februari 2017	Withdrawal
5	1 Maret 1987	1 Januari 2017	Meninggal

y_i= tanggal awal pengamatan-tanggal lahir

z_i=tanggal akhir pengamatan-tanggal lahir

θ_i=tanggal meninggal-tanggal lahir

ϕ_i=tanggal withdraw-tanggal lahir

$$r_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } y_i < x \\ y_i - x & , \text{ jika } x < y_i < x+1 \end{cases}$$

$$s_i = \begin{cases} z_i - x & , \text{ jika } x < z_i < x+1 \\ 1 & , \text{ jika } z_i < x+1 \end{cases}$$

$$\iota_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \theta_i = 0 \\ \theta_i - x & , \text{ jika} x < \theta_i < x+1 \\ 0 & , \theta_i > x+1 \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} 0 & , \text{ jika } \phi_i = 0 \\ \phi_i - x & , \text{ jika} x < \phi_i < x+1 \\ 0 & , \phi_i > x+1 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{eksak} = \begin{cases} s_i - r_i & , \text{ jika seseorang tidak meninggal dan withdraw} \\ \kappa_i - r_i & , \text{ jika seseorang withdraw} \\ \iota_i - r_i & , \text{ jika seseorang meninggal} \end{cases}$$

Tanggal Lahir	Y_i	z_i	θ_i	ϕ_i	r_i	s_i	ι_i	κ_i	Exposure eksak	10ε
1-Jan-86	31.00	32.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Feb-86	31.00	32.00	0.00	31.00	0.00	1.00	0.00	1.00	1.00	10.00
1-Mar-86	31.00	32.00			0.00	1,00			1.00	10.00
1-Apr-86	31.00	32.00	31.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	10.00
1-May-86	31.00	32.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Jun-86	31.00	32.00	31.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	1.00	10.00
1-Jul-86	31.00	32.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Aug-86	30.00	31.00	0.00	30.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1-Sep-86	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Oct-86	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Nov-86	30.00	31.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Dec-86	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Jan-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Feb-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Mar-87	30.00	31.00	30.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1-Apr-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-May-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1.00	10.00
1-Jun-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Jul-87	30.00	31.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Aug-87	29.00	30.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Sep-87	29.00	30.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Oct-87	29.00	30.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Nov-87	29.00	30.00			0.00	1.00			1,00	10.00
1-Dec-87	29.00	30.00			0.00	1.00			1.00	10.00
Total									22.00	220.00

Bisa dilihat pada kolom ι_i terjadi dua kematian untuk usia 30 tahun sehingga

$$p_{30} = 1 - q_{30} = 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{2}{220}\right)\right) = 0,99095$$

Jawab: C. 0,991

23. Sebuah studi pada interval $(x, x+1)$
    Diketahui:

$$
\begin{aligned}
{}_s p_x &= 1 - \frac{3}{2} s^2 (q_x)^2 \text{ untuk } 0 \leq s \leq \frac{2}{3} \\
{}_s p_x &= 1 - s (q_x)^2 \text{ untuk } \frac{2}{3} \leq s \leq 1
\end{aligned}
$$

Jika $n_x = 300$, dan 1 kematian terjadi di usia $x + 0,45$ dan 1 kematian lagi pada usia $x + 0,85$

Tentukanlah MLE dari q_x

A. 0,013

B. 0,018

C. 0,020

D. 0,022

E. 0,024

Pembahasan:
Diketahui :

$$
\begin{aligned}
{}_s p_x &= 1 - \frac{3}{2} s^2 (q_x)^2 \text{ untuk } 0 \leq s \leq \frac{2}{3} \\
{}_s p_x &= 1 - s (q_x)^2 \text{ untuk } \frac{2}{3} \leq s \leq 1 \\
n_x &= 300
\end{aligned}
$$

1 kematian terjadi di usia $x + 0,45$ dan 1 kematian lagi pada usia $x + 0,85$

Akan dihitung MLE dari q_x

- Untuk $0 \leq s \leq \dfrac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
{}_{s_i} p_x \mu_{x+s_i} &= \left[1 - \frac{3}{2} s^2 (q_x)^2\right] \cdot \left[\frac{(q_x)^2}{1 - \frac{3}{2} s^2 (q_x)^2}\right] \\
&= (q_x)^2
\end{aligned}
$$

- Untuk $\dfrac{2}{3} < s < 1$

$$
\begin{aligned}
{}_{s_i} p_x \mu_{x+s_i} &= \left[1 - s (q_x)^2\right] \cdot \left[\frac{(q_x)^2}{1 - s (q_x)^2}\right] \\
&= (q_x)^2
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
L &= (1-q_x)^{n_x-d_x}.\prod_{i=1}^{d} {}_{s_i}p_x \\
&= (1-q_x)^{300-2}.(q_x)^2.(q_x)^2 \\
l &= \ln\left[(1-q_x)^{300-2}.(q_x)^2.(q_x)^2\right] \\
&= 288\ln(1-q_x) + 2\ln q_x + 2\ln q_x
\end{aligned}
$$

Selanjutnya dilakukan diferensial

$$
\begin{aligned}
\frac{dl}{dq_x} &= 288\ln(1-q_x) + 2\ln q_x + 2\ln q_x \\
0 &= -\frac{288}{1-q_x} + \frac{2}{q_x} + \frac{2}{q_x} \\
\frac{288}{(1-q_x)} &= \frac{4}{q_x} \\
4 - 4q_x &= 288q_x \\
q_x &= \frac{4}{302} = 0,01324
\end{aligned}
$$

Jawab: A. 0,013

24. Pada sebuah kota beberapa tahun silam, 5 bangunan sekolah dibangun. Peubah acak untuk waktu konstruksi memiliki sebaran yang sama. Berikut diberikan data kapan dimulai dan selesai untuk setiap bangunan

Bangunan	Mulai dibangun	Selesai dibangun
1	1 Jan 2010	1 Feb 2012
2	1 Jan 2010	1 Mei 2012
3	1 Mei 2010	1 Feb 2012
4	1 Agu 2010	1 Feb 2012
5	1 Jan 2011	*

*Tidak selesai per tanggal 1 Juli 2012

Dengan menggunakan *Product-Limit Estimator*, estimasikanlah peluang penyelesaian konstruksi dalam 2 tahun pada sebuah bangunan yang memiliki distribusi waktu konstruksi yang sama.

A. 0,40

B. 0,47

C. 0,50

D. 0,53

E. 0,60

Pembahasan:
Rumus yang digunakan:

$$\hat{q}_x = 1 - \prod_{i=i}^{m} (1 - \hat{q}_i) = 1 - \phi_{i=i}^{m} \left(\frac{n_i - d_i}{n_i} \right)$$

Durasi pengerjaan dan penyensoran
$1 \longrightarrow 2,083$
$2 \longrightarrow 2,333$
$3 \longrightarrow 1,75$
$4 \longrightarrow 1,5$
$5 \longrightarrow 1,5$ (tersensor)

Sehinga :

$$\begin{aligned} \hat{q}_x &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= 1 - 0,5333 \\ &= 0,466667 \end{aligned}$$

Jawab: B. 0,47

25. Dalam sebuah studi data yang lengkap, dengan satu kematian pada setiap waktu kematian, $\Lambda(t)$diestimasi oleh metode Nelson-Aalen. Diberikan: $\hat{\Lambda}(t_k) = 0,3101$ dan $\hat{\Lambda}(t_{k+1}) = 0,3726$

    Tentukanlah $\hat{\Lambda}(t_{k+2})$

    A. 0,236

    B. 0,342

    C. 0,439

    D. 0,655

    E. 0,750

Pembahasan:
Diketahui $\hat{\Lambda}(t_k) = 0,3101$ dan $\hat{\Lambda}(t_{k+1}) = 0,3726$

$$\hat{\Lambda}(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{r_j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1}, \;\; t_k \leq t < t_{k+1}$$

