Pembahasan Soal Ujian Profesi Aktuaris

Persatuan Aktuaris Indonesia

A60-Matematika Aktuaria

Periode 2014-2018

Tim Penyusun:

Danang Teguh Qoyyimi

Wawan Hafid Syaifudin

Maria Anestasia

Felivia Kusnadi

READI

Risk Management, Economic Sustainability and Actuarial Science Development in Indonesia

2018

Daftar Isi

1 Periode Mei 2018

1. Sebuah asuransi diskrit khusus berjangka 2 tahun dengan uang pertanggungan tahun pertama sebesar 500.000, dan pada tahun ke-2, baik premi maupun manfaat kematian naik sebesar 10%. Diberikan $q_x = 0,01$, $q_{x+1} = 0,02$ dan $i = 0,05$. Hitunglah premi netto tahunan untuk tahun pertama.

   A. 7.176

   B. 7.181

   C. 7.186

   D. 7.191

   E. 7.196

   Pembahasan: Misalkan P adalah premi netto untuk tahun pertama. Maka,

$$\begin{aligned} P\left(1 + (1+10\%)v(p_x)\right) &= 500.000\left(v(q_x) + (1+10\%)v^2(p_x)(q_{x+1})\right) \\ P\left(1 + \frac{1,10}{1,05}(0,99)\right) &= 500.000\left(\frac{1}{1,05}(0,01) + \frac{1,10}{1,05}(0,99)(0,02)\right) \\ P(2,037143) &= 14.639,46 \\ P &= 7186,268617 \end{aligned}$$

   Jawab: C

2. Terdapat 2 *decrement* untuk karir seorang aktuaris yang berumur 50 tahun, yaitu *decrement* pertama mortalita dan *decrement* kedua adalah pensiun. *Decrement* 1 mengikuti *uniform survival distribution* dengan $\omega = 75$, sedangkan *decrement* 2 memiliki $\mu_y^{(2)} = 0,10$ untuk $y \geq 50$. Tentukan probabilitas aktuaris tersebut tetap pada pekerjaannya paling tidak selama 5 tahun namun kurang dari 15 tahun.

   A. 0,145

   B. 0,150

   C. 0,155

   D. 0,160

E. 0,165

Pembahasan: Jawab: ANULIR.

3. Diberikan $l_x = 2.500(64 - 0,8x)^{\frac{1}{3}}$, dengan $0 \leq x \leq 80$. Tentukan $Var(X)$!

   A. 16,2857

   B. 0,2857

   C. 4.114,2857

   D. 514,2857

   E. 3,2857

   Pembahasan: Pertama, kita hitung $S_0(t)$:

$$S_0(t) = \frac{l_t}{l_0} = \frac{2.500(64 - 0,8t)^{1/3}}{2.500(64 - 0,8(0))^{1/3}} = 0,25(64 - 0,8t)^{1/3}$$

Maka

$$\mathbb{E}(T_0) = \int_0^{80} S_0(t)dt = \int_0^{80} 0,25(64 - 0,8t)^{1/3}dt = 60,$$

dan

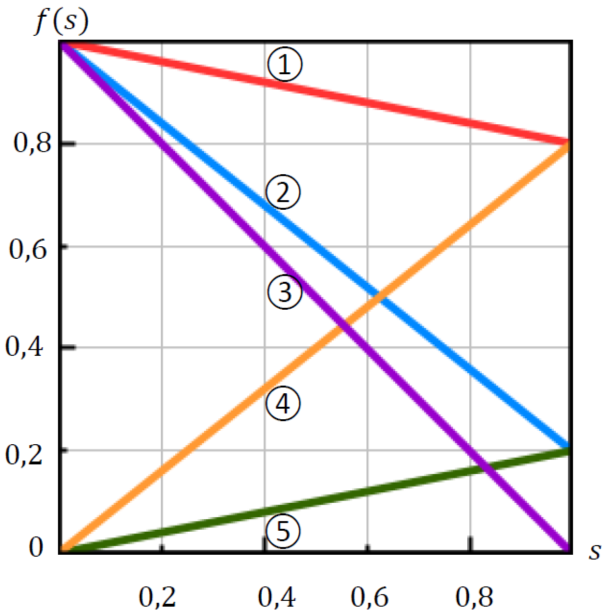
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T_0^2) &= 2\int_0^{80} tS_0(t)dt = 2\int_0^{80} 0,25t(64 - 0,8t)^{1/3}dt \\ &= 2(2057,142858) \\ &= 4114,2856\end{aligned}$$

Sehingga $Var(X) = Var(T_0) = \mathbb{E}(T_0^2) - [\mathbb{E}(T_0)]^2 = 514,2857$
Jawab: D.

Berikut adalah informasi untuk soal nomor 4 dan 5.

Untuk (x) dan (y) yang saling bebas dengan $q_x = 0,2$ dan $q_y = 0,1$, diketahui bahwa tingkat mortalitas untuk *integral ages* mengikuti distribusi seragam.

4. Manakah grafik yang tepat untuk menggambarkan ${}_sp_x$ sebagai fungsi dari s dengan $0 \leq s \leq 1$?



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

Pembahasan: Diketahui bahwa tingkat mortalitas untuk *integral ages* mengikuti distribusi seragam, maka ${}_sq_x = s \cdot q_x$, sehingga ${}_sp_x = 1 - s \cdot q_x = 1 - 0,2s$. Maka grafik yang tepat adalah grafik no 1.

Jawab: A.

5. Tentukanlah $g(s)$ sehingga ${}_sq_{xy} = s \cdot q_{xy} + g(s) \cdot q_{\overline{xy}}$ terpenuhi untuk $0 \leq s \leq 1$.

   A. $g(s) = s^2 - s$

   B. $g(s) = \sqrt{1 - s^2}$

   C. $g(s) = s(1 - s)$

   D. $g(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s}}$

   E. $g(s) = 1 - s$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_sq_{xy} &= 1 - {}_sp_{xy} \\
&= 1 - {}_sp_x \cdot {}_sp_y \\
&= 1 - (1 - {}_sq_x) \cdot (1 - {}_sq_y) \\
&= 1 - (1 - ({}_sq_x + {}_sq_y) + {}_sq_x \cdot {}_sq_y) \\
&= {}_sq_x + {}_sq_y - {}_sq_x \cdot {}_sq_y \\
&= sq_x + sq_y - sq_x \cdot sq_y \\
&= s(q_x + q_y) - s^2(q_{\overline{xy}}) \\
&= s(q_{xy} + q_{\overline{xy}}) - s^2(q_{\overline{xy}}) \\
&= s \cdot q_{xy} + q_{\overline{xy}}(s - s^2) \\
&= s \cdot q_{xy} + q_{\overline{xy}}(s)(1 - s)
\end{aligned}$$

Sehingga $g(s) = s(1-s)$.
Jawab: C.

6. Diketahui: $P_{x:\overline{3}|} = 0,35$ $\quad i = 0,06$ $\quad l_x = 100$ $\quad l_{x+1} = 95$
   Hitunglah nilai 10.000 $\left({}_2V_{x:\overline{3}|} - {}_1V_{x:\overline{3}|}\right)$!
   A. 2.565
   B. 2.555
   C. 2.575
   D. 2.585
   E. 2.595

Pembahasan: Diketahui:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{95}{100} \qquad q_x = 1 - p_x = \frac{5}{100}$$

Dengan menggunakan rumus rekursif,

$$(10.000\,{}_0V_{x:\overline{3}|} + 10.000 \cdot P_{x:\overline{3}|})(1+i) = 10.000 \cdot q_x + p_x \cdot 10.000\,{}_1V_{x:\overline{3}|}$$

$$\Rightarrow 10.000\,{}_1V_{x:\overline{3}|} = \frac{(10.000 \cdot P_{x:\overline{3}|})(1+i) - 10.000q_x}{p_x} = 3.378,947$$

Dan

$$(10.000{}_2V_{x:\overline{3}|} + 10.000P_{x:\overline{3}|})(1+i) = 10.000 \Longrightarrow 10.000{}_2V_{x:\overline{3}|} = 5.933,962$$

Sehingga

$$10.000\left({}_2V_{x:\overline{3}|} - {}_1V_{x:\overline{3}|}\right) = 2.555,015$$

Jawab: B.

7. Diberikan sebuah fungsi survival dari seorang bayi yang baru lahir:

$$S_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{250}, & 0 \le x < 40 \\ 1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2, & 40 \le x \le 100 \end{cases}$$

Hitunglah probabilitas seseorang yang berumur 25 tahun akan meninggal dalam 30 tahun.

A. 0,210

B. 0,215

C. 0,220

D. 0,225

E. 0,230

Pembahasan:

$$_{30}q_{25} = \frac{S_0(25) - S_0(55)}{S_0(25)} = \frac{\left(1 - \frac{25}{250}\right) - \left(1 - \left(\frac{55}{100}\right)^2\right)}{1 - \frac{25}{250}} = 0,255$$

Jawab: D.

8. A dan B, keduanya berumur 45 tahun dengan sisa umur di masa yang akan datang saling bebas, memiliki polis asuransi dengan ketentuan seperti berikut:

   i. Premi dibayarkan secara tahunan pada awal tahun sepanjang A dan B masih hidup

   ii. Manfaat sebesar 60.000 per tahun akan dibayarkan di awal tahun selama hanya B yang hidup

   iii. Manfaat sebesar 3 kali premi netto akan dibayarkan di awal tahun selama hanya A yang hidup

   iv. $i = 0,06$ $\quad = 14,1121$ $\quad \ddot{a}_{45} = 12,6994$

Tentukan premi netto untuk polis tersebut.

A. 5.509

B. 7.523

C. 10.018

D. 12.540

E. 15.371

Pembahasan: Jawab: ANULIR.
Komentar: Jika informasi yang diberikan adalah $\ddot{a}_{45} = 14,1121$ dan $\ddot{a}_{45:45} = 12,6994$, maka soal tersebut dapat kita kerjakan seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} APV(Benefits) &= 60.000\ddot{a}_{45|45} + 3P\ddot{a}_{45|45} \\ \text{dengan } \ddot{a}_{45|45} &= \ddot{a}_{45} - \ddot{a}_{45:45} = 14,1121 - 12,6994 = 1,4127 \\ APV(Premiums) &= P\ddot{a}_{45:45} \end{aligned}$$

Sehingga

$$APV(Premiums) = APV(Benefits)$$

$$P(12,6994) = 60.000(1,4127) + 3P(1,4127)$$

$$P = 10.018$$

Yaitu, jawabannya adalah C.

9. Sebuah grup berisi 10.000 orang berumur x yang saling bebas, diketahui memiliki informasi sebagai berikut :

   i. Manfaat anuitas akan dibayarkan setiap awal tahun sebesar 1 untuk setiap orang yang hidup

   ii. $A_x = 0,55$

   iii. ${}^2A_x = 0,33$

   iv. $i = 0,05$

   Y adalah peubah acak dari nilai sekarang (*Present Value*) dari total pembayaran anuitas. Dengan menggunakan pendekatan normal, tentukan jumlah dana yang dibutuhkan agar 95% yakin anuitas di atas dapat dibayarkan. Untuk suatu X yang berdistribusi normal, diketahui

   $$\mathbb{P}(-1,96 < X < 1,96) = 0,95 \qquad \mathbb{P}(-1,645 < X < 1,645) = 0,90.$$

   A. 97.700

   B. 96.675

C. 95.650

D. 94.625

E. 93.600

Pembahasan: Misalkan Y_i adalah peubah acak dari nilai sekarang untuk pembayaran anuitas pada individu ke-i. Maka,

$$\mathbb{E}(Y_i) = \ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d} = 9,45 \qquad Var(Y_i) = \frac{{}^2A_x - (A_x)^2}{d^2} = 12,1275.$$

Maka $Y = \sum_{i=1}^{10.000} Y_i$ menyatakan peubah acak dari nilai sekarang (*Present Value*) dari total pembayaran anuitas.

$$\mathbb{E}(Y) = 10.000\mathbb{E}(Y_i) = 94.500 \qquad Var(Y) = 10.000 Var(Y_i) = 121.275$$

$$\mathbb{P}(Y \leq F) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{F - 94.500}{\sqrt{121.275}}\right) = 0,95$$

$$\Longrightarrow \frac{F - 94.500}{\sqrt{121.275}} = 1,96 \longrightarrow F = 95.182,5614$$

Jawab: TIDAK JELAS.
komentar: Seharusnya $\mathbb{P}(Z < 1,645) = 0,95$ bukan $\mathbb{P}(Z < 1,96) = 0,95$. Jika menggunakan $\mathbb{P}(Z < 1,645) = 0,95$, maka nilai $F = 95072.864$.

10. Untuk sebuah asuransi dwiguna (*endowment insurance*) dengan 15 kali pembayaran yang berkelanjutan secara penuh (*fully continuous*) selama 25 tahun senilai 1000 untuk (35), diketahui:

    i. $\mu_{35+t} = 0,03$ untuk $t \geq 0$

    ii. $\delta = 0,05$

    iii. $1.000\bar{A}^{\,1}_{35:\overline{25}|} = 324,25$

    iv. $\bar{a}_{35:\overline{25}|} = 8,7351$

    Hitunglah ${}_5V$, *net premium reserve* pada tahun ke-5!