Dari nilai yang diketahui kita dapat menghitung $n-k$ untuk mencari $\hat{\Lambda}(t_{k+2})$

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}(t_k) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1} = 0,3101 \\
\hat{\Lambda}(t_{k+1}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-(k+1)+1} \\
0,3726 &= 0,3101 + \frac{1}{n-k} \\
\frac{1}{n-k} &= 0,0625 \\
n-k &= 16
\end{aligned}$$

Jadi Kita peroleh hasilnya adalah:

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}(t_{k+2}) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + \frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{n-(k+1)+1} + \frac{1}{n-(k+2)+1} \\
&= 0,3726 + \frac{1}{n-k-1} \\
&= 0,3726 + \frac{1}{16-1} \\
&= 0,43927
\end{aligned}$$

Jawab: C. 0,439

26. Dari 10 bola lampu yang dites, 2 gagal sebelum waktu $t = 3$. Sebaran waktu kegagalan diasumsikan eksponensial, tentukanlah MLE dari λ

A. 0,0744

B. 0,0811

C. 0,0912

D. 0,1000

E. 0,1200

Pembahasan:

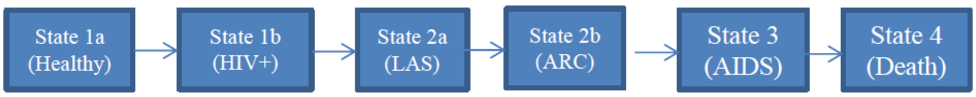
Diketahui nilai N= 10 dan 2 lampu gagal sebelum $t = 3$

Maka MLE dari λ:

$$\begin{aligned}
Fr(t) &= P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \\
Fr(3) &= P(T \leq 3) = 1 - e^{-3\lambda} \\
\frac{2}{10} &= 1 - e^{-3\lambda} \\
e^{-3\lambda} &= 0,8 \\
-3\lambda &= \ln 0,8 \\
\lambda &= \frac{\ln 0,8}{-3} \\
\lambda &= \frac{-0,223143}{-3} \\
\lambda &= 0,07438 \\
&\approx 0,0744
\end{aligned}$$

Jawab: A. 0,0744

27. Dengan menggunakan metode Panjer, tentukanlah peluang seseorang yang sedang berada di *State* 1a menuju *State* selanjutnya (1b) pada observasi 3-6 bulan dengan menggunakan informasi di bawah.



1) $\mu_{1a} = 3k$
2) $\mu_{2b} = k$
3) Peluang seseorang yang berada dalam *State* 2b keluar dari State tersebut pada observasi 12-24 bulan adalah 0,36

A. 0,154

B. 0,170

C. 0,219

D. 0,248

E. 0,360

Pembahasan:

Diketahui

1) $\mu_{1a} = 3k$

2) $\mu_{2b} = k$

3) Peluang seseorang yang berada dalam *State* 2b keluar dari State tersebut pada observasi 12-24 bulan adalah 0,36

akan kita hitung peluang seseorang yang sedang berada di *State* 1a menuju *State* selanjutnya (1b) pada observasi 3-6 bulan

Langkah Pertama

Dipilih $t = 24$ karena peluang seseorang keluar dari state berarti observasi yang dilakukan telah selesai waktunya yaitu bulan ke-24

$$\begin{aligned} F_{T_{2b}}(24) &= 1 - e^{-t.\mu_{2b}} \\ 0,36 &= 1 - e^{-24.k} \\ 0,64 &= e^{-24.k} \\ -0,44629 &= -24k \\ k &= 0,018595 \end{aligned}$$

Langkah kedua

$$\begin{aligned} \mu_{1a} &= 3k \\ &= 3(0,018595) \\ &= 0,055786 \end{aligned}$$

Langkah Ketiga

Dipilih $t = 3$ karena peluang seseorang menuju state selanjutnya bisa saja terjadi pada waktu awal observasi yaitu bulan ke-3

$$\begin{aligned} F_{T_{1a}}(3) &= 1 - e^{-t.\mu_{1a}} \\ &= 1 - e^{-3.0,055786} \\ &= 0,1541 \end{aligned}$$

Jawab: A. 0,1541

28. Untuk sebuah model *double-decrement*, diberikan:

1. $\mu^{(1)}_{10+t} = \dfrac{1}{30-t}, \ 0 \leq t < 30$
2. $\mu^{(\tau)}_{10+t} = \dfrac{50-2t}{600-50t+t^2}, \ 0 \leq t < 20$

Hitunglah peluang bahwa (10) akan mati karena *decrement* kedua dalam tahun ke-6.

A. 0,0225

B. 0,0242

C. 0,0392

D. 0,0408

E. 0,0650

Pembahasan:
Diketahui :
1) $\mu^{(1)}_{10+t} = \dfrac{1}{30-t},\ 0 \le t < 30$
2) $\mu^{(\tau)}_{10+t} = \dfrac{50-2t}{600-50t+t^2},\ 0 \le t < 20$
akan dihitung peluang bahwa (10) akan mati karena *decrement* kedua dalam tahun ke-6.

$$\begin{aligned}
\mu^{(\tau)}_{10+t} &= \mu^{(1)}_{10+t} + \mu^{(2)}_{10+t} \\
\frac{50-20t}{600-50t+t^2} &= \frac{1}{1-30t} + \mu^{(2)}_{10+t} \\
\mu^{(2)}_{10+t} &= \frac{50-20t}{600-50t+t^2} - \frac{1}{1-30t} \\
&= \frac{50-20t-20+t}{(20-t)(30-t)} \\
&= \frac{30-t}{(20-t)(30-t)} \\
&= \frac{1}{(20-t)},\quad 0 \le t < 20
\end{aligned}$$

$$_tp^{(\tau)}_{10} = \exp\left(-\int_0^t \frac{50-2s}{600-50s+s^2}ds\right)$$

$$\text{misal } u = 600-50s+s^2 \longrightarrow du = -(50-2s)ds$$

$$\begin{aligned}
_tp^{(\tau)}_{10} &= \exp\left(-\int_{600}^{600-50t+t^2} \frac{1}{u}du\right) \\
&= \exp\left[\ln(600-50t+t^2) - \ln(600)\right] \\
&= \frac{600-50t+t^2}{600}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(t, j=2) &= \frac{600-50t+t^2}{600(20-t)} = \frac{(20-t)(30-t)}{600(20-t)} \\
&= \frac{(30-t)}{600} \\
f(t=6, j=2) &= \frac{30-6}{600} = 0,04
\end{aligned}
$$

Jawab: D. 0,0408

29. Diberikan:

    1) $d_x = k$ untuk $x = 0, 1, 2, ..., \omega - 1$
    2) $e^o_{20:\overline{20}|} = 18$
    3) Kematian menyebar seragam pada setiap usia

    Hitunglah ${}_{10|30}q_{30}$

    A. 0,111
    B. 0,125
    C. 0,143
    D. 0,167
    E. 0,200

    Pembahasan:
    Karena d_x konstan untuk semua x dan kematian menyebar seragam dalam setiap tahun, maka mortalitas mengikuti hukum de Moivre

$$
\begin{aligned}
e^o_{x:\overline{n}|} &= {}_np_x(n) + {}_nq_x\left(\frac{n}{2}\right) \\
e^o_{20:\overline{20}|} &= 10_{20}q_{20} + 20_{20}p_{20}
\end{aligned}
$$

karena ${}_tq_x = \dfrac{t}{\omega - x}$ dan ${}_{t|u}q_x = \dfrac{u}{\omega - x}$ maka :

$$
\begin{aligned}
18 &= 10\left(\frac{20}{\omega-20}\right) + 20\left(\frac{\omega-40}{\omega-20}\right) \\
200 + 20\omega - 800 &= 18\omega - 360 \\
2\omega = 240 & \\
\omega = 120 &
\end{aligned}
$$

Sehingga ${}_{10|30}q_{30} = \frac{10}{\omega-30} = \frac{10}{120-30} = 0,1111$
Jawab: A. 0,1111