    A. 139,03

    B. 149,65

    C. 152,17

    D. 154,23

    E. 163,31

Pembahasan: Untuk *net premium reserve*, kita gunakan rumus prospektif,

$$({}_5V + P\bar{a}_{40:\overline{10}|}) = 1.000\bar{A}_{40:\overline{20}|}$$

Kita hitung besarnya premi menggunakan prinsip ekuivalensi:

$$P\bar{a}_{35:\overline{15}|} = 1.000\bar{A}_{35:\overline{25}|} \Longrightarrow P = \frac{1.000\bar{A}_{35:\overline{25}|}}{\bar{a}_{35:\overline{15}|}}$$

Selain itu, kita juga gunakan rumus:

$$\begin{aligned}
{}_nE_x &= v^n {}_np_x = (e^{-n\delta})(e^{-n\mu}) = e^{-n(0,08)} \\
\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} &= \bar{A}_x - {}_nE_x\bar{A}_{n+x} = \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right) - e^{-n(0,08)}\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right) = \frac{3}{8}(1 - e^{-n(0,08)}) \\
\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x = \frac{3}{8}(1 - e^{-n(0,08)}) + e^{-n(0,08)} \\
\bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{35:\overline{15}|} &= \frac{3}{8}(1 - e^{-15(0,08)}) + e^{-15(0,08)} = 0,563246 \\
\bar{a}_{35:\overline{15}|} &= \frac{1 - \bar{A}_{35:\overline{15}|}}{\delta} = 8,735072 \\
\bar{A}_{35:\overline{25}|} &= \frac{3}{8}(1 - e^{-25(0,08)}) + e^{-25(0,08)} = 0,459585 \\
\bar{A}_{40:\overline{10}|} &= \frac{3}{8}(1 - e^{-10(0,08)}) + e^{-10(0,08)} = 0,655831 \\
\bar{a}_{40:\overline{10}|} &= \frac{1 - \bar{A}_{40:\overline{10}|}}{\delta} = 6,883388 \\
\bar{A}_{40:\overline{20}|} &= \frac{3}{8}(1 - e^{-20(0,08)}) + e^{-20(0,08)} = 0,501185
\end{aligned}$$

Net premium reserve pada tahun ke-5 adalah:

$$\begin{aligned}
({}_5V + P\bar{a}_{40:\overline{10}|}) &= 1.000\bar{A}_{40:\overline{20}|} \\
{}_5V &= 1.000\bar{A}_{40:\overline{20}|} - \frac{1.000\bar{A}_{35:\overline{25}|}}{\bar{a}_{35:\overline{15}|}}(\bar{a}_{40:\overline{10}|}) \\
&= 139,0248
\end{aligned}$$

Jawab: A.

11. Sebuah asuransi berjangka 2 tahun diskrit diterbitkan untuk (x) dengan $i = 0$. Diketahui $q_x = 0,25$ dan $Var(Z^1_{x:\overline{2}|}) = 0,75$. Hitunglah q_{x+1}!

    A. 0,5

    B. 0,6

    C. 0,7

    D. 0,8

    E. 0,9

    Pembahasan: Diketahui $i = 0$, maka $v = 1$.

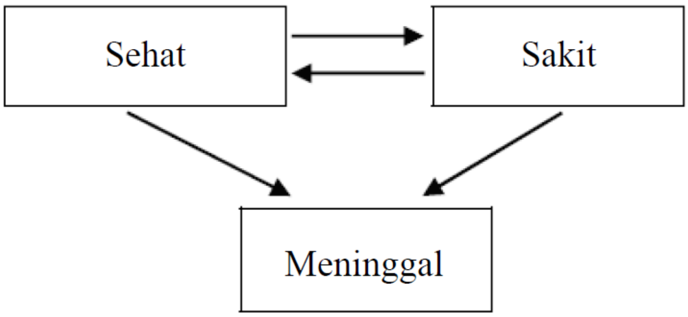
$$A^1_{x:\overline{2}|} = q_x + vp_xq_{x+1} = q_x + p_xq_{x+1}$$

$${}^2A^1_{x:\overline{2}|} = q_x + v^2p_xq_{x+1} = q_x + p_xq_{x+1}$$

$$\begin{aligned} Var(A^1_{x:\overline{2}|}) &= {}^2A^1_{x:\overline{2}|} - (A^1_{x:\overline{2}|})^2 \\ 0,75 &= q_x + p_xq_{x+1} - [q_x + p_xq_{x+1}]^2 \\ 0,75 &= 0,25 + 0,25q_{x+1} - [0,25 + 0,25q_{x+1}]^2 \end{aligned}$$

    Diperoleh persamaan kuadrat $0,0625q^2_{x+1} - 0,25q_{x+1} + 0,3125 = 0$ yang memiliki akar kompleks.
    Jawab: ANULIR.

12. Sedang dilakukan sebuah penelitian mengenai asumsi yang digunakan untuk menentukan tingkat harga premi untuk sebuah polis asuransi kesehatan. Perhitungan didasarkan pada *multiple state model* seperti diagram berikut:



Diketahui,

i. Premi dibayar secara berkelanjutan (*continuous*) oleh pemegang polis **Sakit**

ii. Manfaat sakit dibayarkan secara berkelanjutan kepada pemegang polis **Sakit**

iii. Tidak ada manfaat kematian

Dari kondisi - kondisi berikut, manakah yang paling mungkin menyebabkan kenaikan *rate* premi?

A. Tingkat suku bunga yang lebih rendah dan tingkat sembuh dari **Sakit** yang lebih tinggi

B. Tingkat kematian yang lebih rendah dari kondisi **Sehat** dan kondisi **Sakit**

C. Tingkat kematian yang lebih tinggi dari kondisi **Sehat** maupun **Sakit**

D. Tingkat sembuh dari **Sakit** yang lebih rendah dan tingkat kematian yang lebih rendah dari **Sakit**

E. Tingkat suku bunga yang lebih tinggi dan tingkat kematian yang lebih rendah dari **Sehat**

Pembahasan: Dapat dijabarkan bahwa:

A. Tingkat suku bunga yang lebih rendah akan menyebabkan kenaikan premi, tetapi tingkat sembuh dari **Sakit** yang lebih tinggi akan menurunkan premi, karena proyeksi dari manfaat sakit akan turun dan lebih banyak pemegang polis yang membayar premi.

B. Tingkat kematian yang lebih rendah dari kondisi **Sehat** $\rightarrow$ ada lebih banyak pemegang polis yang membayar premi $\rightarrow$ penurunan *rate* premi

C. Tingkat kematian yang lebih tinggi dari kondisi **Sakit** $\rightarrow$ penurunan pada manfaat sakit $\rightarrow$ penurunan *rate* premi

D. Tingkat sembuh dari **Sakit** yang lebih rendah $\rightarrow$ kenaikan pada manfaat sakit $\rightarrow$ kenaikan *rate* premi

   Tingkat kematian yang lebih rendah dari **Sakit** $\rightarrow$ kenaikan pada manfaat sakit $\rightarrow$ kenaikan *rate* premi

E. Tingkat suku bunga yang lebih tinggi $\rightarrow$ penurunan *rate* premi
Tingkat kematian yang lebih rendah dari **Sehat** dapat menyebabkan penurunan *rate* premi karena ada lebih banyak pemegang polis **Sehat** yang membayar premi.

Jawab: D.

13. Seorang siswa menghitung nilai $\ddot{a}_x$ dengan $i = 0,05$. Setelah diperiksa, ternyata seharusnya p_{x+1} lebih besar sebesar 0,05 dari yang digunakan oleh siswa tersebut. Dalam perhitungannya, siswa tersebut menggunakan nilai-nilai berikut:
$q_x = 0,1 \qquad q_{x+1} = 0,2 \qquad \ddot{a}_{x+1} = 9$
Bagaimanakah perubahan nilai $\ddot{a}_x$ jika dihitung dengan p_{x+1} yang benar dibandingkan dengan perhitungan awal?

A. Naik sebesar 0,43

B. Naik sebesar 0,57

C. Tidak ada perubahan

D. Turun sebesar 0,57

E. Turun sebesar 0,43

Pembahasan: Kita gunakan rumus rekursif $\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1}$.
Jadi, nilai $\ddot{a}_x$ yang dihitung pada saat awal $(\ddot{a}_{x_0})$ adalah sebesar

$$\ddot{a}_{x_0} = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} = 1 + \frac{1}{1,05}(0,9)(9) = 8,714286$$

Sedangkan, nilai $\ddot{a}_{x+2} = \frac{\ddot{a}_{x+1}-1}{vp_{x+1}} = \frac{9-1}{0,8}(1,05) = 10,5$. Sehingga, jika p_{x+1} seharusnya lebih besar sebesar $0,05$ dari yang digunakan, maka seharusnya $\ddot{a}_{x+1} = 1 + v \cdot p_{x+1} \cdot \ddot{a}_{x+2} = 1 + \frac{1}{1,05}(0,85)(10,5) = 9,5$ dan

$$\ddot{a}_x = 1 + v \cdot p_x \cdot \ddot{a}_{x+1} = 1 + \frac{1}{1,05}(0,9)(9.5) = 9,142857.$$

Jadi, perubahan nilai $\ddot{a}_x$ adalah sebesar $\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x_0} = 9,142857 - 8,714286 = 0,428571.$

Jawab: A.

14. Dari fungsi-fungsi di bawah ini, manakah yang tidak dapat digunakan sebagai *survival model* untuk $x > 0$?

A. $S_X(x) = (1+x)^{-3}$

B. $S_X(x) = \exp[7,125 \cdot (1 - 2^x)]$

C. $S_X(x) = e^{-x^2}$

D. $S_X(x) = \exp[x - 0,72 \cdot (2^x - 1)]$

E. $S_X(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

Pembahasan: Suatu fungsi *survival* harus memenuhi syarat berikut:

- $S_X(0) = 1$, yaitu peluang dari individu (x) bertahan hidup selama 0 tahun adalah 1.
- $\lim_{x\to\infty} S_X(x) = 0$, yaitu semua orang pada akhirnya akan meninggal.
- fungsi *survival* haruslah merupakan fungsi yang *non-increasing*.

Sehingga, jika kita periksa dari antara fungsi-fungsi tersebut hanya D yang tidak memenuhi ketiga syarat tersebut.

$$\frac{d}{dx} S_X(x) = \exp[x - 0,72 \cdot (2^x - 1)](1 - 0,72(2^x)\ln 2)$$

Jika $x = 0,5$, maka $\frac{d}{dx} S_X(x) = 0,359989 > 0$, jadi fungsi tersebut tidak *non-increasing*.

Jawab: D.

15. Sebuah kontrak *endowment* sepanjang 20 tahun diterbitkan kepada seseorang yang berumur 55 tahun. *Endowment* ini memiliki manfaat menurun yang dibayarkan pada akhir tahun kejadian, dengan $b_k = (21 - k)$ untuk kejadian pada tahun ke-k dan *pure endowment* dengan manfaat sebesar 1. Diketahui,

$$_{10}V = 5 \qquad _{19}V = 0,6 \qquad q_{65} = 0,1 \qquad i = 0,08$$

Hitunglah cadangan premi di akhir tahun ke-11 $(_{11}V)$ untuk produk tersebut!

A. 5,28

B. 4,29

C. 3,30

D. 2,31

E. 1,34

Pembahasan: π menyatakan besarnya premi.

$$\begin{aligned}
{}_{19}V &= \text{APV dari } \textit{future benefits} - \text{APV dari } \textit{future premiums}, \\
0,6 &= \frac{1}{1+0,08} - \pi \implies \pi = 0,326 \\
{}_{11}V &= \frac{({}_{10}V+\pi)(1+i) - (q_{65})(b_{11})}{p_{65}} \\
&= \frac{(5+0,326)(1,08)-(0,1)(10)}{1-0,1} = 5,28
\end{aligned}$$

Jawab: A.

16. Y adalah nilai sekarang dari sebuah anuitas hidup sementara yang membayarkan 1 secara berkelanjutan (*continuous*) per tahun sepanjang (x) hidup selama n tahun ke depan. Diketahui,

    i. $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 4,9$
    ii. ${}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|} = 3,6$
    iii. $\delta = 0,095$

    Hitunglah $Var(Y)$!

    A. 3,36
    B. 6,69
    C. 9,92
    D. 12,25
    E. 15,58

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= \frac{2}{\delta}\left(\bar{a}_{x:\overline{n}|} - {}^2\bar{a}_{x:\overline{n}|}\right) - (\bar{a}_{x:\overline{n}|})^2 \\
&= \frac{2}{0,095}(4,9-3,6) - (4,9)^2 \\
&= 3,358421
\end{aligned}$$

Jawab: A.

17. Sebuah asuransi seumur hidup untuk (40) memiliki manfaat pembayaran sebesar b_k untuk kegagalan pada tahun ke-k. Diketahui informasi sebagai berikut,

    i. Premi netto $P = P_{20}$
    ii. Cadangan manfaat ${}_tV = {}_{20}V$, untuk $t = 0,1,2,\ldots,19$

iii. $q_{40+k} = q_{20+k} + 0,01$, untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, 19$

iv. ${}_{11}V_{20} = 0,08$

v. $q_{30} = 0,008$

Tentukanlah b_{11}!

A. 0,16

B. 0,25

C. 0,36

D. 0,49

E. 0,64

Pembahasan: Diketahui bahwa

$$ {}_{11}V = ({}_{10}V + P_{20})(1+i) - (b_{11} - {}_{11}V)\, q_{50} \qquad \ldots(1) $$

dan

$$ {}_{11}V_{20} = ({}_{10}V_{20} + P_{20})(1+i) - (1 - {}_{11}V_{20})\, q_{30} $$

dengan ${}_{10}V{=}{}_{10}V_{20}$ dan ${}_{11}V{=}{}_{11}V_{20}$, maka

$$ {}_{11}V = ({}_{10}V + P_{20})(1+i) - (1 - {}_{11}V)\, q_{30} \qquad \ldots(2) $$

Persamaan (2) dikurangi persamaan (1) menghasilkan:

$$ \begin{aligned} (b_{11} - {}_{11}V)\, q_{50} &= (1 - {}_{11}V)\, q_{30} \\ b_{11} &= \frac{(1 - {}_{11}V)\, q_{30}}{q_{50}} + {}_{11}V \\ &= \frac{(1-0,08)0,008}{0,008+0,01} + 0,08 \\ &= 0,4888 \approx 0,49 \end{aligned} $$

Jawab: D.

18. Sebuah asuransi dwiguna (*endowment insurance*) n-tahun sebesar 1.000 untuk (x), diketahui:

i. Manfaat kematian dibayarkan pada saat kematian

ii. Premium dibayarkan secara tahunan setiap awal tahun

iii. Kematian berdistribusi seragam pada seluruh usia

iv. $i = 0,05$

v. ${}_nE_x = 0,172$

vi. $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 0,192$

Tentukan premi netto tahunan untuk asuransi di atas.

A. 10,1

B. 11,3

C. 12,5

D. 13,7

E. 14,9

Pembahasan: Misalkan P menyatakan premi netto tahunan, maka

$$P = \frac{1.000\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{1.000(0,192)}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

dengan

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} = \frac{(1,05)}{(0,05)}\left(1 - A^{1}_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\right) \\
\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\left(A^{1}_{x:\overline{n}|}\right) + {}_nE_x \Longrightarrow A^{1}_{x:\overline{n}|} = (0,192 - 0,172)\left(\frac{0,05}{0,0488}\right) \\
&\Longrightarrow A^{1}_{x:\overline{n}|} = 0,01952 \Longrightarrow \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1,05}{0,05}(1 - 0,01952 - 0,172) = 16,97808
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$P = \frac{1.000(0,192)}{16,97808} = 11,31$$

Jawab: B.