30. Diberikan sebuah tabel mortalita dengan 2 tahun seleksi

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
65			8200	67
66			8000	68
67			7700	69

Juga diberikan:

1) $3q_{[x]+1} = 4q_{[x+1]}$

2) $4q_{x+2} = 5q_{[x+1]+1}$

Hitunglah $l_{[67]}$

A. 7940

B. 8000

C. 8060

D. 8130

E. 8200

Pembahasan:

$l_{67} = 8200$, $l_{68} = 8000$ dan $l_{69} = 7700$

$3q_{[x]+1} = 4q_{[x+1]}$ dan $4q_{x+2} = 5q_{[x+1]+1}$

Akan dihitung $l_{[67]}$

$$\begin{aligned} q_{67} &= \frac{l_{67} - l_{68}}{l_{67}} = \frac{8200 - 8000}{8200} = 0,02439 \\ q_{68} &= \frac{l_{68} - l_{69}}{l_{68}} = \frac{8000 - 7700}{8000} = 0,0375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{[66]+1} &= \frac{4}{5} q_{67} \\ &= \frac{4}{5}(0,02439) \\ &= 0,01951 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{[67]+1} &= \frac{4}{5} q_{68} \\ &= \frac{4}{5}(0,0375) \\ &= 0,03 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{[67]} &= \frac{3}{4} q_{[66]+1} \\ &= \frac{3}{4}(0,01951) \\ &= 0,01463 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{[67]+1} &= \frac{l_{[67]+1} - l_{69}}{l_{[67]+1}} \\ 0,03 &= \frac{l_{[67]+1} - 7700}{l_{[67]+1}} \\ 0,03.l_{[67]+1} &= l_{[67]+1} - 7700 \\ 0,97.l_{[67]+1} &= 7700 \\ l_{[67]+1} &= \frac{7700}{0,97} \\ &= 7938,144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{[67]} &= \frac{l_{[67]} - l_{[67]+1}}{l_{[67]}} \\ 0,01463 &= \frac{l_{[67]} - 7938,144}{l_{[67]}} \\ 0,01463.l_{[67]} &= l_{[67]} - 7938,144 \\ 0,98537.l_{[67]} &= 7938,144 \\ l_{[67]} &= \frac{7938,144}{0,98537} = 8056,037 \end{aligned}$$

Jawab: C. 8060

10 A50 Periode April 2019

1. Diketahui persamaan regresi linear berikut:

$$\widehat{Y} = 1,245 + 0,17X$$

Jika diberikan data pengamatan sebagai berikut,

x_i	7,5	4	3	1,25
y_i	0,5	1	0	-1,5

Hitunglah nilai *standard error* dari persamaan regeresi linear tersebut.

A. 1,245

B. 1,425

C. 1,396

D. 1,963

E. 1,546

Pembahasan: Akan ditentukan terlebih dahulu nilai $\hat{y}_i$, $\hat{\varepsilon}_i$, $\hat{\varepsilon}_i{}^2$, dari persamaan:

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &= \hat{\beta}x_i + \hat{\varepsilon}_i \\ \hat{\varepsilon}_i &= \hat{y}_i - \hat{\beta}x_i = \hat{y}_i - 0,17 \\ \hat{y}_i &= 0,17x_i \end{aligned}$$

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$\hat{\varepsilon}_i$	$\hat{\varepsilon}_i{}^2$	$(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2$
7,5	0,5	1,275	-0,7750	0,6006	0
4	1	0,68	0,32	0,1024	1,1990
3	0	0,51	-0,51	0,2601	0,6889
1,25	-1,5	0,2125	-1,7125	2,9327	1,4460
Total				3,8958	3,3339

sehingga

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i{}^2}{N-2} \\
&= \frac{3,8958}{4-2} \\
&= 1,9479 \\
s &= \sqrt{1,9479} \\
&= 1,3957
\end{aligned}
$$

Jawab. C.

2. Dengan menggunakan data yang diberikan pada nomor 1, hitunglah *statistic Durbin Watson*

   A. 0,8558

   B. 0,7528

   C. 1,0118

   D. 1,01

   E. 1,3587

   Pembahasan:
   Dengan menggunakan data pada no 1. diperoleh :

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t{}^2} \\
&= \frac{3,3339}{3,8958} \\
&= 0,85577
\end{aligned}
$$

   Jawab. A.

3. Dalam sebuah regresi model diberikan
   Untuk *unrestricted model*:

$$
\begin{aligned}
ESS_{UR} = 70 \\
TSS_{UR} = 215
\end{aligned}
$$

   Untuk *restricted model*:

$$
\begin{aligned}
ESS_{R} = 55 \\
TSS_{R} = 82
\end{aligned}
$$

Hitunglah Statistik $F_{1,95}$

A. 64,2477

B. 60,3683

C. 62,2747

D. 63,3683

E. Statistik tidak dapat dihitung

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
R^2_{UR} &= 1 - \frac{ESS_{UR}}{TSS_{UR}} \\
&= 1 - \frac{70}{215} \\
&= 0,6744 \\
R^2_R &= 1 - \frac{ESS_R}{TSS_R} \\
&= 1 - \frac{55}{82} \\
&= 0,3293 \\
F_{1,95} &= \frac{0,6744 - 0,3293}{1} \\
&= 100,6895
\end{aligned}$$

Jawab. E.

4. Manakah diantara asumsi berikut yang bukan merupakan asumsi model regresi ganda (*multiple regression model*):

A. Y dan X memiliki hubungan linier

B. X merupakan peubah stokastik yang memiliki angka pasti

C. Error memiliki variansi konstan untuk semua observasi, $\mathbb{E}(\varepsilon^2) = \sigma^2$

D. Error antar obervasi saling bebas dan tidak berkorelasi

E. Error berdistribusi normal

Pembahasan:
Asumsi pada model regresi berganda

1. The relationship between Y dan X is linier
2. The X are nonstochastic variable whose values are fixed
3. The error has zero expected value: $E(\varepsilon) = 0$

4. The error term has constant variance for all observations, i.e., $E(\varepsilon^2) = \sigma^2$
5. The random variables are statistically independent. Thus, $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ for all $i \neq j$
6. The error term is normally distributed

Sumber: Econometric Models and Economic Forecasts (Fourth Edition) 1998, by Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L, Halaman 58-59

Dari asumsi di atas maka yang tidak termasuk asumsi model regresi ganda adalah X merupakan peubah stokastik yang memiliki angka pasti karena X seharusnya merupakan peubah non stokastik

Jawab. B

5. Manakah diantara beberapa uji berikut yang dapat digunakan untuk uji *heteroscedasticity*?

   A. *Cochrane-Orcutt Test*

   B. *Hildreth-Lu Test*

   C. *Durbin Watson Test*

   D. *Chow Test*

   E. *Goldfeld âĂŞQuandt Test*

Pembahasan:
Uji-uji yang biasa digunakan untuk menetukan heteroscedasticity

1. Park Test (1966)
2. Glejser Test (1969)
3. White Test
4. Breusch-Pagan Test
5. Goldfeld-Quandt test
6. Cook-Weisberg Test
7. Harrison-McCabe Test
8. Brown-Forsythe Test
9. Levene Test

Beberapa penjelasan bisa dilihat di Econometric Models and Economic Forecasts (Fourth Edition) 1998, by Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L, Halaman 152-157

Dari list di atas hanya Goldfeld-Quandt test yang ada di pilihan

Jawab. E.

6. Dalam model esktrapolasi sederhana, diberikan persamaan regresi sebagai berikut:

$$y_t = 3,67 + 4,8t$$

Tentukan nilai parameter A dan r dari persamaan regresi diatas.