19. Diketahui untuk sebuah *select and ultimate mortality model* dengan periode seleksi 1 tahun, bahwa $p_{[x]} = (1+k)p_x$ untuk suatu konstanta k. Jika $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 21,854$ dan $\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} = 22,167$, tentukanlah k!

A. 0,015

B. 0,020

C. 0,025

D. 0,030

E. 0,035

Pembahasan:

$$\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} = 1 + vp_{[x]}\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = 1 + (1+k)vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|} = 1 + (1+k)(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1)$$

Sehingga diperoleh:

$$k = \frac{\ddot{a}_{[x]:\overline{n}|} - 1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1} - 1 = \frac{21,167}{20,854} - 1 = 0,015$$

Jawab: A.

20. Dari sebuah fungsi kepadatan gabungan (*joint density function*) dari T_x dan T_y berikut:

$$f_{T_x,T_y}(t_x, t_y) = \frac{4}{(1 + t_x + 2t_y)^3}, \qquad \text{untuk } t_x > 0 \text{ dan } t_y > 0,$$

Tentukan ${}_nq_{xy}$!

A. $\frac{1}{1+3n}$

B. $\frac{1}{1+n}$

C. $\frac{n}{1+n}$

D. $\frac{3n}{1+3n}$

E. $\frac{5n}{1+5n}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_np_{xy} &= F_{T_x,T_y}(t_x, t_y) = \mathbb{P}(T_x \geq n \text{ and } T_y \geq n) \\ &= \int_n^\infty \int_n^\infty f_{T_x,T_y}(t_x, t_y) dt_x dt_y \\ &= \int_n^\infty \int_n^\infty \frac{4}{(1 + t_x + 2t_y)^3} dt_x dt_y \\ &= \frac{1}{1+3n} \end{aligned}$$

Sehingga

$${}_nq_{xy} = 1 - {}_np_{xy} = \frac{3n}{1+3n}$$

Jawab: D.

21. Anuitas pasti dan berkelanjutan n tahun akan memberikan pembayaran yang pasti untuk n tahun pertama dan pembayaran selanjutnya akan dibayarkan jika masih hidup. Seorang pemenang kuis berumur 40 tahun berhak untuk mendapatkan pembayaran sebesar P setiap awal

tahun selama 10 tahun secara pasti, dan selanjutnya selama ia masih hidup. Tentukan nilai pembayaran P jika diketahui

$$A_{40} = 0,3 \qquad A_{50} = 0,35 \qquad A^{1}_{40:\overline{10}|} = 0,09 \qquad i = 0,04$$

A. 538,35

B. 540,70

C. 542,05

D. 544,40

E. 546,75

Pembahasan: Jawab: ANULIR.
Komentar: Kurang informasi tentang berapa nilai hadiah yang dimenangkan. Jika diasumsikan uang yang dimenangkan adalah sejumlah 10.000, maka

$$10.000 = P(\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10|}\ddot{a}_{40}) = P(\ddot{a}_{\overline{10}|} + {}_{10}E_{40} \cdot \ddot{a}_{50})$$

Untuk menghitung ${}_{10}E_{40}$, perhatikan bahwa

$$A_{40} - A^{1}_{40:\overline{10}|} = 0,21 = {}_{10}E_{40}A_{50} \Longrightarrow {}_{10}E_{40} = \frac{0,21}{0,35} = 0,60.$$

Kemudian, dapat dihitung pula

$$\ddot{a}_{50} = \frac{1 - A_{50}}{d} = 16,90 \text{ dan } \ddot{a}_{\overline{10}|} = \frac{1 - v^{10}}{d} = 8,43533.$$

Sehingga

$$P = \frac{10,000}{8,43533 + (0,60)(16,90)} = 538,35.$$

Sehingga jawabannya adalah A.

Berikut adalah informasi untuk soal nomor 22 dan 23.

Kezia yang berumur 35 tahun memiliki sebuah anuitas seumur hidup premi tunggal dengan ketentuan seperti berikut:

i. Pembayaran sebesar 10.000 per tahun, dimulai pada umur 65

ii. Biaya awal sebesar 5% dari premi

iii. Biaya *renewal* sebesar 50 per tahun setiap awal tahun, termasuk tahun pertama

iv. Biaya administrasi sebesar 50 setiap pembayaran manfaat

v. $i = 0,06 \qquad {}_{30}p_{35} = 0,8 \qquad \ddot{a}_{35} = 15 \qquad \ddot{a}_{65} = 10 \qquad {}_{30}E_{35} = 0,15$

22. Tentukan premi tunggal bruto untuk anuitas di atas dengan menggunakan prinsip ekuivalen (*equivalence principle*).

A. 15.228

B. 16.658

C. 17.088

D. 18.518

E. 19.948

Pembahasan: Misalkan G menyatakan premi tunggal bruto. Maka, menggunakan prinsip ekuivalen,

$$\begin{aligned} G &= 0,05G + 50\ddot{a}_{35} + {}_{30}E_{35}(10.000 + 50)\ddot{a}_{65} \\ 0,95G &= 50(15) + (0,15)(10050)(10) \\ G &= \frac{15.825}{0,95} = 16.657.89 \approx 16.658 \end{aligned}$$

Jawab: B.

23. Kezia ditawarkan untuk menambah manfaat anuitasnya dengan pengembalian *single gross premium* pada akhir tahun kematian dengan bunga sebesar 6% per tahun jika ia meninggal sebelum umur 65 tahun. Berapa premi tambahan yang harus Kezia bayar jika ia setuju untuk penambahan manfaat ini?

A. 28.822

B. 21.100

C. 16.688

D. 9.944

E. 4.442

Pembahasan: Misalkan premi yang baru adalah G^*, maka EPV (*Expected Present Value*) dari penambahan manfaat anuitasnya adalah

$$\begin{aligned} G^* \left(q_{35}v(1,06) + {}_{1|1}q_{35}v^2(1,06)^2 + \cdots + {}_{29|1}q_{35}v^{30}(1,06)^{30} \right) &= {}_{30}q_{35}G^* \\ &= (1 - {}_{30}p_{35})G^* = 0,2G^* \end{aligned}$$

Sehingga persamaan yang baru untuk premi tunggal brutonya adalah

$$\begin{aligned}
G^* &= 0,05G^* + 0,2G^* + 50\ddot{a}_{35} + {}_{30}E_{35}(10.000 + 50)\ddot{a}_{65} \\
0,75G^* &= 50(15) + (0,15)(10050)(10) \\
G^* &= \frac{15.825}{0,75} = 21.100
\end{aligned}$$

Premi tambahan yang harus Kezia bayar jika ia setuju untuk penambahan manfaat ini adalah sebesar

$$G^* - G = 21.100 - 16.657.89 = 4.442,105$$

Jawab: E.

24. Untuk dua orang dengan sisa umur di masa yang akan datang saling bebas (*independent future lifetimes*), (x) dan (y), diketahui $\delta = 0,05$, $\mu_x = 0,1$ dan $\mu_y = 0,15$. Hitunglah $\bar{P}(\bar{A})_{\overline{xy}}$!

    A. 0,01

    B. 0,03

    C. 0,05

    D. 0,07

    E. 0,09

    Pembahasan: Karena diketahui *Constant Force of Mortality*, maka:

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \frac{\mu_x}{\mu_x + \delta} = \frac{0,1}{0,1 + 0,05} = 0,667 \\
\bar{A}_y &= \frac{\mu_y}{\mu_y + \delta} = \frac{0,15}{0,15 + 0,05} = 0,75 \\
\mu_{xy} = \mu_x + \mu_y \Longrightarrow \bar{A}_{xy} &= \frac{\mu_{xy}}{\mu_{xy} + \delta} = \frac{0,25}{0,25 + 0,05} = 0,833 \\
\bar{A}_{\overline{xy}} &= \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{xy} = 0,667 + 0,75 - 0,833 = 0,5833 \\
\bar{a}_{\overline{xy}} &= \frac{\bar{A}_{\overline{xy}}}{\delta} = 8,333 \\
\bar{P}(\bar{A}_{\overline{xy}}) &= \frac{\bar{A}_{\overline{xy}}}{\bar{a}_{\overline{xy}}} = \frac{0,5833}{8,333} = 0,07
\end{aligned}$$

    Jawab: D.

25. Sebuah asuransi seumur hidup yang berkelanjutan (*continuous*) sebesar 10.000 diterbitkan untuk (40). Premi dibayarkan sebesar 100 setiap tahun. Diketahui $\delta = 0,04$ dan $\mu_{70,5} = 0,025$, tentukan ${}_{30,5}V$ jika $\frac{d}{dt}{}_tV = 337,5$ untuk $t = 30,5$.

A. 7.000

B. 7.500

C. 8.000

D. 8.500

E. 9.000

Pembahasan: Diketahui bahwa

$$\frac{d}{dt}{}_tV = \delta_t V + P_t - e_t - (S_t + E_t - {}_tV)\mu_{x+t}$$

Untuk $t = 30,5$,

$$\begin{aligned} 337,5 &= 0,04({}_{30,5}V) + 100 - 0 - (10.000 + 0 - {}_{30,5}V)(0,025) \\ 487,5 &= 0,065({}_{30,5}V) \\ {}_{30,5}V &= 7.500 \end{aligned}$$

Jawab: B.

26. Sebuah anuitas 5 tahun dengan manfaat sebesar 1 diterbitkan untuk (55). Diketahui $l_X = 100 - x$ untuk $0 \leq x \leq 100$ dan $i = 0.06$. Tentukan probabilitas hasil penjumlahan pembayaran anuitas tanpa didiskon akan melebihi *expected present value* pada saat anuitas diterbitkan jika diketahui ${}_5E_{55} = 0,7081$ dan $\ddot{a}_{60} = 11,1454$ dan $\ddot{a}_{\overline{5}|} = 4,4651$.

    A. 0,69

    B. 0,71

    C. 0,73

    D. 0,75

    E. 0.77

    Pembahasan: Jawab: ANULIR.
    Komentar: asumsi jika yang dimaksud adalah anuitas seumur hidup dengan manfaat sebesar 1 yang dibayarkan setiap awal tahun, dengan 5 tahun pertama dijamin terbayar (*guaranteed*), maka *expected present value* pada saat anuitas dibayarkan adalah

$$\ddot{a}_{\overline{5}|} + {}_5E_{55}\ddot{a}_{60} = 4,4651 + (0,7081)(11,1454) = 12,35716$$

Sehingga probabilitas hasil penjumlahan pembayaran anuitas tanpa didiskon akan melebihi *expected present value* pada saat anuitas diterbitkan adalah probabilitas bahwa setidaknya ada 13 kali pembayaran anuitas. Hal ini akan terjadi jika (55) bertahan hidup hingga usia $55 + 12 = 67$. Maka probabilitasnya adalah:

$$ {}_{12}p_{55} = \frac{l_{67}}{l_{55}} = \frac{100-67}{100-55} = 0,7333 $$

Sehingga jawabannya adalah C.

27. Diketahui sebagian dari sebuah tabel *triple decrement*.
 Belakangan diketahui bahwa $q_{40}^{(1)}$ seharusnya bernilai $0,02$, sedangkan angka-angka yang

x	$l_x^{(\tau)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
40	15.000	0,01	0,04	0,05
41	-	0,04	0,08	0,10

lain sudah tepat. Berapakah dampak kesalahan ini terhadap nilai $d_{41}^{(3)}$ yang seharusnya?

A. Lebih kecil 20 dari yang seharusnya

B. Lebih kecil 15 dari yang seharusnya

C. Tidak ada dampak

D. Lebih besar 15 dari yang seharusnya

E. Lebih besar 20 dari yang seharusnya

Pembahasan: Menggunakan data pada tabel yang awal,

$$ \begin{aligned} p_{40}^{(\tau)} &= 1 - (0,01 + 0,04 + 0,05) = 0,9 \\ l_{41}^{(\tau)} &= l_{40}^{(\tau)} p_{40}^{(\tau)} = 15.000(0,9) = 13.500 \\ d_{41}^{(3)} &= l_{41}^{(\tau)} q_{41}^{(3)} = 13.500((0,1) = 1.350 \end{aligned} $$

Kemudian, jika kita ubah $q_{40}^{(1)}$ menjadi $0,02$ sedangkan angka-angka yang lain tetap, maka

$$ \begin{aligned} p_{40}^{(\tau)} &= 1 - (0,02 + 0,04 + 0,05) = 0,89 \\ l_{41}^{(\tau)} &= l_{40}^{(\tau)} p_{40}^{(\tau)} = 15.000(0,89) = 13.350 \\ d_{41}^{(3)} &= l_{41}^{(\tau)} q_{41}^{(3)} = 13.350((0,1) = 1.335 \end{aligned} $$

Yaitu, nilai $d_{41}^{(3)}$ seharusnya adalah 1335 bukan 1350. Jadi, kesalahannya adalah lebih besar 15 dari yang seharusnya. Jawab: D.

28. Peubah acak nilai tunai untuk (x) dapat dinyatakan sebagai:

$$Z = f(x) = \begin{cases} 0, & T_x \leq 10 \\ v^{T_x}, & 10 < T \leq 20 \\ 2v^{T_x}, & 10 < T \leq 20 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Dari pilihan-pilihan berikut, manakah ekspresi yang tepat untuk menggambarkan $\mathbb{E}[Z]$?

A. ${}_{10|}\bar{A}_x + {}_{20|}\bar{A}_x - {}_{30|}\bar{A}_x$

B. $\bar{A}_x + {}_{20}E_x\bar{A}_{x+20} - 2{}_{30}E_x\bar{A}_{x+30}$

C. ${}_{10}E_x\bar{A}_x + {}_{20}E_x\bar{A}_{x+20} - 2{}_{30}E_x\bar{A}_{x+30}$

D. ${}_{10}E_x\bar{A}_{x+10} + {}_{20}E_x\bar{A}_{x+20} - 2{}_{30}E_x\bar{A}_{x+30}$

E. ${}_{10}E_x\left[\bar{A}_{x+10} + {}_{10}E_{x+10}\bar{A}_{x+20} - {}_{10}E_{x+20}\bar{A}_{x+30}\right]$

Pembahasan: Jawab: ANULIR.
Komentar: jika yang dimaksud adalah

$$Z = f(x) = \begin{cases} 0, & T_x \leq 10 \\ v^{T_x}, & 10 < T \leq 20 \\ 2v^{T_x}, & 20 < T \leq 30 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Maka Z dapat kita tuliskan sebagai

$$Z = \begin{cases} 0, & T_x \leq 10 \\ v^{T_x}, & 10 < T \leq 20 \\ v^{T_x} + v^{T_x}, & 20 < T \leq 30 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

dan $\mathbb{E}[Z] = {}_{10|}\bar{A}_x + {}_{20|}\bar{A}_x - 2{}_{30|}\bar{A}_x$. Dengan menggunakan ${}_{n|}\bar{A}_x = {}_nE_x\bar{A}_{x+n}$, maka diperoleh $\mathbb{E}[Z] = {}_{10}E_x\bar{A}_x + {}_{20}E_x\bar{A}_{x+20} - 2{}_{30}E_x\bar{A}_{x+30}$ sehingga jawabannya adalah C.

29. Berikut adalah *Select and ultimate life table* dengan periode seleksi 3 tahun:

Diketahui juga $e_{60} = 1$ dan kematian berdistribusi seragam pada setiap usia. Tentukan $\mathring{e}_{[58]+2}$.

A. 2,1

B. 1,6

C. 1,1

$[x]$	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	$l_{[x]+2}$	$l_{[x]+3}$	$x+3$
55	10.000	9.493	8.533	7.664	58
56	8.547	8.028	6.889	5.630	59
57	7.011	6.443	5.395	3.904	60
58	5.853	4.846	3.548	2.210	61

D. 0,6

E. 0,1

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{[58]+2} &= e_{[58]+2} + 0,5 \\
e_{[58]+2} &= p_{[58]+2}(1 + e_{61}) = p_{[58]+2}\left[1 + \frac{e_{60}}{p_{60}} - 1\right] \\
&= \frac{l_{61}}{l_{[58]+2}} \times \frac{e_{60}}{p_{60}} = \frac{2210}{3548} \times \frac{1}{(2210/3904)} = \frac{3904}{3549} = 1,100338 \\
\mathring{e}_{[58]+2} &= 1,100338 + 0,5 = 1,6
\end{aligned}$$

Jawab: B.

30. Diketahui sebuah asuransi seumur hidup sebesar 1.000 untuk (x), diketahui
    i. *Gross premium* sebesar 25
    ii. Biaya per polis setiap awal tahun adalah 5
    iii. Biaya per premi sebesar 2% setiap awal tahun
    iv. $i = 0,05$
    v. *Cash value* yang tersedia untuk ditarik pada akhir tahun ke-4 adalah 100
    vi. $q_{x+3}^{(d)} = 0,015$ sedangkan $q_{x+3}^{(w)} = 0,05$ dengan *withdrawal* terjadi pada akhir tahun
    vii. Nilai aktuaria dari kumpulan premi setelah disesuaikan dengan manfaat dan biaya, biasa disebut *asset share*, pada akhir tahun ke-3 bernilai 75

    Jika pada tahun ke-4 kemungkinan *withdrawal* dan seluruh biaya menjadi 120% dari yang tertulis di atas, seberapa besarkah perubahan *asset share* pada akhir tahun ke-4?

    A. Bertambah 1,11

    B. Berkurang 1,21

    C. Bertambah 1,31

    D. Berkurang 1,41

E. Bertambah 1,51

Pembahasan: Menggunakan rumus rekursif untuk *asset share*:

$$[{}_kAS + G_k(1-c_k) - e_k](1+i_k) = p^{(\tau)}_{x+k}{}_{k+1}AS + q^{(d)}_{x+k}(b_{k+1} + E_{k+1}) + q^{(w)}_{x+k}{}_{k+1}CV$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
{}_4AS &= \frac{[{}_3AS + G_3(1-c_3) - e_3](1+i) - [q^{(d)}_{x+3}(b_4) + q^{(w)}_{x+3}({}_4CV)]}{p^{(\tau)}_{x+k}} \\
&= \frac{[75 + 25(1-0,02) - 5](1,05) - [0,015(1000) + 0,05(100)]}{1 - 0,05 - 0,015} \\
&= 84,73262.
\end{aligned}$$

Pada tahun ke-4 kemungkinan *withdrawal* dan seluruh biaya menjadi 120% dari yang tertulis, yaitu

$$\begin{aligned}
q^{(w)}_{x+3} &= 0,05(120\%) = 0,06 \\
e_k &= 5(120\%) = 6 \\
c_k &= 2\%(120\%) = 0,024
\end{aligned}$$

Sehingga *asset share* yang baru adalah:

$$\begin{aligned}
{}_4AS^* &= \frac{[75 + 25(1-0,024) - 6](1,05) - [0,015(1000) + 0,06(100)]}{1 - 0,06 - 0,015} \\
&= 83,31892.
\end{aligned}$$

Maka, perubahan *asset share* pada akhir tahun ke-4 adalah

$${}_4AS^* - {}_4AS = 83,31892 - 84,73262 = -1,4137$$

Jawab: D.

2 Periode November 2017

1. Diberikan sebagai berikut :

$$S_X(x) = \frac{9000 - 10x - x^2}{9000}, \text{ untuk } 0 < x \leq 90$$

   Hitunglah nilai $q_{50} - \mu_{50}$.

   A. 0,000167

   B. 0,000200

   C. 0,000250

   D. 0,000333

   E. 0,000500

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} q_{50} &= \mathbb{P}[T_{50} \leq 1] = 1 - \frac{S(51)}{S(50)} \\ &= 1 - \frac{9000 - 10 \times 51 - 51^2}{9000 - 10 \times 50 - 50^2} \\ &= 0,0185. \end{aligned}$$

$$\mu_{50} = \frac{f_X(50)}{S_X(50)} = \frac{10 + 2 \times 50}{9000 - 10 \times 50 - 50^2} = 0.0183.$$

$$q_{50} - \mu_{50} = 0.0185 - 0.0183 = 0.000200.$$

   Jawab: B.

2. Hitunglah nilai dari ${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}$, jika diberikan $A_{x:\overline{n}|} = 0,50$ dan $d = 0,08$

   A. 0,80

   B. 0,82

   C. 0,84

D. 0,86

E. 0,90

Pembahasan: Dengan asumsi premi dibayar dengan besaran tetap selama masa asuransi (n) dan premi dihitung menggunakan prinsip ekuivalensi, maka besar premi per periode adalah

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}} = \frac{0,5}{\frac{1-0,5}{0,08}} = 0,08.$$

Karena pada asuransi dwiguna jika tertanggung *still in force* pada $n-1$ maka tertanggung akan menerima 1 pada waktu n, apapun yang terjadi, maka dipunyai

$$\begin{aligned} ({}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} + P)(1+i) &= 1 \\ {}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = v - P = (1-d) - P &= 1 - 0,08 - 0,08 = 0,84. \end{aligned}$$

Jawab: C.

3. Untuk suatu model *"2-year selection and ultimate mortality"*, diberikan:

   (i) $q_{[x]+1} = 0,95 q_{x+1}$

   (ii) $l_{76} = 10.140$

   (iii) $l_{77} = 9.848$

   Hitunglah $l_{[75]+1}$

   A. 10.120

   B. 10.125

   C. 10.130

   D. 10.133

   E. 10.135

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} q_{[75]+1} &= 0,95 q_{75+1} = 0,95 \frac{\ell_{76} - \ell_{77}}{\ell_{76}} \\ 1 - \frac{\ell_{[75]+2}}{\ell_{[75]+1}} &= 0,95 \frac{292}{10.140} = 0,0274 \\ 1 - \frac{\ell_{77}}{\ell_{[75]+1}} &= 0,0274 \\ \ell_{[75]+1} &= \frac{9,848}{0,9726} = 10.125 \end{aligned}$$

Jawab: B.

4. Diberikan sebagai berikut:

   (i) $q_x = 0,5$

   (ii) *"Force of Mortality"* adalah konstan antara *"integral ages"*

   Hitunglah ${}_{1/2}p_{x+1/4}$

   A. 0,2525

   B. 0,2626

   C. 0,2727

   D. 0,2828

   E. 0,2929

   Pembahasan:

$$q_x = p_x = 0,5.$$

$$\begin{aligned}
{}_{3/4}p_x &= {}_{1/4}p_x {}_{1/2}p_{x+1/4} \\
(0,5)^{3/4} &= (0,5)^{1/4} {}_{1/2}p_{x+1/4} \\
{}_{1/2}p_{x+1/4} &= (0,5)^{1/2} \\
{}_{1/2}q_{x+1/4} &= 1 - {}_{1/2}p_{x+1/4} = 0,2929
\end{aligned}$$

   Jawab:E.

5. Untuk (x) dan (y) dengan *"independent future lifetimes"* diberikan sebagai berikut:

   (i) $\bar{a}_x = 10,06$

   (ii) $\bar{a}_y = 11,95$

   (iii) $\bar{a}_{\overline{xy}} = 12,59$

   (iv) $\bar{A}x\overset{1}{y} = 0,04$

   (v) $\delta = 0,07$

   Hitunglah $\bar{A}x\overset{1}{y}$

   A. 0,15

   B. 0,20

   C. 0,25

D. 0,30

E. 0,35

Pembahasan: Dari informasi yang diberikan, diperoleh:

(i) $\bar{A}_x = 1 - \delta\bar{a}_x = 0,2958$

(ii) $\bar{A}_y = 1 - \delta\bar{a}_y = 0,1635$

(iii) $\bar{A}_{\overline{xy}} = 1 - \delta\bar{a}_{xy} = 0,1187$

(iv) $\bar{A}_{xy} = \bar{A}_x + \bar{A}_y - \bar{A}_{\overline{xy}} = 0,3406$

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \bar{A}_{xy} - \bar{A}_{xy}^{\ \,1} = 0,3406 - 0,04 = 0,3006.$$

Jawab: D.

6. Suatu asuransi seumur hidup pada (x) dengan manfaat 1 dengan pengembalian dari *"net single premium"* tanpa bunga pada saat kematian. Diberikan:

   (i) $\mu_{x+t} = 0,01$ untuk $t > 0$

   (ii) $\delta = 0,02$

   Hitunglah *"net single premium"*

   A. 1/2

   B. 1/3

   C. 1/4

   D. 1/5

   E. 4/9

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\infty (1+P)e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\ &= (1+p)\int_0^\infty e^{-(0,02+0,01)}0,01dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}P \\ P &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Jawab: A.

7. Untuk suatu model double decrement, diketahui sebagai berikut:

(i) T adalah variabel acak dari *time-until-death*

(ii) J adalah variabel acak dari *cause-of-decrement*

(iii) $f_{T,J}$ adalah joint p.d.f dari T dan J

(iv)
$$f_{T,J}(t,j) = \begin{cases} 0,6ke^{-0,8t} + 0,9(1-k)e^{-1,5t}, & t \geq 0 \text{ dan } J = 1 \\ 0,2ke^{-0,8t} + 0,6(1-k)e^{-1,5t}, & t \geq 0 \text{ dan } J = 2 \end{cases}$$

(v) ${}_{\infty}q_x^{(1)} = 3{}_{\infty}q_x^{(2)}$

Hitunglah k.

A. 3/8

B. 4/9

C. 1/2

D. 2/3

E. 1

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_{\infty}q_x^{(1)} &= \int_0^\infty 0,6ke^{-0,8t} + 0,9(1-k)e^{-1,5t}dt \\ &= \frac{0,6k}{0,8}e^{-0,8t} + \frac{0,9(1-k)}{1,5}e^{-1,5t}|_\infty^0 = \frac{3k}{4} + \frac{3(1-k)}{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{\infty}q_x^{(2)} &= \int_0^\infty 0,2ke^{-0,8t} + 0,6(1-k)e^{-1,5t}dt \\ &= \frac{0,2k}{0,8}e^{-0,8t} + \frac{0,6(1-k)}{1,5}e^{-1,5t}|_\infty^0 = \frac{k}{4} + \frac{2(1-k)}{5}. \end{aligned}$$

Karena diketahui ${}_{\infty}q_x^{(1)} = 3{}_{\infty}q_x^{(2)}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{3k}{4} + \frac{3(1-k)}{5} &= 3\left[\frac{k}{4} + \frac{2(1-k)}{5}\right] \\ 15k + 12(1-k) &= 15k + 24(1-k) \\ 12(1-k) &= 0 \\ k &= 1. \end{aligned}$$

Jawab: E.

<u>Informasi untuk nomor 8 sampai 10</u>

Suatu pembayaran dilakukan sebesar 10 di akhir minggu untuk memenuhi kebutuhan pembelian detergen. Kegunaan detergen adalah variabel *"the week of exhaustion of supply"* adalah variabel acak K Misalkan $Z = 10v^K$ menyatakan *"present value"* dari pembayaran variabel

k	$\Pr(K = k)$
1	0,20
2	0,30
3	0,20
4	0,15
5	0,15

acak. Dengan asumsi bunga $i = 0,01$, *"effective per week"*

8. Hitunglah "the mean" dari Z

   A. 9,731

   B. 10,731

   C. 11,731

   D. 12,731

   E. 13,731

Pembahasan: Dengan menganggap kuadrat pada $Pr(K = k)$ pada tabel tidak ada, maka soal dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{5} 10v^k Pr(K = k) \\ &= 10\Big(\frac{1}{1,01}\Big)0,20 + 10\Big(\frac{1}{1,01}\Big)^2 0,30 + 10\Big(\frac{1}{1,01}\Big)^3 0,20 \\ &\quad + 10\Big(\frac{1}{1,01}\Big)^4 0,15 + 10\Big(\frac{1}{1,01}\Big)^5 0,15 \\ &= 9,730935512\end{aligned}$$

Jawab: A.

9. Hitunglah "variansi" dari Z

   A. 0,01663

   B. 0,02663

   C. 0,03663

   D. 0,04663

E. 0,05663

Pembahasan: Diketahui

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{k=1}^{5} (10v^k)^2 Pr(K=k) \\
&= 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^2 0,20 + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^4 0,30 + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^6 0,20 \\
&\quad + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^8 0,15 + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^{10} 0,15 \\
&= 94,70778869.
\end{aligned}$$

Sehingga

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 0,016682746$$

Jawab: A.