A. $A = 39,25$ dan $r = 121,51$

B. $A = 0,565$ dan $r = 0,681$

C. $A = 3,67$ dan $r = 4,8$

D. $A = 4.677,35$ dan $r = 4,8$

E. $A = 3,67$ dan $r = 63.095,73$

Pembahasan:
Model ekstrapolasi sederhana dengan persamaan regresi $y_t = 3,67 + 4,8t$

Dari *sumber: Econometric Models and Economic Forecast (Fourth Edition), 1998, by Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L,Halaman 469*

$$\begin{aligned} y_t &= Ae^{rt} \\ \log y_t &= \log A + rt \end{aligned}$$

diperoleh :

$$\begin{aligned} rt &= 4,8t \\ r &= 4,8 \\ \log A &= 3,67 \\ A &= 10^(3,67) \\ &= 4677,35 \end{aligned}$$

Jawab. A

7. Diberikan sebuah persamaan dalam proses ARMA (3,2) sebagai berikut:

$$y_t = 0,5y_{t-1} + 0,3y_{t-2} + 0,2y_{t-3} + 4,2 + \varepsilon_t - 0,4\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$$

Jika diberikan $\sigma_\varepsilon^2 = 1,25$, hitunglah γ_0 dan ρ_1

A. $\gamma_0 = 1,267$ dan $\rho_1 = 0,133$

B. $\gamma_0 = 1,131$ dan $\rho_1 = 0,105$

C. $\gamma_0 = 1,267$ dan $\rho_1 = 0,105$

D. $\gamma_0 = 1,131$ dan $\rho_1 = 0,133$

E. $\gamma_0 = 1,133$ dan $\rho_1 = 0,119$

Pembahasan:
Jawab. Dianulir

8. Dalam sebuah proses autoregresi yang terintegrasi (*integrated autoregressive process*), ARI (1,1,0) diberikan:

$$w_t = 0,73w_{t-1} + 1,4 + \varepsilon_t$$

Tentukan persamaan forecast 1 periode untuk y_t

A. $\widehat{y}_T(1) = 1,73y_T - 0,73y_{T-1} + 1,4$

B. $\widehat{y}_T(1) = 1,73y_T + 0,73y_{T-1} + 1,4$

C. $\widehat{y}_T(1) = 1,73y_T + 0,73y_{T-1} - 1,4$

D. $\widehat{y}_T(1) = 0,73y_T - 1,73y_{T-1} + 1,4$

E. $\widehat{y}_T(1) = 0,73y_T + 0,73y_{T-1} + 1,4$

Pembahasan:
Diketahui:
ARI(1,1,0) dengan $w_t = 0,73w_{t-1} + 1,4 + \varepsilon_t$
sehingga

$$\begin{aligned}
\hat{y}_T(1) &= y_T + \hat{w}_T(1) \\
&= y_T + \phi_1 y_T - \phi_1 y_{T-1} + \delta \\
&= y_T + 0,73y_T - 0,73y_{T-1} + 1,4 \\
&= 1,73y_T - 0,73y_{T-1} + 1,4
\end{aligned}$$

Jawab. A.

9. Sebuah uji Dickey-Fuller dilakukan pada 100 pengamatan dari setiap tiga deret harga dengan memperkirakan regresi tidak terbatas (*unrestricted regression*)

$$Y_t - Y_{t-1} = \alpha + \beta t + (\rho - 1)Y_{t-1}$$

dengan regresi terbatas (*restricted regression*)

$$Y_t - Y_{t-1} = \alpha$$

Jika diberikan:

i.

Deret Harga	*Error Sum of Square (ESS)*	
	Tidak Terbatas (*Unrestricted*)	Terbatas (*Restricted*)
I	3.233,8	3.552,2
II	1.131,8	1.300,5
III	211,1	237

ii. Nilai kritis pada tingkat kepercayaan 0,1 untuk distribusi F yang dihitung dengan *Dickey-Fuller* adalah 5,47

Pada tingkat kepercayaan 0,1 , pada deret mana anda akan menolak hipotesa *random walk*?

A. Tidak ada

B. Hanya deret I dan II

C. Hanya deret I dan III

D. Hanya deret II dan III

E. Deret I, II dan III

Pembahasan:
Deret Harga I

$$\begin{aligned} F &= \frac{ESS_R - ESS_{UR}}{q} . \frac{N-k}{ESS_{UR}} \\ &= \left(\frac{3552,2 - 3233,8}{2} \right) \left(\frac{100-4}{3233,8} \right) = 4,726080 \end{aligned}$$

Deret Harga II

$$\begin{aligned} F &= \frac{ESS_R - ESS_{UR}}{q} . \frac{N-k}{ESS_{UR}} \\ &= \left(\frac{1300,5 - 1131,8}{2} \right) \left(\frac{100-4}{1131,8} \right) = 7,154621 \end{aligned}$$

Deret Harga III

$$\begin{aligned} F &= \frac{ESS_R - ESS_{UR}}{q} . \frac{N-k}{ESS_{UR}} \\ &= \left(\frac{237 - 211,1}{2} \right) \left(\frac{100-4}{211,1} \right) = 5,889152 \end{aligned}$$

Dari ketiga hasil di atas diperoleh Deret Harga II dan III yang memiliki nilai F lebih dari Nilai kritis 5,47.

Jawab: D.

10. Anda menggunakan model ARMA (p,q) untuk merepresentasikan sebuah deret waktu (*time series*). Anda menjalankan pemeriksaan diagnostik (*diagnostic checking*) untuk menguji apakah model sudah ditentukan dengan benar.
Diantara pernyataan mengenai pemeriksaan diagnostik (*diagnostic checking*) berikut, manakah yang tidak benar?

    A. Fungsi autokorelasi untuk deret simulasi / *simulated series* (deret waktu/ *time series* yang dihasilkan oleh model) seharusnya dapat dibandingkan dengan contoh fungsi autokorelasi dari deret asli / original series

    B. Jika fungsi autokorelasi tidak ditandai berbeda, maka langkah berikutnya adalah menganalisa residual dari model

    C. Jika model ditentukan dengan benar, maka autokorelasi residual itu sendiri tidak berkorelasi, peubah acak terdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi T, ketika T adalah jumlah pengamatan dalam deret waktu

    D. Jika model ditentukan dengan benar, maka residual harus menyerupai proses *White- Noise*

    E. Statistik Q, dimana $Q = T\sum_{k=1}^{K}\hat{\gamma}_k^2$, diperkirakan berdistribusi *Chi Square* dengan $(K - p - q)$ derajat kebebasan

    Pembahasan:
    "If the model is correctly specified, then for large displacement k (for example, $k > 5$ for low order models) the residual autocorrelatios $\hat{r}_k$ are themselves uncorrelated normally distributed random variable with mean 0 an variance $1/T$, where T is the number of observation in the time series".
    Sumber: Econometric Models and Economic Forecast (Fourth Edition), 1998, by Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L,Halaman 555

    Jawab. C.

11. Model dengan 48 observasi yang anda miliki, sesuai dengan model berikut:

$$Y = \beta_1 + \beta_2X_2 + \beta_3X_3 + \beta_4X_4 + \varepsilon$$

Jika diberikan:

Sumber variasi	Derajat Kebebasan	Sum of Square
Regresi	3	103.658
Error	44	69.204

Hitunglah nilai $\bar{R}^2$

A. 0,57

B. 0,58

C. 0,59

D. 0,60

E. 0,61

Pembahasan:
Diketahui :

- $RSS = 69,24$
- $ESS = 103,658$
- $n = 48$
- $k = 4$ karena $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$ memiliki 4 parameter

sehingga

$$\begin{aligned}
TSS &= ESS + RSS \\
&= 69,204 + 103,658 \\
&= 172,862 \\
R^2 &= \frac{ESS}{RSS} \\
&= \frac{103,658}{172,862} \\
&= 0,599658 \\
\bar{R}^2 &= 1 - \frac{(1-R^2)(n-1)}{(n-k)} \\
&= 1 - \frac{(1-0,599658)(47)}{44} \\
&= 0,572362
\end{aligned}$$

Jawab. A.