10. Hitunglah ”median” dari Z

A. 9,706

B. 10,706

C. 11,706

D. 12,706

E. 13,706

Pembahasan: Dari tabel pmf tersebut di atas diperoleh cdf untuk K adalah sebagai berikut:

k	$Pr(K=k)$	$Pr(K \leq k)$	$Pr(K \geq k)$
1	0,20	0,20	1,00
2	0,30	0,50	0,80
3	0,20	0,70	0,50
4	0,15	0,85	0,30
5	0,15	1,00	0,15

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \leq z_{med}) &= 0,50 \\
\mathbb{P}(10v^K \leq z_{med}) &= 0,50 \\
\mathbb{P}(K \geq \frac{\log(z_{med}/10)}{\log v}) &= 0,50 = \mathbb{P}(K \geq 3) \\
\frac{\log(z_{med}/10)}{\log v} &= 3 \\
z_{med} &= 10e^{3\log v} = 10v^3 = 9,705901479
\end{aligned}$$

Jawab: A.

11. Manakah dari pernyataan berikut yang benar dari $\frac{d}{dt}{}_t\bar{V}(\bar{A}_x)$

A. $\frac{\bar{A}_{x+t}+\bar{a}_{x+t}\mu_{x+t}}{\bar{a}_x}$

B. $\frac{\bar{A}_{x+t}-\bar{a}_{x+t}\mu_{x+t}}{\bar{a}_x}$

C. $\frac{1-\delta\bar{a}_{x+t}-\bar{a}_{x+t}\mu_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}}$

D. $\frac{1-\delta\bar{a}_{x+t}+\bar{a}_{x+t}\mu_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}}$

E. $\frac{1-\mu_{x+t}}{\bar{a}_{x+t}}$

Pembahasan: Sebelum menyelesaikan permasalahan ini, perlu diingat kembali derivatif dari fungsi asuransi terhadap x. Namun sebelumnya, perlu dilihat asuransi kontinu untuk (x) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty v^s {}_sp_x \mu_{x+s} ds \\
&= \frac{1}{{}_xp_0} \int_0^\infty v^s {}_{x+s}p_0 \mu_{x+s} ds \\
&= \frac{1}{{}_xp_0} \int_x^\infty v^{y-x} {}_yp_0 \mu_y dy
\end{aligned}$$

dengan $y = x + s$, sehingga $\bar{A}_x$ dapat dituliskan sebagai

$$\bar{A}_x = \frac{1}{v^x {}_xp_0} \int_x^\infty v^y {}_yp_0 \mu_y dy$$

bentuk ini dipilih karena di dalam integral sudah tidak memuat x sehingga lebih mudah mencari derivatifnya terhadap x. Selanjut derivatif dari $\bar{A}_x$ terhadap x dapat dihitung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\bar{A}_x &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{v^x{}_xp_0}\Big)\int_x^\infty v^y{}_yp_0\mu_y dy + \frac{1}{v^x{}_xp_0}\frac{d}{dx}\Big(\int_x^\infty v^y{}_yp_0\mu_y dy\Big) \\
&= -\frac{v^x \ln v_x p_0 + v^x(-_xp_0\mu_x)}{(v^x)_xp_0)^2}\int_x^\infty v^y{}_yp_0\mu_y dy + \frac{1}{v^x{}_xp_0}(v^x{}_xp_0\mu_x) \\
&= (\delta+\mu_x)\bar{A}_x - \mu_x \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Diketahui nilai cadangan pada waktu t adalah

$$\begin{aligned}
{}_tV(\bar{A}_x) &= \bar{A}_{x+t} - P\bar{a}_{x+t} \\
&= \bar{A}_{x+t} - P\frac{1-\bar{A}_{x+t}}{\delta} = \Big(1+\frac{P}{\delta}\Big)\bar{A}_{x+t} - \frac{P}{\delta}.
\end{aligned}$$

Karena premi dihitung sebagai premi bersih dan dibayarkan kontinu maka

$$P = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x},$$

sehingga

$${}_tV(\bar{A}_x) = \Big(\frac{\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x}{\delta\bar{a}_x}\Big)\bar{A}_{x+t} - \frac{P}{\delta}.$$

Selain itu juga dipunyai

$$\bar{a}_x = \frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \qquad (2.2)$$

sehingga $\delta\bar{a}_x + \bar{A}_x = 1$. Subsitusi hasil ini ke persamaan cadangan tadi diperoleh

$${}_tV(\bar{A}_x) = \Big(\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\Big)\bar{A}_{x+t} - \frac{P}{\delta}.$$

Jadi derivatif dari fungsi cadangan terhadap t adalah

$$\frac{d}{dt}{}_tV(\bar{A}_x) = \Big(\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\Big)\frac{d}{dt}\bar{A}_{x+t} = \Big(\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\Big)\frac{d}{d(x+t)}\bar{A}_{x+t}.$$

Dengan menggunakan (2.1) dan (2.2) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}{}_tV(\bar{A}_x) &= \Big(\frac{1}{\delta\bar{a}_x}\Big)((\delta+\mu_{x+t})\bar{A}_{x+t} - \mu_{x+t}) \\
&= \frac{\delta\bar{A}_x - \mu_{x+t}(1-\bar{A}_{x+t})}{\delta\bar{a}_x} \\
&= \frac{\delta\bar{A}_x - \mu_{x+t}\delta\bar{a}_{x+t}}{\delta\bar{a}_x} = \frac{\bar{A}_x - \mu_{x+t}\bar{a}_{x+t}}{\bar{a}_x}.
\end{aligned}$$

Jawab: B

12. Suatu "nonhomogeneous Poisson process" mempunyai "rate function" $\lambda(t) = t$ untuk $0 \leq t \leq 10$ dan $\lambda(t) = 10$ untuk $t > 10$. Hitunglah "expected number of events" pada interval (5,14]

A. 57,50

B. 60,50

C. 64,50

D. 75,50

E. 77,50

Pembahasan: Untuk proses Poisson non-homogen, nilai harapan banyaknya kejadian pada interval $(s, t]$ adalah $m(t) - m(s) = \int_s^t \lambda(t)dt$. Jadi banyaknya kejadian pada interval $(5, 14]$ adalah

$$\begin{aligned} m(14) - m(5) &= \int_5^{14} \lambda(t)dt = \int_5^{10} tdt + \int_{10}^{14} 10dt \\ &= \frac{1}{2}t^2|_5^{10} + 10t|_{10}^{14} \\ &= 77,50. \end{aligned}$$

Jawab: E.

13. Misalkan N berdistribusi "negative binomial" dengan $E[N] = 20$ dan $\text{Var}[N] = 24$. Hitunglah nilai dari parameter r

A. 5/6

B. 20

C. 25

D. 75

E. 100

Pembahasan:

$$\mathbb{E}(N) = \frac{r(1-p)}{p} = 20,$$

$$Var(N) = \frac{r(1-p)}{p^2} = 24$$

$$p = \frac{\mathbb{E}(N)}{Var(N)} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6},$$

$$r = \frac{20 \times p}{1-p} = \frac{20 \times 5/6}{1/6} = 100.$$

Jawab: E.

14. Jika diketahui $\mu^{(1)}_{x+t} = 0,1$ dan $\mu^{(2)}_{x+t} = 0,2$. Hitunglah nilai dari ${}_{\infty}q^{(1)}_x$

A. 1

B. 1/2

C. 1/3

D. 1/4

E. 1/5

Pembahasan: Dari informasi tentang force of decrements diperoleh

$${}_tp^{(\tau)}_x = e^{\int_0^t \mu^{(1)}_{x+t} + \mu^{(2)}_{x+t} dt} = e^{0,3t}.$$

$$\begin{aligned} {}_{\infty}q^{(1)}_x &= \int_0^{\infty} {}_tp^{(\tau)}_x \mu^{(1)}_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-0,3t} 0,1 dt = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Jawab: C.

15. Untuk suatu "fully continuous whole life insurance" dengan benefit 10.000 diterbitkan pada usia (40). Diberikan sebagai berikut:

(i) Premi dibayarkan sebesar 100 per tahun

(ii) $\delta = 0,05$

(iii) $\mu_{70,5} = 0,038$

(iv) Untuk $t = 30,5$ $\frac{d}{dt}{}_tV = 292$

Hitunglah nilai dari ${}_{30,5}V$

A. 5.000

B. 5.500

C. 6.000

D. 6.500

E. 7.000

Pembahasan: Persamaan diferensial Thiele untuk nilai polis pada produk tersebut adalah

$$\frac{d}{dt}{}_tV = \delta_t V + P - (10.000 - {}_tV)\mu_{x+t}.$$

Sehingga untuk $t = 30,5$ diperoleh

$$\left.\frac{d}{dt}{}_tV\right|_{t=30,5} = 292 = 0,05{}_{30,5}V + 100 - (10.000 - {}_{30,5}V)0,038$$
$${}_{30,5}V = \frac{292 - 100 + 380}{0,088} = 6500.$$

Jawab: D.

16. Untuk suatu polis asuransi "fully discrete whole life" dengan benefit 100,000 pada usia hidup (35). Diberikan sebagai berikut:

   (i) Biaya dibawah ini dibayarkan pada saat awal tahun ke 11
   Per Polis = 50, Persentase dari Premi adalah = 15%

   (ii) "Gross Premi" sama dengan 1.100 per polis

   (iii) "Asset share" per polis pada akhir tahun ke 10 adalah 10.000

   (iv) Selama tahun ke 11 "realized investment rate" adalah 8%

   (v) Selama tahun ke 11 "realized mortality rate" adalah 0,005

   Hitunglah "Asset share" per polis pada akhir tahun ke 11

   A. 10.900

   B. 11.100

   C. 11.124

   D. 11.312

   E. 11.422

   Pembahasan:

$$AS_{11} = \frac{(10.000 + 0,85 \times 1.100 - 50)(1,08) - 0,005 \times 100.000}{0,995}$$
$$= 11.312,3618.$$

   Jawab: D.

17. Untuk sekelompok individu usia x, diberikan sebagai berikut:

k	q^{s}_{x+k}	q^{ns}_{x+k}
0	0,10	0,05
1	0,20	0,10
2	0,30	0,15

(i) 25% adalah "smoker (s)" dan 75% adalah "nonsmoker (ns)"

(ii)

(iii) $i = 0,02$

Hitunglah nilai dari 10.000 $A^{1}_{x:\overline{2}|}$ untuk individu yang dipilih secara acak pada kelompok ini

A. 1.690

B. 1.710

C. 1.730

D. 1.750

E. 1.770

Pembahasan: For smokers:

$$
\begin{aligned}
A^{1\,(s)}_{x:\overline{2}|} &= vq^{(s)}_{x} + v^{2}{}_{1|}q^{(s)}_{x} \\
&= \frac{1}{1,02}(0,1) + \left(\frac{1}{1,02}\right)^{2}(0,9)(0,2) \\
&= 0,2710.
\end{aligned}
$$

For non-smokers:

$$
\begin{aligned}
A^{1\,(ns)}_{x:\overline{2}|} &= vq^{(ns)}_{x} + v^{2}{}_{1|}q^{(ns)}_{x} \\
&= \frac{1}{1,02}(0,05) + \left(\frac{1}{1,02}\right)^{2}(0,95)(0,1) \\
&= 0,1403.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10.000A^{1}_{x:\overline{2}|} &= 10.000 \times \mathbb{E}[\mathbb{E}(Z|S)] \text{ untuk S variabel random status} \\
&= 10.000(A^{1\,(s)}_{x:\overline{2}|}\mathbb{P}(S = s) + A^{1\,(ns)}_{x:\overline{2}|}\mathbb{P}(S = ns)) \\
&= 10.000(0,271 \times 0,25 + 0,1403 \times 0,75) \\
&= 1730,1038.
\end{aligned}
$$

Jawab: C.

18. Untuk T, variabel acak "future lifetime" pada (0), diberikan sebagai berikut:

    (i) $\omega > 70$

    (ii) ${}_{40}p_0 = 0,6$

    (iii) $E(T) = 62$

    (iv) $E[min(T,t)] = t - 0,005t^2,\ 0 < t < 60$

    Hitunglah "complete expectation of life" pada 40

    A. 30

    B. 35

    C. 40

    D. 45

    E. 50

    Pembahasan: Karena diketahui $E[min(T,t)] = t - 0,005t^2,\ 0 < t < 60$ maka

    $$E[min(T,40)] = \int_0^{40} {}_tp_0 dt = 40 - 0,005 \times 40^2 = 32.$$

    Dari pernyataan (iii) diperoleh

    $$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \int_0^{40} {}_tp_0 dt + \int_{40}^{\omega} {}_tp_0 dt \\ 62 &= 32 + \int_{40}^{\omega} {}_tp_0 dt \\ \int_{40}^{\omega} {}_tp_0 dt &= 30. \end{aligned}$$

    Complete expectation of life pada (40) dapat dihitung sebagai

    $$\begin{aligned} \mathring{e}_{40} &= \frac{\int_{40}^{\omega} {}_tp_0 dt}{{}_{40}p_0} \\ &= \frac{30}{0,6} = 50. \end{aligned}$$

    Jawab: E.

19. Diberikan suatu "survival function"

    $$S_0(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

    Hitunglah ${}_{5|15}q_{15}$

A. 0,176

B. 0,186

C. 0,196

D. 0,206

E. 0,216

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_{5|15}q_{15} &= \mathbb{P}(5 \leq T_{15} \leq 20) \\ &= F_{15}(20) - F_{15}(5) = S_{25}(5) - S_{15}(20) \\ &= \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{20}} - \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{35}} \\ &= 0,8905 - 0,7046 = 0,1859. \end{aligned}$$

Jawab: B.

20. Diberikan bahwa kematian mengikuti $l_x = 100 - x, 0 \leq x \leq 100$
Hitunglah e_{80}

A. 6,75

B. 8,75

C. 9,25

D. 10,45

E. 11,35

Pembahasan:

$$\mathring{e}_{80} = \frac{\omega - x}{2} = \frac{100-80}{2} = 10,$$
$$e_{80} = \mathring{e}_{80} - 0,5 = 9,5.$$

Jawab: - (dianulir).