12. Diketahui model AR(1) dengan data sebagai berikut:

$$y_1 = 2,0 \; ; y_2 = -1,7 \; ; y_3 = 1,5 \; ; y_4 = -2,0 \; ; y_5 = 1,5$$

Diberikan nilai awal $\varepsilon_1 = 0$, $\mu = 0$, $\rho_1 = 0,5$

Tentukan nilai dari fungsi *Sum of Square* $S = \sum[\varepsilon_t | \varepsilon_1 = 0, \mu = 0, \rho_1 = 0,5]^2$

A. 2

B. 12

C. 15

D. 21

E. 27

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 = 0,5 \\
\mu &= \frac{\delta}{1-\phi_1} \\
0 &= \frac{\delta}{1-0,5} \\
\delta &= 0
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh model AR(1) : $y_t = 0,5y_{t-1} + \varepsilon_t$

t	y_t	$\hat{y}_t$	ε_t	ε_t^2
1	2		0	0
2	-1,7	1	-2,7	7,29
3	1,5	-0,85	2,35	5,52
4	2	0,75	-2,75	7,56
5	1,5	-1	2,5	6,25
Total				26,63

Jadi diperoleh $\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_i^2 = 26,63$

Jawab.E.

13. Dalam sebuah populasi dimana jumlah wanita dan pria yang dilahirkan adalah sama, diberikan:

   i. untuk pria, $\mu_x^p = 0,1$ dimana $x \geq 0$

   ii. untuk wanita, $\mu_x^w = 0,08$ dimana $x \geq 0$

   Hitunglah nilai q_{60} dari populasi tersebut.

   A. 0,076

   B. 0,081

   C. 0,086

   D. 0,091

   E. 0,096

Pembahasan:
Untuk Pria

$$\begin{aligned} \mu_x^{(p)}(s) &= 0,1 \\ {}_t p_x^{(p)} &= \exp\left(-\int_0^t 0,1 ds\right) = \exp(-0,1t) \end{aligned}$$

Untuk Wanita

$$\begin{aligned} \mu_x^{(w)}(s) &= 0,08 \\ {}_t p_x^{(w)} &= \exp\left(-\int_0^t 0,08 ds\right) = \exp(-0,08t) \end{aligned}$$

Untuk semua populasi

$$\begin{aligned} S(60) &= \frac{\exp(-0,1.60) + \exp(-0,08.60)}{2} = 0,00535425 \\ S(61) &= \frac{\exp(-0,1.61) + \exp(-0,08.61)}{2} = 0,00491994 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} q_{60} &= 1 - \frac{S(61)}{S(60)} \\ &= 1 - \frac{0,00491994}{0,00535425} \\ &= 0,081115 \end{aligned}$$

Jawab. B.

14. Sebuah perusahaan merekrut 200 karyawan untuk bergabung dalam sebuah program *management trainee*. Untuk memprediksi jumlah karyawan yang akan menyelesaikan program tersebut, perusahaan membuat *multiple decrement table* dengan asumsi sebagai berikut:
    i. Dari 40 karyawan, jumlah yang gagal membuat kemajuan yang memadai dalam tiga tahun pertama adalah 10, 6, dan 8, secara berurutan
    ii. Dari 30 karyawan, jumlah yang mengundurkan diri dalam tiga tahun pertama adalah 6, 8, dan 2, secara berurutan
    iii. Dari 20 karyawan, jumlah yang meninggalkan program dengan alasan lain dalam tiga tahun pertama adalah 2, 2, dan 4, secara berurutan
    iv. Distribusi seragam (*uniform*) digunakan sebagai asumsi *decrement* setiap tahunnya

Hitunglah estimasi jumlah karyawan yang gagal membuat kemajuan yang memadai di tahun ke-3

A. 4

B. 8

C. 12

D. 14

E. 17

Pembahasan:
Peluang kegagalan karyawan sesuai penyebab pada tiap tahunnya

i. $q_0^{'(1)} = \frac{10}{40} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}, \quad q_1^{'(1)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, \quad q_2^{'(1)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

ii. $q_0^{'(2)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, \quad q_1^{'(2)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}, \quad q_2^{'(2)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

iii. $q_0^{'(3)} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, \quad q_1^{'(3)} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}, \quad q_2^{'(3)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Sehingga diperoleh peluang seluruh karyawan lolos pada tiap tahunnya

$$\begin{aligned}
p_0^{(\tau)} &= p_0^{'(1)}.p_0^{'(2)}.p_0^{'(3)} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right) = 0,54 \\
p_1^{(\tau)} &= p_1^{'(1)}.p_1^{'(2)}.p_1^{'(3)} = \left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right) = 0,47407 \\
p_2^{(\tau)} &= p_2^{'(1)}.p_2^{'(2)}.p_2^{'(3)} = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = 0,4375
\end{aligned}$$

Diperoleh $l_2^{(\tau)} = l_0^{(\tau)}.p_0^{(\tau)}.p_1^{(\tau)} = 200.(0,54).(0,47407) = 51,19956$

$$\begin{aligned}
q_2^{(1)} &= \frac{\ln p_2^{'(1)}}{\ln p_2^{(\tau)}}.q_2^{(\tau)} = \frac{\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\ln(0,4375)}.(1-0,4375) = 0,275892 \\
d_2^{(1)} &= q_2^{(1)}.l_2^{(\tau)} = (0,275892).(51,19956) = 14,125556
\end{aligned}$$

Jawab. D.

15. Sebuah perusahaan produksi baru membeli dua buah alat baru yang memiliki waktu hidup (*future lifetime*) yang saling bebas. Jika diberikan;

   i. Kedua alat merupakan alat baru (berusia 0 saat dibeli)

   ii. Untuk alat pertama, $S_0(t) = 1 - \frac{t}{10}$ dimana $0 \leq t \leq 10$

iii. Untuk alat kedua, $S_0(t) = 1 - \frac{t}{7}$ dimana $0 \leq t \leq 7$

Hitunglah waktu yang diharapkan sampai kedua alat tersebut tidak dapat digunakan.

A. 5,0

B. 5,2

C. 5,4

D. 5,6

E. 5,8

Pembahasan:
Last Survivor

$$\begin{aligned}
e^0_{\overline{xy}} &= e^0_x + e^0_y - e^0_{xy} \\
&= \int_0^{10} {}_tp_x dt + \int_0^{10} {}_tp_y dt - \int_0^{7} {}_tp_{xy} dt \\
&= \int_0^{10} \left(1 - \frac{t}{10}\right) dt + \int_0^{7} \left(1 - \frac{t}{7}\right) dt - \int_0^{7} \left(1 - \frac{t}{10}\right) . \left(1 - \frac{t}{7}\right) dt \\
&= 5 + 3,5 - 2,683 \\
&= 5,817
\end{aligned}$$

Jawab. E.

16. Diberikan:

$$\mu_x = \begin{cases} 0,04 & , \quad 0 < x < 40 \\ 0,05 & , \quad x \geq 40 \end{cases}$$

Tentukan nilai $e^0_{25:\overline{25}|}$

A. 15,6

B. 15,2

C. 14,8

D. 14,4

E. 14,0

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
e^0_{x:\overline{m+n}|} &= e^0_{x:\overline{m}|} + {}_m p_x . e^0_{x:\overline{m:n}|} \\
e^0_{25:\overline{25}|} &= e^0_{25:\overline{15}|} + {}_{15}p_{25} . e^0_{40:\overline{10}|} \\
&= \int_0^{15} \exp(-0,04t)dt + \exp(-0,04.15). \int_0^{10} \exp(-0,05t)dt \\
&= 11,279709 + 0,548812(7,869387) \\
&= 15,59852
\end{aligned}$$

Jawab. A.