21. Diberikan :

(i) Kematian berdistribusi seragam untuk setiap tahun usia

(ii) $i = 0,10$

(iii) $q_x = 0,05$

(iv) $q_{x+1} = 0,06$

Hitunglah $\bar{A}^{1}_{x:\overline{2}|}$

A. 0,097

B. 0,108

C. 0,111

D. 0,114

E. 0,119

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^1 e^{-\delta t} 0,05 dt + \int_1^2 e^{-\delta t} 0,06 dt \\ &= \frac{0,05}{\delta} e^{-\delta t}|_1^0 + \frac{0,06}{\delta} e^{-\delta t}|_2^1 \\ &= 0,0477 + 0,0520 = 0,0997.\end{aligned}$$

Jawab: A.

22. Untuk suatu anuitas yang dibayarkan semi tahunan, diberikan sebagai berikut:

(i) Kematian berdistribusi "uniform" untuk setiap usia

(ii) $q_{69} = 0,03$

(iii) $i = 0,06$

(iv) $1000\bar{A}_{70} = 530$

Hitunglah nilai dari $\ddot{a}^{(2)}_{69}$

A. 8,35

B. 8,47

C. 8,59

D. 8,72

E. 8,85

Pembahasan: Dari informasi yang diberikan diperoleh konstanta-konstanta berikut:

$$d = 1 - v = 0,0566,$$

$$\delta = \ln(1,06) = 0,0583,$$

$$i^{(2)} = 2((1+i)^{1/2} - 1) = 0,0591,$$

$$d^{(2)} = 2(1 - \sqrt{1-d}) = 0,0574.$$

$$\begin{aligned}\bar{A}_{69} &= vq_{69} + vp_{69}\bar{A}_{70} \\ &= \frac{1}{1,06}0,03 + \frac{1}{1,06}0,97 \times 0,53 = 0,5133.\end{aligned}$$

$$\bar{a}_{69} = \frac{1 - \bar{A}_{69}}{\delta} = 8,3526.$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{69} &= \frac{id}{\delta^2}\ddot{a}_{69} - \frac{i-\delta}{\delta^2} \\ &= 1,0003\ddot{a}_{69} - 0,5099 \\ \ddot{a}_{69} &= 8,8599.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(2)}_{69} &= \frac{id}{i^{(2)}d^{(2)}}\ddot{a}_{69} - \frac{i - i^{(2)}}{i^{(2)}d^{(2)}} \\ &= 8,6044.\end{aligned}$$

Jawab: C.

23. Perusahaan anda menawarkan suatu produk ”whole life annuity” yang membayarkan benefit anuitas sebesar 12.000 setiap awal tahun. Seorang dari tim produk menyarankan untuk menambahkan benefit kematian untuk produk tersebut yang dibayarkan setiap akhir tahun kematian. Dengan menggunakan ”discount rate” sebesar 8%, hitunglah berapa besarnya benefit kematian yang dapat meminimalkan ”variance of the present value random variable” dari produk tersebut.

    A. 0

    B. 50.000

    C. 100.000

    D. 150.000

    E. 200.000

Pembahasan: Jika benefit kematian adalah B, variabel random untuk nilai sekarang dari produk tersebut adalah

$$Z = 12.000\ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} + Bv^{K_x+1} = \frac{12.000}{d} + v^{K_x+1}\Big(B - \frac{12.000}{d}\Big)$$

Variansi dari Z adalah

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var\Big(\frac{12.000}{d} + v^{K_x+1}\Big(B - \frac{12.000}{d}\Big)\Big) \\ &= \Big(B - \frac{12.000}{d}\Big)^2 Var(v^{K_x+1}) \end{aligned}$$

Syarat perlu untuk B yang meminimalkan variansi dari Z adalah

$$\begin{aligned} \frac{d}{dB}Var(Z) &= 2\Big(B - \frac{12.000}{d}\Big)Var(v^{K_x+1}) = 0 \\ B &= \frac{12.000}{d} = \frac{12.000}{0,08} = 150.000. \end{aligned}$$

Untuk mengkonfirmasi bahwa nilai tersebut meminimalkan variansi, bukan memaksimalkan, kita dapat hitung turunan kedua dari $Var(Z)$ sebagai berikut:

$$\frac{d^2}{dB^2}Var(Z) = \frac{d}{dB}\left(2\Big(B - \frac{12.000}{d}\Big)Var(v^{K_x+1})\right) = 2Var(v^{K_x+1}),$$

yang tentu saja positif karena $Var(v^{K_x+1})$ positif.

Jawab: D.

24. Diberikan sebagai berikut:

    (i) $\mu_{x+t} = 0,01 \quad 0 \leq t < 5$

    (ii) $\mu_{x+t} = 0,02 \quad 5 \leq t$

    (iii) $\delta = 0,06$

    Hitunglah nilai dari $\bar{a}_x$

    A. 12,5

    B. 13,0

    C. 13,4

    D. 13,9

    E. 14,3

Pembahasan: Untuk $0 \leq t < 5$,

$$ {}_tp_x = e^{-\int_0^t 0{,}01dt} = e^{-0{,}01t}, $$

sedangkan untuk $t \geq 5$,

$$ {}_tp_x = e^{-(\int_0^5 0{,}01dt + \int_5^t 0{,}02dt)} = e^{-0{,}02t+0{,}05}. $$

Nilai dari anuitas jiwa kontinu untuk (x),

$$ \begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x dt \\ &= \int_0^5 e^{-0{,}06t}e^{-0{,}01t}dt + \int_5^\infty e^{-0{,}06t}e^{-0{,}02t+0{,}05}dt \\ &= \frac{e^{-0{,}07t}}{0,07}\Big|_5^0 + \frac{e^{-0{,}08t+0{,}05}}{0,08}\Big|_\infty^5 \\ &= 4,2187 + 8,8086 = 13,0273. \end{aligned} $$

Jawab: B.

25. Diberikan sebagai berikut:
   (i) $P_x = 0,090$
   (ii) "Net Premium Reserve" pada akhir tahun ke n untuk suatu asuransi "fully discrete whole life" dengan benefit 1 pada (x) adalah 0,563
   (iii) $P_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}} = 0,00864$

   Hitunglah $P^1_{x:\overline{n|}}$

   A. 0,008

   B. 0,024

   C. 0,040

   D. 0,065

   E. 0,085

Pembahasan: Dari pernyataan-pernyataan tersebut diperoleh informasi sebagai berikut:

(i) $P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = 0,090 \Leftrightarrow A_x = 0,09\ddot{a}_x$,

(ii) ${}_nV = A_{x+n} - 0,090\ddot{a}_{x+n} = 0,563 \Leftrightarrow A_{x+n} = 0,563 + 0,09\ddot{a}_{x+n}$,

(iii) $P_{x:\overset{\,1}{\overline{n|}}} = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = 0,00864 \Leftrightarrow {}_nE_x = 0,00864\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_x - {}_nE_x A_{x+n}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{0,09(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \ddot{a}_{x+n\,n}E_x) - {}_nE_x(0,563 + 0,09\ddot{a}_{x+n})}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$
$$= 0,09 - 0,00864 \times 0,563 = 0,0851.$$

Jawab: E.

26. Untuk suatu asuransi "fully continuous whole life" dengan benefit 1:
   (i) $\mu_x = 0,04, x > 0$
   (ii) $\delta = 0,08$
   (iii) L adalah variabel acak "loss-at-issue" pada "net premium"

   Hitunglah $Var(L)$

   A. 1/10
   B. 1/5
   C. 1/4
   D. 1/3
   E. 1/2

   Pembahasan:

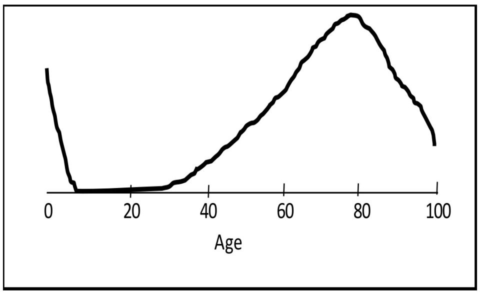
$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-0,08t}e^{-0,04t}0,04dt = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$
$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-0,08t}e^{-0,04t}dt = \frac{1}{0,12}.$$
$$P = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{1/3}{1/0,12} = 0,04.$$
$${}^2A_x = \int_0^\infty e^{-0,16t}e^{-0,04t}0,04dt = \frac{0,04}{0,20} = \frac{1}{5}.$$

$$L = v^{T_x} - P\bar{a}_{\overline{T_x}|} = v^{T_x} - 0,04\frac{1-v^{T_x}}{\delta}$$
$$= \left(1 + \frac{0,04}{0,08}\right)v^{T_x} - \frac{0,04}{0,08}.$$

$$Var(L) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 Var(v^{T_x}) = \left(\frac{3}{2}\right)^2[{}^2A_x - (A_x)^2]$$
$$= \frac{9}{4} \times \frac{4}{45} = \frac{1}{5}.$$

Jawab: B.

27. Gambar grafik dibawah ini berhubungan dengan ”current human mortality”



Manakah dari pernyataan berikut yang paling mungkin terjadi

A. $l_x p_x$

B. μ_x

C. $l_x \mu_x$

D. l_x

E. l_x^2

Jawab: C.

28. Untuk suatu ”special 3-year temporary life annuity-due” pada (x), diberikan sebagai berikut:

t	Annuity Payment	p_{x+t}
0	15	0,95
1	20	0,90
2	25	0,85

(i)

(ii) $i = 0,06$

Hitunglah variansi dari ”present value random variable” untuk anuitas ini

A. 91

B. 102

C. 114

D. 127

E. 139

Pembahasan: Present value random variable untuk produk ini adalah

$$Z = \begin{cases} 15, & \text{jika } K_x = 0 \\ 15 + 20v = 33,8679, & \text{jika } K_x = 1 \\ 15 + 20v + 25v^2 = 56,1178, & \text{jika } K_x \geq 2 \end{cases}$$

Peluang-peluang yang bersesuaian dengan variabel random tersebut adalah berturut-turut $\mathbb{P}(K_x = 0) = q_x = 0,05$, $\mathbb{P}(K_x = 1) = {}_{1|}q_x = p_x q_{x+1} = 0,95 \times 0,1 = 0,095$, dan $\mathbb{P}(K_x \geq 2) = {}_2p_x = 0,95 \times 0,90 = 0,855$. Momen pertama dan kedua dari Z adalah

$$\mathbb{E}(Z) = 15 \times 0,05 + 33,8679 \times 0,095 + 56,1178 \times 0,855 = 51,9484,$$

$$\mathbb{E}(Z^2) = 15^2 \times 0,05 + 33,8679^2 \times 0,095 + 56,1178^2 \times 0,855 = 2812,7943.$$

Variansi dari Z dapat dihitung sebagai berikut,

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 114,1785.$$

Jawab: C.

29. Manakah dari pernyataan berikut yang benar untuk

$$\frac{\partial}{\partial n} {}_{n|}\bar{a}_x$$

A. $\frac{\partial}{\partial n} \int_n^\infty v^t {}_tq_x dt$

B. $\frac{\partial}{\partial n} \int_n^\infty v^t {}_tp_{x+n} dt$

C. $v^n {}_np_x$

D. $-{}_nE_x$

E. $v^n {}_nE_x$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}{}_{n|}\bar{a}_x &= \frac{\partial}{\partial n}\left\{v^n{}_np_x\int_0^\infty v^t{}_tp_{x+n}dt\right\}\\&= \frac{\partial}{\partial n}\left\{\int_0^\infty v^{n+t}{}_np_x{}_tp_{x+n}dt\right\}\\&= \frac{\partial}{\partial n}\left\{\int_0^\infty v^{n+t}{}_{n+t}p_xdt\right\}\\&= \frac{\partial}{\partial n}\left\{\int_n^\infty v^t{}_tp_xdt\right\}\\&= -v^n{}_np_x\\&= -{}_nE_x.\end{aligned}$$

Jawab: D.

30. Suatu ”age-at-failure” variabel acak mempunyai distribusi sebagai berikut:

$$F_X(x) = 1 - 0,1(100-x)^{1/2}\ ,0 \le x \le 100.$$

Tentukan nilai dari $\mathbb{E}[X]$ dan median dari distribusi tersebut.

A. 100/3;75

B. 100/3;100

C. 200/3;100

D. 200/3;75

E. 200/3;50

Pembahasan: Diketahui

$$F_X(x) = 1 - 0,1(100-x)^{1/2}$$

sehingga

$${}_tp_x = S_X(t) = 1 - F_X(t) = 0,1(100-t)^{1/2}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^{100} {}_tp_xdt = \int_0^{100} 0,1(100-t)^{1/2}dt\\&= -\int_0^{100} 0,1(100-t)^{1/2}d(100-t) = -\frac{2}{30}(100-t)^{3/2}|_0^{100}\\&= 200/3\end{aligned}$$

Untuk median, x_{med}, dipunyai persamaan berikut:

$$\begin{aligned}F_X(x_{med}) &= 0,50\\ 1-0,1(100-x_{med})^{1/2} &= 0,50\\ x_{med} &= 100-\left(\frac{0.50}{0,10}\right)^2 = 75.\end{aligned}$$

Jawab: C.

3 Periode Mei 2017

1. Dengan menggunakan "annual interest rate" $i = 0,05$ dan $\ell_{95} = 100, \ell_{96} = 70, \ell_{97} = 40, \ell_{98} = 20, \ell_{99} = 4, \ell_{100} = 0$.

   Hitunglah a_{95}

   A. 0,932

   B. 1,123

   C. 1,235

   D. 1,455

   E. 2,012

   Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
a_{95} &= vp_{95} + vp_{95} + v^2{}_2p_{95} + v^3{}_3p_{95} + v^4{}_4p_{95} \\
&= \frac{1}{1.05}\frac{70}{100} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 \frac{40}{100} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 \frac{20}{100} + \left(\frac{1}{1.05}\right)^4 \frac{4}{100} \\
&= 1.2352
\end{aligned}
$$

   Jawab: C.