17. Diketahui sebuah table mortalita dengan periode seleksi 3 tahun sebagai berikut:

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	$q_{[x]+2}$	q_{x+3}	$x+3$
60	0,09	0,11	0,13	0,15	63
61	0,10	0,12	0,14	0,16	64
62	0,11	0,13	0,15	0,17	65
63	0,12	0,14	0,16	0,18	66
64	0,13	0,15	0,17	0,19	67

Hitunglah P dimana P adalah ${}_5p_{[60]+1}$

A. $0 \leq P < 0,43$

B. $0,43 \leq P < 0,45$

C. $0,45 \leq P < 0,47$

D. $0,47 \leq P < 0,49$

E. $0,49 \leq P < 1,00$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_5p_{[60]+1} &= p_{[60]+1} \cdot p_{[60]+2} \cdot p_{[60]+3} \cdot p_{[60]+4} \cdot p_{[60]+5} \\
&= p_{[60]+1} \cdot p_{[60]+2} \cdot p_{63} \cdot p_{64} \cdot p_{65} \\
&= \left(1 - q_{[60]+1}\right)\left(1 - q_{[60]+2}\right)(1 - q_{63})(1 - q_{64})(1 - q_{65}) \\
&= (1 - 0,11)(1 - 0,13)(1 - 0,15)(1 - 0,16)(1 - 0,17) \\
&= 0,458865
\end{aligned}$$

Jawab. C.

18. Diberikan informasi sebagai berikut:

x	80	81	82	83	84	85	86
p_x	0,5	0,4	0,6	0,25	0,2	0,15	0,1

Hitunglah perubahan dari ${}_{2|}q_{\overline{80:84}}$

A. 0,03

B. 0,06

C. 0,10

D. 0,16

E. 0,19

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{x:y}} &= {}_tq_x \cdot {}_tq_y \\ {}_{2|}q_{\overline{80:84}} &= {}_3q_{\overline{80:84}} - {}_2q_{\overline{80:84}} = {}_3q_{\overline{80}} \cdot {}_3q_{\overline{84}} - {}_2q_{\overline{80}} \cdot {}_2q_{\overline{84}} \end{aligned}$$

Dari data diperoleh

$$\begin{aligned} {}_2q_{80} &= 1 - {}_2p_{80} = 1 - p_{80} \cdot p_{81} = 1 - (0,5)(0,4) = 0,8 \\ {}_3q_{80} &= 1 - {}_3p_{80} = 1 - p_{80} \cdot p_{81} \cdot p_{82} = 1 - (0,5)(0,4)(0,6) = 0,88 \\ {}_2q_{84} &= 1 - {}_2p_{84} = 1 - p_{84} \cdot p_{85} = 1 - (0,2)(0,15) = 0,97 \\ {}_3q_{84} &= 1 - {}_3p_{84} = 1 - p_{84} \cdot p_{85} \cdot p_{86} = 1 - (0,2)(0,15)(0,1) = 0,997 \end{aligned}$$

Jika p_{82} berkurang dari 0,6 menjadi 0,3 maka

$${}_3q_{80} = 1 - p_{80} \cdot p_{81} \cdot p_{82} = 1 - (0,5)(0,4)(0,3) = 0,94$$

sehingga ${}_{2|}q_{\overline{80:84}} = (0,94).(0,997) - (0,8)(0,97) = 0,16118$

Perubahan nilai ${}_{2|}q_{\overline{80:84}}$ adalah =0,16118-0,10136=0,05982

NB. Soal kurang, seharusnya dijelaskan di atas sebelumnya bahwa ada dua individu berusia 80 tahun sebagai (x) dan berusia 84 tahun sebagai (y)

Jawab. B.

19. Untuk kehidupan pada usia 30, dampak suatu terobosan medis diperkirakan dapat meningkatkan harapan hidup selama 4 tahun.

    Sebelum dilakukan terobosan medis, $S_0(t) = 1 - \frac{t}{100}$ dimana $0 \leq t \leq 100$

Setelah dilakukan terobosan medis $S_0(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$ dimana $0 \leq t \leq \omega$

Tentukan nilai dari ω

A. 105

B. 106

C. 107

D. 108

E. 109

Pembahasan:
Fungsi menggunakan asumsi De Moivre

$$\begin{aligned} e_{30}^{0} &= \int_0^{\omega-30} \left(1 - \frac{t}{\omega - 30}\right) dt \\ &= \frac{\omega - 30}{2} \end{aligned}$$

Sebelum dilakukan terobosan

$$e_{30}^{0} = \frac{\omega - 30}{2} = \frac{100 - 30}{2} = 35$$

Setelah dilakukan terobosan harapan hidupnya menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\omega' - 30}{2} &= e_{30}^{0} + 4 \\ \omega' - 30 &= 2.(35 + 4) \\ \omega' &= 108 \end{aligned}$$

Jawab. D.

20. Tingkat kematian untuk Audra (usia 25 tahun) adalah $l_x = 50(100 - x)$, $0 \leq x \leq 100$. Jika Audra menggunakan balon udara, maka tingkat kematiannya akan disesuaikan hanya untuk tahun mendatang saja dan dia akan memiliki *force of mortality* yang konstan sebesar 0,1. Tentukan penurunan harapan hidup selama 11 tahun untuk Audra jika dia menggunakan balon udara.

A. 0,1

B. 0,35

C. 0,6

D. 0,8

E. 1,0

Pembahasan:
Jika Audra tidak menggunakan balon udara

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{50(100-x-t)}{50(100-x)} = \frac{100-x-t}{100-x} \\ e^0_{25:\overline{11}|} &= \int_0^{11} \left(1 - \frac{t}{100-25}\right) dt = \left[t - \frac{t^2}{150}\right]_0^{11} = 10,1933 \end{aligned}$$

Jika Audra menggunakan balon udara

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= \exp\left(-\int_0^t 0,1dt\right) = \exp(-0,1t) \\ e^0_{25:\overline{11}|} &= e^0_{25:\overline{1}|} + e^0_{26:\overline{10}|} \\ &= \int_0^1 {}_tp_{25}dt + p_{25}. \int_0^{10} \left(1 - \frac{t}{100-25}\right) dt \\ &= \int_0^1 \exp(-0,1t)dt + \exp(-0,1). \int_0^{10} \left(1 - \frac{t}{75}\right) dt \\ &= 0,95163 + 0,90484(9,32432) \\ &= 9,3886 \end{aligned}$$

Penurunan harapan hidupnya sebesar =10,1933-9,3886=0,8047

Jawab. D.

21. Diberikan informasi berikut:

    i. $e^0_{30:\overline{40}|} = 27,692$

    ii. $S_0(t) = 1 - \frac{t}{\omega}$ dimana $0 \leq t \leq \omega$

    iii. T_x adalah peubah acak *future lifetime* untuk x

    Hitunglah $Var(T_{30})$

    A. 332

    B. 352

    C. 372

    D. 392

    E. 412

Pembahasan:
Fungsi survival diasumsikan menggunakan Hukum De Moivre

$$\begin{aligned}
e^0_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \frac{\omega - x - t}{\omega - x} dt \\
e^0_{30:\overline{40}|} &= \int_0^{40} \frac{\omega - 30 - t}{\omega - 30} dt \\
&= \int_0^{40} \left(1 - \frac{t}{\omega - 30}\right) dt \\
&= t - \frac{t^2}{2(\omega - 30)} \Big|_0^{40} \\
27,692 &= 40 - \frac{40^2}{2(\omega - 30)} \\
\omega &= \frac{40^2}{(40 - 27,692)} + 30 \\
&= 94,998375 \approx 95 \\
Var(T_{30}) &= 2\int_0^{95-30} t._t p_{30} dt - \left(\int_0^{95-30} {}_t p_{30}\right)^2 \\
&= 2\int_0^{65} \frac{65t - t^2}{65} dt - \left(\int_0^{65} \frac{65 - t}{65} dt\right)^2 = \frac{4225}{3} - \frac{4225}{4} = 352,08333
\end{aligned}$$

Jawab. B.

Gunakan informasi berikut untuk menjawab pertanyaan nomor 22 dan 23.