2. Hitunglah nilai dari ${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}$, jika diberikan $A_{x:\overline{n}|} = 0,20$ dan $d = 0,08$

   A. 0,85

   B. 0,90

   C. 0,95

   D. 1,00

   E. 1,05

   Pembahasan: Diasumsikan premi dihitung berdasarkan prinsip ekuivalensi dan dibayarkan per tahun, di awal tahun, selama masa asuransi, sehingga diperoleh besar premi per periode

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\frac{1-A_{x:\overline{n}|}}{d}}$$
$$= \frac{0,08 \times 0,20}{1-0,20} = 0,02$$

Dari formula rekursi cadangan pada asuransi dwiguna diketahui,

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} + P = vq_{x+n-1} + vp_{x+n-1\,n}V_{x:\overline{n}|}.$$

Karena pada asuransi dwiguna ${}_{n}V_{x:\overline{n}|} = 1$, maka diperoleh

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} + 0,02 = vq_{x+n-1} + vp_{x+n-1} = v = 1-d = 1-0,08 = 0,92.$$

Jadi

$${}_{n-1}V_{x:\overline{n}|} = 0,90$$

Jawab: B

3. Untuk suatu asuransi seumur hidup dengan ”net level annual premium” untuk (x), ”initial reserve” untuk tahun t adalah 200 dan ”net amount of risk” untuk tahun t adalah 1295. Hitunglah ”terminal reserve” untuk $t-1$, jika diberikan:

   ”initial reserve”=$({}_{t-1}V + P)$

   ”net amount at risk” = $B - {}_{t}V$

   $\ddot{a}_x = 16,20$ $q_{x+t-1} = 0,00386$ $i = 0,05$

   A. 143,84

   B. 153,84

   C. 163,84

   D. 178,84

   E. 189,84

   Pembahasan: Karena premium dibayarkan tahunan dengan besaran sama maka

$$P = \frac{BA_x}{\ddot{a}_x} = \frac{B(1-d\ddot{a}_x)}{\ddot{a}_x} = \frac{B \times 0,2286}{12,60}$$

atau

$$B = 70,8750P.$$

Sehingga dari informasi *net amount of risk* diperoleh hubungan

$$70,8750P - {}_tV = 1295.$$

Dengan menggunakan formula rekursi untuk *reserve*, diperoleh hubungan antara ${}_{t-1}V$ dan ${}_tV$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
({}_{t-1}V + P)(1+i) &= Bq_{x+t-1} + {}_tVp_{x+t-1} \\
200 \times 1,05 &= 70,8750P \times 0,00386 + (70.8750P - 1295)(1 - 0,00386) \\
&= 70,8750P - 1295 \times 0,00386 \\
P &= \frac{200 \times 1,05 + 1295 \times 0,00386}{70,8750} = 21,1640
\end{aligned}$$

Jadi,

$${}_{t-1}V = 200 - P = 178,8360.$$

Jawab: D

Informasi untuk nomor 4 sampai 6

Suatu unit "continuously-operation air conditioning" mempunyai waktu hidup berdistribusi "exponential" dengan "mean" 4 tahun. Ketika unit "fail" harus diganti dengan biaya 1000, yang dianggap sebagai "unit of money". Anggap $\bar{Z}$ menyatakan "present value" variabel acak untuk setiap pembayaran unit pada saat terjadi "fail". Dengan menggunakan "effective annual interest rate 5%" hitunglah

4. $\mathbb{E}(\overline{Z})$

   A. 0,8367

   B. 0,9921

   C. 1,2134

   D. 1,4505

   E. 1,8980

Pembahasan: Dalam hal ini biaya 1000 dianggap sebagai satu unit pembayaran, sehingga $\overline{Z}$ adalah present value per unit pembayaran bila terjadi fail, atau pembayaran dalam ribuan, sehingga variabel acaknya adalah $\overline{Z} = e^{-\delta T}$, dengan T menunjukkan unit waktu (dalam tahun) sampai terjadi *fail*. Karena T berdistribusi eksponensial maka pdf dari T adalah

$$f_T(t) = \mu e^{-\mu t}. \tag{3.1}$$

Nilai dari μ diperoleh dari informasi tentang mean dari T. Diketahui bahwa mean dari variabel acak berdistribusi eksponensial dengan pdf (5.1) adalah $\frac{1}{\mu}$ dan diketahui mean dari T adalah 4 tahun maka $\mu = \frac{1}{4} = 0,25$. Nilai harapan dari $\overline{Z}$ adalah

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{Z}) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{0,25}{0,25 + \log(1,05)} = 0,8367076.\end{aligned}$$

Jawab: A

5. $Var(\bar{Z})$

   A. 0,00918

   B. 0,01918

   C. 0,02918

   D. 0,03918

   E. 0,04918

   Pembahasan:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{Z}^2) &= \int_0^\infty (e^{-\delta t})^2 e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = 0,7192581962\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\overline{Z}) &= \mathbb{E}(\overline{Z}^2) - (\mathbb{E}(\overline{Z}))^2 \\ &= 0,7192581962 - 0,8367076^2 = 0,01917859484\end{aligned}$$

   Jawab: B.

6. 90^{th} percentile dari distribusi $\bar{Z}$

   A. 0,3792

   B. 0,4243

   C. 0,5212

D. 0,8981

E. 0,9797

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e^{-\delta T_x} \leq z) &= 0,90 \\
\mathbb{P}\Big(T_x \geq \frac{\log(z)}{-\delta}\Big) &= 0,90 \\
\int_{\frac{\log(z)}{-\delta}}^{\infty} e^{-\mu t}\mu dt &= 0.90 \\
\frac{\mu \log(z)}{\delta} &= \log 0.90 \\
z = e^{\frac{\delta \log 0,90}{\mu}} &= 0,9796477336
\end{aligned}$$

Jawab: E.

<u>**Informasi untuk nomor 7 sampai 9**</u>

Suatu pembayaran dilakukan sebesar 10 di akhir minggu untuk memenuhi kebutuhan pembelian detergen. Kegunaan detergen adalah variabel, "the week of exhaustion of supply" adalah variabel acak K.

k	$Pr(K = k)^2$
1	0,20
2	0,30
3	0,20
4	0,15
5	0,15

Misalkan $Z = 10v^K$ menyatakan "present value" dari pembayaran variabel acak. Dengan asumsi bunga $i = 0,01$, "effective per week"

7. Hitunglah "the mean" dari Z

   A. 9,731

   B. 10,731

   C. 11,731

   D. 12,731

   E. 13,731

Pembahasan: Dengan menganggap kuadrat pada $Pr(K = k)$ pada tabel tidak ada, maka soal dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=1}^{5} 10v^k Pr(K = k) \\
&= 10\left(\frac{1}{1,01}\right)0,20 + 10\left(\frac{1}{1,01}\right)^2 0,30 + 10\left(\frac{1}{1,01}\right)^3 0,20 \\
&\quad + 10\left(\frac{1}{1,01}\right)^4 0,15 + 10\left(\frac{1}{1,01}\right)^5 0,15 \\
&= 9,730935512
\end{aligned}$$

Jawab: A.

8. Hitunglah "variansi" dari Z

   A. 0,01663

   B. 0,02663

   C. 0,03663

   D. 0,04663

   E. 0,05663

   Pembahasan: Diketahui

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{k=1}^{5} (10v^k)^2 Pr(K = k) \\
&= 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^2 0,20 + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^4 0,30 + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^6 0,20 \\
&\quad + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^8 0,15 + 100\left(\frac{1}{1,01}\right)^{10} 0,15 \\
&= 94,70778869.
\end{aligned}$$

   Sehingga

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 0,016682746$$

   Jawab: A.

9. Hitunglah "median" dari Z

   A. 9,706

B. 10,706

C. 11,706

D. 12,706

E. 13,706

Pembahasan: Dari tabel pmf tersebut di atas diperoleh cdf untuk K adalah sebagai berikut:

k	$Pr(K=k)$	$Pr(K \leq k)$	$Pr(K \geq k)$
1	0,20	0,20	1,00
2	0,30	0,50	0,80
3	0,20	0,70	0,50
4	0,15	0,85	0,30
5	0,15	1,00	0,15

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \leq z_{med}) &= 0,50 \\
\mathbb{P}(10v^K \leq z_{med}) &= 0,50 \\
\mathbb{P}(K \geq \frac{\log(z_{med}/10)}{\log v}) &= 0,50 = \mathbb{P}(K \geq 3) \\
\frac{\log(z_{med}/10)}{\log v} &= 3 \\
z_{med} &= 10e^{3\log v} = 10v^3 = 9,705901479
\end{aligned}$$

Jawab: A.

10. Suatu "nonhomogeneous Poisson process" mempunyai "rate function" $\lambda(t) = t$ untuk $0 \leq t \leq 10$ dan dan $\lambda(t)$ untuk $t > 10$. Hitunglah "expected number of events" pada interval (5,15]

A. 57,50

B. 87,50

C. 108,50

D. 125,50

E. 130,50

Pembahasan: Untuk proses Poisson non-homogen, nilai harapan banyaknya kejadian pada interval $(s,t]$ adalah $m(t) - m(s) = \int_s^t \lambda(t)dt$. Jadi banyaknya kejadian pada interval $(5,15]$

adalah

$$
\begin{aligned}
m(15) - m(5) &= \int_5^{15} \lambda(t)dt = \int_5^{10} tdt + \int_{10}^{15} 10dt \\
&= \frac{1}{2}t^2|_5^{10} + 10t|_{10}^{15} \\
&= 87,50.
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

11. Suatu ”age-at-failure” variabel acak mempunyai distribusi sebagai berikut:

$$F_X(x) = 1 - 0,1(100 - x)^{1/2}$$

Tentukan nilai dari $\mathbb{E}(X)$ dan median dari distribusi tersebut

A. 100/3 ; 75

B. 100/3 ; 100

C. 200/3 ; 75

D. 200/3 ; 100

E. 200/3 ; 50

Pembahasan: Diketahui

$$F_X(x) = 1 - 0,1(100 - x)^{1/2}$$

sehingga

$$_tp_x = S_X(t) = 1 - F_X(t) = 0,1(100 - t)^{1/2}.$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^{100} {}_tp_x dt = \int_0^{100} 0,1(100 - t)^{1/2}dt \\
&= -\int_0^{100} 0,1(100 - t)^{1/2}d(100 - t) = -\frac{2}{30}(100 - t)^{3/2}|_0^{100} \\
&= 200/3
\end{aligned}
$$

Untuk median, x_{med}, dipunyai persamaan berikut:

$$
\begin{aligned}
F_X(x_{med}) &= 0,50 \\
1 - 0,1(100 - x_{med})^{1/2} &= 0,50 \\
x_{med} &= 100 - \left(\frac{0.50}{0,10}\right)^2 = 75.
\end{aligned}
$$

Jawab: C.

12. Jika $L = \bar{L}(\bar{A}_x)$ menyatakan nilai sekarang dari "loss random variable" pada suatu "fully continuous whole life model" dengan "continuous premium rate" berdasarkan prinsip equivalent. Jika L^* menyatakan nilai sekarang dari "loss random variable" pada model yang serupa dengan "continuous annual premium rate 0,05" tentukan nilai dari $Var(L^*)$ jika diketahui nilai dari:

$$Var(L) = 0,25 \qquad \bar{A}_x = 0,40 \qquad \delta = 0,06$$

A. 0,1025

B. 0,1525

C. 0,2025

D. 0,2525

E. 0,3025

Pembahasan: Berdasarkan prinsip ekuivalensi, premi untuk model asuransi ini adalah

$$P = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\bar{A}_x}{\frac{1-\bar{A}_x}{\delta}} = \frac{0,06,40}{1-0,40} = 0,04.$$

Variabel random kerugian untuk model asuransi ini adalah

$$\begin{aligned} L = \overline{L}(\bar{A}_x) &= \bar{A}_x - P\bar{a}_x \\ &= \bar{A}_x - P\Big(\frac{1-\bar{A}_x}{\delta}\Big) = \Big(1+\frac{P}{\delta}\Big)\bar{A}_x - \frac{P}{\delta}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} Var(L) &= Var\Big(\Big(1+\frac{P}{\delta}\Big)\bar{A}_x - \frac{P}{\delta}\Big) = Var\Big(\Big(1+\frac{P}{\delta}\Big)\bar{A}_x\Big) \\ &= \Big(1+\frac{P}{\delta}\Big)^2({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2) \\ 0,25 &= \Big(1+\frac{0,04}{0,06}\Big)^2({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2) \end{aligned}$$

atau

$$({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2) = 0,09.$$

Jika diketahui $P^* = 0,05$ maka

$$\begin{aligned}Var(L^*) &= Big(1 + \frac{P^*}{\delta}\Big)^2 ({}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2) \\ &= Big(1 + \frac{0,05}{0,06}\Big)^2 0,09 = 0,3025.\end{aligned}$$

Jawab: E.

13. Diberikan sebagai berikut
    (i) $A_x = 0,30$
    (ii) $A_{x+n} = 0,40$
    (iii) $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = 0,35$
    (iv) $i = 0,05$

    Hitunglah $a_{x:\overline{n}|}$

    A. 9,3
    B. 9,6
    C. 9,8
    D. 10,0
    E. 10,3

    Pembahasan: Dari informasi tersebut di atas, pertama dapat dicari nilai dari asuransi berjangkanya

$$\begin{aligned}A^1_{x:\overline{n}|} &= A_x - A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} A_{x+n} \\ &= 0,30 - 0,40,35 = 0,16.\end{aligned}$$

Sehingga nilai dari asuransi dwiguna

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + A_{pureendowxn} = 0,16 + 0,35 = 0,51.$$

Dari sini dapat dihitung nilai dari anuitas akhir,

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - A^1_{x:\overline{n}|}}{d} = 10,04300781$$

Sehingga diperoleh

$$a_{x:\overline{n}|} = v\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{1.05} 10,04300781 = 9,564769347.$$

Jawab: B.

14. Untuk (x) dan y yang saling bebas, diberikan sebagai berikut:
    (i) $\bar{a}_x = 10,06$
    (ii) $\bar{a}_y = 11,95$
    (iii) $\bar{a}_{\overline{xy}} = 12,59$
    (iv) $\bar{A}_{xy}{}^{1} = 0,09$
    (v) $\delta = 0,07$

    Hitunglah $\bar{A}^{1}_{xy}$

    A. 0,15
    B. 0,20
    C. 0,25
    D. 0,30
    E. 0,35

    Pembahasan: Diketahui hubungan berikut

    $$\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y,$$

    sehingga diperoleh

    $$\bar{a}_{xy} = 10,06 + 11,95 - 12,59 = 9,42.$$

    Informasi ini digunakan untuk menghitung asuransi *joint life* sebagai berikut

    $$\bar{A}_{xy} = 1 - \delta \bar{a}_{xy} = 0,3406.$$

    Diketahui pula hubungan

    $$\bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}_{xy}{}^{1} = \bar{A}_{xy},$$

    sehingga diperoleh

    $$\bar{A}^{1}_{xy} = \bar{A}_{xy} - \bar{A}_{xy}{}^{1} = 0,2506.$$

    Jawab: C.