Waktu (t)	Jumlah yang beresiko saat t	Jumlah kegagalan saat t
1	30	5
2	27	9
3	32	6
4	25	5
5	20	4

22. Tentukan aproksimasi GreenwoodâĂŹs dari variansi ${}_3\hat{p}_1$

A. 0,0067

B. 0,0073

C. 0,0080

D. 0,0091

E. 0,0105

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_3\hat{p}_1 &= \left(\frac{27-9}{27}\right)\left(\frac{32-6}{32}\right)\left(\frac{25-5}{25}\right) = 0,43333 \\
\widehat{Var}[{}_3\hat{p}_1] &= [{}_3\hat{p}_1]^2 \cdot \sum_{j=2}^{4}\left(\frac{d_j}{r_j(r_j-d_j)}\right) \\
&= (0,433333)^2 . \left(\frac{9}{(27)(18)} + \frac{6}{(32)(26)} + \frac{5}{(25)(20)}\right) \\
&= 0,006709
\end{aligned}
$$

Jawab. A.

23. Tentukan interval kepercayaan 95% berdistribusi *log transformed* untuk $H(3)$ berdasarkan estimasi *Nelson-Aalen*.

   A. $(0,3 : 0,9)$

   B. $(0,31 : 1,54)$

   C. $(0,39 : 0,99)$

   D. $(0,56 : 0,79)$

   E. $(0,44 : 1,07)$

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(3) &= \sum_{j=1}^{3}\frac{d_j}{r_j} = \frac{5}{30} + \frac{9}{27} + \frac{6}{32} = 0,6875 \\
\widehat{Var[\hat{H}(3)]} &= \sum_{j=1}^{3}\frac{d_j}{r_j^2} = \frac{5}{30^2} + \frac{9}{27^2} + \frac{6}{32^2} = 0,0238 \\
U &= \exp\left(\frac{Z_{\frac{0,95+1}{2}}\sqrt{\widehat{Var}[\hat{H}(3)]}}{\hat{H}(3)}\right) = \exp\left(\frac{1,96\sqrt{0,0238}}{0,6875}\right) = 1,5519
\end{aligned}
$$

Log Transformed confidence untuk estimasi Nelson Aaen

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\hat{H}(t_k)}{U} : U.\hat{H}(t_k)\right) &= \left(\frac{\hat{H}(3)}{U} : U.\hat{H}(3)\right) \\
&= \left(\frac{0,6875}{1,5519} : (0,6875)(1,5519)\right) = (0,443 : 1,0669)
\end{aligned}
$$

Jawab. E.

24. Diberikan dua deret waktu x_t dan y_t , dimana masing masing masing deret waktu diasumsikan sebagai *random walk*. Manakah diantara pernyataan berikut yang benar?

    A. Tidak ada kombinasi linear dari dua deret waktu yang dapat tak berubah (*stationary*)

    B. Deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$, akan selalu tak berubah (*stationary*) untuk beberapa nilai λ

    C. Deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$ dapat tak berubah (*stationary*) untuk beberapa nilai λ yang dapat ditentukan secara jelas menggunakan teknik regresi

    D. Deret waktu $z_t = x_t - \lambda y_t$ dapat tak berubah (*stationary*) untuk beberapa nilai λ yang dapat diestimasi dengan menjalankan *ordinary least square regression* dari x_t dan y_t

    E. Tidak ada pernyataan yang benar

    Pembahasan:
    Sometimes two variables will follow random walks but a linear combination of those variables will be stationery. For example, it may be that variables x_t and y_t are both first order homogeneous nonstationary random walks but the variable $z_t = x_t - \lambda y_t$ is stationery. If this is the case, we say that x_t and y_t are co-integrated and call λ the co-integrating parameter. One can then estimate λ by running an OLS regression of x_t and y_t. (Unlike the case of two random walks that are not co-integrated, here OLS provides a consistent estimator of λ). Furthermore, the residual of this regression then can be used to test wether x_t and y_t are indeed co-integrated

    Sumber: Econometric Models and Economic Forecast (Fourth Edition), 1998, by Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L., Halaman 513-514

    Jawab. D.

25. Untuk sebuah *table double decrement*, diberikan:

Usia x	$l_x^{(\tau)}$	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$
40	1000	60	55
41	-	-	70
42	750	-	-

Setiap *decrement* menyebar secara uniform, hitunglah nilai $q'^{(1)}_{41}$

A. 0,077

B. 0,078

C. 0,079

D. 0,080

E. 0,081

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
l_{41}^{(\tau)} &= l_{40}^{(\tau)} - d_{40}^{(1)} - d_{40}^{(2)} \\
&= 1000 - 60 - 55 \\
&= 885
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{42}^{(\tau)} &= l_{41}^{(\tau)} - d_{41}^{(1)} - d_{41}^{(2)} \\
750 &= 885 - d_{41}^{(1)} - 70 \\
d_{41}^{(1)} &= 65
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{41}^{(1)} &= \frac{d_{41}^{(1)}}{l_{41}^{(\tau)}} = \frac{65}{885} = 0,073446 \\
q_{41}^{(\tau)} &= \frac{d_{41}^{(\tau)}}{l_{41}^{(\tau)}} \\
&= \frac{65+70}{885} = 0,152542 \\
q_{41}^{\prime(1)} &= 1 - p_{41}^{\prime(1)} \\
&= 1 - \left(p_{41}^{(\tau)}\right)^{\frac{q_{41}^{(1)}}{q_{41}^{(\tau)}}} \\
&= 1 - (1 - 0,152542)^{\frac{0,073446}{0,152542}} \\
&= 0,076599
\end{aligned}$$

Jawab. A.

26. Diberikan sebuah informasi mengenai aktivitas penyelesaian klaim selama 3 tahun terakhir:

Jumlah Klaim yang Diselesaikan			
Tahun Pelaporan	Tahun Penyelesaian		
	2016	2017	2018
2016	6	3	1
2017		5	2
2018			4

L merupakan peubah acak yang menggambarkan tentang jeda waktu dalam proses penyelesaian klaim.

Hitunglah $Pr[L = 1|L < 3]$ dengan terlebih dahulu memperkirakan fungsi survival untuk data sensor kanan.

A. 0,30

B. 0,29

C. 0,28

D. 0,27

E. 0,26

Pembahasan:
Diperoleh tabel :

T_i	L_i	R_i	d_i	Y_i	$\Pr[L < l_i \mid L < 3]$
0	0	2	6		
1	0	2	5		
2	0	2	4	15	$\left(\frac{99}{160}\right).0 = 0$
0	1	1	3		
1	1	1	2	16	$\left(\frac{9}{10}\right).\frac{11}{16} = \frac{99}{160}$
0	2	0	1	10	$\frac{9}{10}$

Dengan

$Y_i = 15 \Rightarrow Y_i = 21 - 1 - 2 - 3$ nilai 1,2, dan 3 dari nilai d_i untuk $R_i < 2$
$Y_i = 16 \Rightarrow Y_i = 21 - 1 - 4$ nilai 1 dari nilai d_i untuk $R_i < 1$ dan 4 dari d_i untuk $L_i > 1$
$Y_i = 10 \Rightarrow Y_i = 21 - 5 - 4 - 2$ nilai 5,4, dan 2 dari nilai d_i untuk $L_i > 0$

$$\Pr[L < l_i \mid L < 3] = \frac{9}{10} = \frac{10-1}{10}$$
$$\Pr[L < l_i \mid L < 3] = \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{11}{16}\right) = \left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{16-2-3}{16}\right)$$
$$\Pr[L < l_i \mid L < 3] = \frac{99}{160}.0 = \left(\frac{99}{160}\right)\left(\frac{15-4-5-6}{16}\right)$$

Diperoleh $\Pr[L = 1 \mid L < 3] = \Pr[L < 2 \mid L < 3] - \Pr[L < 1 \mid L < 3] = \frac{9}{10} - \frac{99}{160} = 0,28125$

Jawab. C.

27. Untuk sebuah *survival study*, diberikan:

    i. Product Limit estimator $\hat{S}(t_0)$ digunakan untuk membangun interval kepercayaan untuk $S(t_0)$

    ii. 95% interval kepercayaan berdistribusi *log transformed* untuk $S(t_0)$ adalah $(0,695 : 0,843)$

    Tentukanlah nilai $\widehat{S}(t_0)$

    A. 0,758

B. 0,762

C. 0,765

D. 0,769

E. 0,779

Pembahasan:
Log-Transformed confidence untuk estimasi Product Limit

$$\left(\hat{S}(t_k)^{\frac{1}{U}} : \hat{S}(t_k)^U\right)$$

dengan

$$U = \exp\left(\frac{z_{\frac{p+1}{2}}\sqrt{\widehat{Var}[\hat{S}(t_k)]}}{\hat{S}(t_k).\ln[\hat{S}(t_k)]}\right)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\hat{S}(t_0)^{\frac{1}{U}} &= 0,695 \Rightarrow \frac{1}{U}\ln\left[\hat{S}(t_0)\right] = \ln(0,695)...(1) \\
\hat{S}(t_0)^U &= 0,843 \Rightarrow U\ln\left[\hat{S}(t_0)\right] = \ln(0,843)...(2)
\end{aligned}$$

Dengan membagi (2) dengan (1) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{U\ln\left[\hat{S}(t_0)\right]}{\frac{1}{U}\ln\left[\hat{S}(t_0)\right]} = U^2 &= \frac{\ln(0,843)}{\ln(0,695)} \\
U &= \sqrt{\frac{\ln(0,843)}{\ln(0,695)}} \\
&= 0,6851
\end{aligned}$$

Diperoleh:

$$\hat{S}(t_0) = \left(\hat{S}(t_0)^{\frac{1}{U}}\right)^U = 0,695^{0,6851} = 0,7794$$

Jawab. E.

28. Data pembayaran klaim dari 10 polis adalah:

$$2 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 5^+ \quad 6 \quad 7 \quad 7^+ \quad 9 \quad 10^+$$

Tanda + mengindikasikan bahwa kerugian melebihi limit polis.

Dengan menggunakan *Product Limit estimator*, tentukan probabilitas bahwa kerugian yang terjadi pada polis melebihi 8.

A. 0,40

B. 0,36

C. 0,30

D. 0,25

E. 0,20

Pembahasan:

Akan dibuat tabel data

i	d_i entry	x_i event	u_i censored
1	0	2	-
2	0	3	-
3	0	3	-
4	0	5	-
5	0	-	5
6	0	6	-
7	0	7	-
8	0	-	7
9	0	9	-
10	0	-	10

Table Survival

j	t_j	d_j	r_j
1	2	1	10
2	3	2	9
3	5	1	7
4	6	1	5
5	7	1	4
6	9	1	2

Fungsi Survival

t	$\hat{S}(t)$
$0 \leq t < 2$	1
$2 \leq t < 3$	$1 - \frac{1}{10} = 0,9$
$3 \leq t < 5$	$(0,9)\left(1 - \frac{2}{9}\right) = 0,7$
$5 \leq t < 6$	$(0,7)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = 0,6$
$6 \leq t < 7$	$(0,6)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 0,48$
$7 \leq t < 9$	$(0,48)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0,36$
$t \geq 9$	$(0,36)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0,18$

Diperoleh : $\hat{S}(8) = \hat{S}(7) = 0,36$

Jawab. B.

29. Untuk model regresi $Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$

    i. $r_{XY_2} = 0,4$

    ii. $r_{XY_3.X_2} = -0,4$

    Tentukanlah nilai R^2

    A. 0,03

    B. 0,16

    C. 0,29

    D. 0,71

    E. 0,84

    Pembahasan:

$$r^2_{YX_3.X_2} = \frac{R - r^2_{YX_2}}{1 - r^2_{YX_2}}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} R^2 &= 1 - (1 - r^2_{YX_2})(1 - r^2_{YX_3.X_2}) \\ &= 1 - [1 - (0,4)^2].[1 - (-0,4)^2] \\ &= 0,2944 \\ &\approx 0,29 \end{aligned}$$

Jawab : C.

30. Diberikan beberapa informasi berikut:

a) Z_1 dan Z_2 adalah peubah acak berdistribusi normal (0,1) yang saling bebas

b) a, b, c, d, e, f adalah konstanta

c) $Y = a + bZ_1 + cZ_2$ dan $X = d + eZ_1 + fZ_2$

Tentukanlah $\mathbb{E}(Y|X)$

A. a

B. $a + (b + c)(X - d)$

C. $a + (be + cf)(X - d)$

D. $a + [(be + cf)/(e^2 - f^2)](X - d)$

E. $a + [(be + cf)/(e^2 + f^2)](X - d)$

Pembahasan: Rumus yang digunakan dalam soal ini adalah

$$\begin{aligned}
E[Y|X] &= E[Y] + \frac{Cov(X,Y)}{Var[X]}(X - E[X]) \\
Cov(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
E[aX + bY] &= aE[X] + bE[Y] \\
Var[aX + bY + c] &= a^2Var[X] + b^2Var[Y] \\
E[X^2] &= Var[X] + (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned}
E[Y|X] &= E[Y] + \frac{Cov(X,Y)}{Var[X]}(X - E[X]) \\
&= E[Y] + \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{Var[X]}(X - E[X]) \\
&= E[a + bZ_1 + cZ_2] + \frac{E[(a + bZ_1 + cZ_2)(d + eZ_1 + fZ_2)]}{Var[d + eZ_{1+fZ_2}]} \\
&\quad \times (X - E[d + eZ_1 + fZ_2]) - \frac{E[(a + bZ_1 + cZ_2)]E[(d + eZ_1 + fZ_2)]}{Var[d + eZ_{1+fZ_2}]} \\
&\quad \times (X - E[d + eZ_1 + fZ_2])
\end{aligned}$$

Selanjutnya:

$$\begin{aligned}
E[a + bZ_1 + cZ_2] &= a + bE[Z_1] + cE[Z_2] = a + b(0) + c(0) = a \\
E[d + eZ_1 + fZ_2] &= d + eE[Z_1] + fE[Z_2] = d + e(0) + f(0) = d \\
(E[a + bZ_1 + cZ_2])(E[d + eZ_1 + fZ_2]) &= ad \\
Var[d + eZ_1 + fZ_2] &= e^2Var[Z_1] + f^2Var[Z_2] = e^2(1) + f^2(1) = e^2 + f^2
\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
E[(a+bZ_1+cZ_2)(d+eZ_1+fZ_2)] &= ad+aeE[Z_1]+afE[Z_2]+bdE[Z_1]+beE[Z_1^2] \\
&\quad +bfE[Z_1]E[Z_2]+cdE[Z_2]+ceE[Z_1]E[Z_2]+cfE[Z_2^2] \\
&= ad+ae(0)+af(0)+bd(0)+be(1)+bf(0)(0)+cd(0) \\
&\quad +ce(0)(0)+cf(1) \\
&= ad+be+cf
\end{aligned}
$$

Jadi

$$
\begin{aligned}
E[Y|X] &= E[a+bZ_1+cZ_2]+\frac{E[(a+bZ_1+cZ_2)(d+eZ_1+fZ_2)]}{Var[d+eZ_{1+fZ_2}]} \\
&\quad \times(X-E[d+eZ_1+fZ_2])-\frac{E[(a+bZ_1+cZ_2)]E[(d+eZ_1+fZ_2)]}{Var[d+eZ_{1+fZ_2}]} \\
&\quad \times(X-E[d+eZ_1+fZ_2]) \\
&= a+\frac{ad+be+cf}{e^2+f^2}(X-d)-\frac{ad}{e^2+f^2}(X-d) \\
&= a+\frac{be+cf}{e^2+f^2}(X-d)
\end{aligned}
$$

Jawab : E.