15. Suatu perusahaan mengeluarkan produk asuransi "special single premium 3-year endowment". Diketahui sebagai berikut:
    (i) Manfaat meninggal 50.000, dibayarkan tiap akhir tahun kematian

(ii) Manfaat ”maturity” adalah 10.000

(iii) Dengan mengikuti tabel mortalita, kematian berdistribusi ”uniform” pada setiap tahun usia

$$\begin{aligned} q_{60} &= 0,11 \\ q_{61} &= 0,12 \\ q_{62} &= 0,20 \\ q_{63} &= 0,28 \end{aligned}$$

(iv) $i = 0,06$

(v) Premi dibayarkan secara sekaligus (”single premium gross”) mengikuti prinsip ”equivalence”

(vi) Komisi adalah 30% dari premium. Tidak ada biaya lain.

Hitunglah nilai dari ”single premium gross” untuk usia masuk (60)

A. 19.778

B. 25.788

C. 30.178

D. 31.111

E. 35.240

Pembahasan: Berdasarkan prinsip ekuivalensi, $\mathbb{E}({}_0L) = 0$. Nilai harapan harga sekarang untuk manfaat tersebut adalah

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{2} 50.000 v^{k+1} {}_{k|}q_{60} + 10.000 {}_3p_{60} \\ &= 50.000 \left(\left(\frac{1}{1.05}\right) 0,11 + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 (1-0,11)0,12 + \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 (1-0,11)(1-0,12)0,20 \right) + \\ &\quad 10.000 \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 (1-0,11)(1-0,12)(1-0,20) \\ &= 21.777,87704 \end{aligned}$$

Berdasarkan prinsip ekuivalensi

$$\mathbb{E}({}_0L) = \mathbb{E}(Z) - (P - 0,3P) = 0,$$

sehingga diperoleh

$$P = \frac{21.777,87704}{0,07} = 31.111,25291.$$

Jawab: D.

16. Pada soal nomor 15, hitunglah nilai dari "single premium gross" untuk usia masuk (60,25)

    A. 31.500

    B. 32.500

    C. 33.500

    D. 34.500

    E. 35.500

Pembahasan: Untuk mendapat premi total kotor untuk (60,25) diperlukan tabel mortalitas untuk (60,25). Berdasarkan asumsi uniform maka diperoleh tabel berikut

k	ℓ_{60+k}	$\ell_{60,25+k}$	$d_{60,25+k}$
0	1,0000	0,9725	0,1092
1	0,8900	0,8633	0,1193
2	0,7832	0,7440	0,1613
3	0,6266	0,5827	
4	0,4511		

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{2} 50.000 v^{k+1} {}_{k|}q_{60,25} + 10.000{}_{3}p_{60,25} \\
&= 50.000\left(\left(\frac{1}{1.05}\right)0,112288 + \left(\frac{1}{1.05}\right)^2 0,122632 + \left(\frac{1}{1.05}\right)^3 0,165901\right) + \\
&\quad 10.000\left(\frac{1}{1.05}\right)^3 0,599178 \\
&= 22.749,24
\end{aligned}$$

Berdasarkan prinsip ekuivalensi

$$\mathbb{E}({}_0L) = \mathbb{E}(Z) - (P - 0,3P) = 0,$$

sehingga diperoleh

$$P = \frac{22.749,24}{0,07} = 32.498,9138.$$

Jawab: B

17. Pada soal nomor 15, Hitunglah peluang dimana perusahaan membayar manfaat lebih dari 20.000 untuk usia masuk (60,25)

A. 0,1

B. 0,2

C. 0,3

D. 0,4

E. 0,5

Pembahasan: Perusahaan membayar manfaat lebih dari 20.000 sama artinya perusahaan membayar 50.000. Perusahaan membayar manfaat sebesar 50.000 jika tertanggung meninggal sebelum usia 63,25 sehingga

$$\text{Peluang} = \mathbb{P}(T_{60,25} < 3) = 1 - 0,5827/0,9725 = 0,401.$$

Jawab: D.

18. Pada soal nomor 15, Hitunglah ”gross premium reserve” pada akhir tahun kedua untuk usia masuk (60,25)

A. 13.617

B. 14.617

C. 15.617

D. 16.617

E. 17.617

Pembahasan: Karena pada kasus ini tidak ada expenses lagi setelahnya, *gross premium reserve* hanyalah EPV dari manfaat, sehingga

$$\begin{aligned} V &= (50.000)(0,1613/0,7440)/1,06 + (10.000)(0,5827/0,7440)/1,06 \\ &= 17.617. \end{aligned}$$

Jawab: E.

<u>**Gunakan informasi berikut untuk soal nomor 19-20**</u>

Untuk suatu asuransi spesial ”20-year term” pada (30) dan (50), diketahui sebagai berikut:

(i) Kematian berdistribusi ”uniform” dengan $\omega = 100$

(ii) (30) dan (50) adalah ”independent”

19. Hitunglah peluang paling sedikit satu dari (30) dan (50) akan meninggal dalam kurun waktu 10 tahun:

A. 1/30

B. 3/10

C. 1/3

D. 2/3

E. 11/35

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min(T_{30}, T_{50}) \leq 10) &= 1 - \mathbb{P}(\min(T_{30}, T_{50}) > 10) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_{30} > 10)\mathbb{P}(T_{50} > 10) \\
&= 1 - \left(1 - \frac{10}{70}\right)\left(1 - \frac{10}{50}\right) \\
&= \frac{11}{35}.
\end{aligned}$$

Jawab: E.

20. Hitunglah peluang dari (30) meninggal dalam 10 tahun tetapi setelah (50) meninggal:

A. 1/60

B. 1/30

C. 1/20

D. 3/20

E. 1/70

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_{10}q^{2}_{30:50} &= \mathbb{P}(T_{30} \leq 10 \text{ dan } T_{30} > T_{50}) \\
&= \int_0^{10}\int_0^t f_{T_{50},T_{30}}(s,t)dsdt = \int_0^{10}\int_0^t \frac{1}{50}\frac{1}{70}dsdt \\
&= \frac{1}{50}\frac{1}{70}\frac{1}{2}t^2|_0^{10} = \frac{1}{70}.
\end{aligned}$$

Jawab: E.

21. Untuk “two lives” (50) dan (60) dengan “independent future lifetimes”:

(i) $\mu_{50+t} = 0,002t, t > 0$

(ii) $\mu_{60+t} = 0,00046t, t > 0$

Hitunglah ${}_{20}q^{\;\;1}_{50:60} - {}_{20}q^{\;\;\;\;\;2}_{50:60}$

A. 0,17

B. 0,18

C. 0,30

D. 0,31

E. 0,37

Pembahasan: Dari informasi tersebut diperoleh pdf dari T_{50} dan T_{60} masing-masing adalah

$$\begin{aligned} f_{T_{50}}(t) &= e^{-\int_0^t \mu_{50+s} ds}\mu_{50+t} \\ &= e^{-\int_0^t 0{,}002 s ds} 0,002t \\ &= e^{-0{,}001 t^2} 0,002t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{T_{60}}(t) &= e^{-\int_0^t \mu_{60+s} ds}\mu_{60+t} \\ &= e^{-\int_0^t 0{,}00046 s ds} 0,00046t \\ &= e^{-0{,}00023 t^2} 0,00046t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{20}q^{\;\;1}_{50:60} &= \mathbb{P}(T_{50} \leq 20 \text{ dan } T_{50} < T_{60}) \\ &= \int_0^{20} \int_t^{\infty} f_{T_{60},T_{50}}(s,t) ds dt \\ &= \int_0^{20} \int_t^{\infty} f_{T_{60}}(s) f_{T_{50}}(t) ds dt \\ &= \int_0^{20} \int_t^{\infty} e^{-0{,}00023 s^2} 0,00046 s e^{-0{,}001 t^2} 0,002 t ds dt \\ &= \int_0^{2} 00,002 t e^{-0{,}001 t^2} \left[-e^{-0{,}00023 s^2} |_t^{\infty} \right] dt \\ &= \int_0^{2} 00.002 t e^{-0{,}00123 t^2} dt \\ &= \frac{200}{246}\left(1 - e^{-0{,}00123(20^2)}\right) = 0.315933036. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_{20}q^{\;\;2}_{50:60} &= \mathbb{P}(T_{60} \le 20 \text{ dan } T_{60} > T_{50}) \\
&= \int_0^{20}\int_0^t f_{T_{50},T_{60}}(s,t)dsdt \\
&= \int_0^{20}\int_0^t f_{T_{50}}(s)f_{T_{60}}(t)dsdt \\
&= \int_0^{20}\int_0^t e^{-0{,}001s^2}0{,}002se^{-0{,}00023t^2}0{,}00046tdsdt \\
&= \int_0^2 00{,}00046te^{-0{,}00023t^2}\left[-e^{-0{,}001s^2}|_0^t\right]dt \\
&= \int_0^2 00.00046te^{-0{,}00023t^2}(1-e^{-0{,}001t^2})dt \\
&= \int_0^{20} 0{,}00046te^{-0{,}00023t^2}dt - \int_0^{20} 0{,}00046te^{-0{,}00123t^2}dt \\
&= \left(1-e^{-0{,}00023t^2}\right) + \frac{46}{246}e^{-0{,}00123(20^2)} - \frac{46}{246} \\
&= 0.08789485 + 0.114327272 - 0.18699187 = 0.015230252.
\end{aligned}
$$

Jadi,

$$
{}_{20}q^{\;\;1}_{50:60} - {}_{20}q^{\;\;2}_{50:60} = 0.300702784.
$$

Jawab: C.

22. Untuk suatu asuransi ”spesial fully discrete whole life” pada (40) diberikan:
    (i) ”annual net premium” pada 20 tahun pertama adalah $1000P_{40}$
    (ii) ”annual net premium” berubah pada usia 60
    (iii) Manfaat kematian adalah 1000 pada 20 tahun pertama, setelah itu menjadi 2000
    (iv) $\ddot{a}_{60} = 11{,}1454$ $\ddot{a}_{40} = 14{,}8166$ $A_{60} = 0{,}36913$ $q_{60} = 0{,}01376$
    (v) $i = 0{,}08$

    Hitunglah ${}_{21}V$, ”net premium reserve” pada akhir tahun 21

    A. 282
    B. 286
    C. 292
    D. 296
    E. 300

Pembahasan:
Karena pada kasus ini (”*special fully discrete whole life*”) premi dan benefitnya sama untuk sebuah kontrak asuransi pada seseorang yang berumur (40) tahun selama kurun waktu 20 tahun, maka ${}_{20}V$ harus sama seperti pada sebuah kontrak asuransi seumur hidup standard dengan benefit sebesar 1000 pada seseorang berumur (40). Jadi

$$ {}_{20}V_{40} = 1 - \frac{\ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{40}} = 1 - \frac{11,1454}{14,8166} = 0,247776 $$

Kemudian berdasarkan prinsip ekivalensi, besar cadangan (reserve) ini ditambahkan dengan ”*future net premium*” haruslah sama dengan ”*future benefit*”. Misalkan P adalah premi asuransi untuk seseorang yang berusia lebih dari 60 tahun, maka

$$ \begin{aligned} 2000A_{60} &= 247,776 + P\ddot{a}_{60} \\ 2000(0,36913) &= 247,776 + P(11,1454) \\ P &= \frac{2000(0,36913) - 247,776}{11,1454} = 44,0077 \end{aligned} $$

Berikutnya kita akan menghitung ${}_{21}V$ dengan rumus rekursif

$$ \begin{aligned} {}_{21}V &= \frac{({}_{20}V + P)(1+i) - 200q_{60}}{1 - q_{60}} \\ &= \frac{(247,776 + 44,0077)(1,06) - 200(0,01376)}{1 - 0,01376} \\ &= 285,70 \\ &\approx 286 \end{aligned} $$

Jadi ${}_{21}V = 286$

Jawab: B

23. Anda diberikan sebagai berikut:

    (i) Rate Kematian untuk (x) dan manfaat asuransi dibayarkan setiap tahun mengikuti tabel berikut:

t	q_{x+t-1}	b_t
1	0,01	10
2	0,03	10
3	0,05	20

    (ii) $i = 0,04$

(iii) Z adalah "present value" dari variabel acak untuk 3 tahun asuransi "term life" pada (x) dengan manfaat pada tabel diatas dibayarkan pada akhir tahun kematian

Hitunglah $Var(Z)$

A. 16,26

B. 16,47

C. 16,78

D. 17,14

E. 18,81

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k=0}^{2} b_{t+1} v^{k+1}{}_{k|}q_x \\
&= 10\left(\frac{1}{1,04}\right)0,01 + 10\left(\frac{1}{1,04}\right)^2 0,99\times 0,03 + 20\left(\frac{1}{1,04}\right)^3 0,99\times 0,97\times 0,05 \\
&= 1,224450245,
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^2) &= \sum_{k=0}^{2} \left(b_{t+1} v^{k+1}\right)^2 {}_{k|}q_x \\
&= \left(10\frac{1}{1,04}\right)^2 0,01 + \left(10\frac{1}{1,04}\right)^4 0,99\times 0,03 + \left(20\frac{1}{1,04}\right)^6 0,99\times 0,97\times 0,05 \\
&= 18,64210544.
\end{aligned}
$$

Jadi

$$Var(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - (\mathbb{E}(Z))^2 = 17,14282704.$$

Jawab: D.

24. Diberikan bahwa kematian mengikuti $\ell_x = 100 - x, 0 \le x \le 100$

Hitunglah e_{85}

A. 6,890

B. 6,895

C. 6,900

D. 6,905

E. 7,000

Pembahasan:

$$\mathring{e}_{85} = \frac{\omega - x}{2} = \frac{100 - 85}{2} = 7,5,$$

$$e_{85} = \mathring{e}_{85} - 0,5 = 7.$$

Jawab: E.

25. Untuk suatu asuransi "quarterly premium whole life" dengan manfaat 1000 pada (50),
    i. "annual net premium" adalah 24,40
    ii. Manfaat kematian dibayarkan pada akhir tahun kematian
    iii. $q_{60} = 0,02$
    iv. "force of mortality" adalah konstan antara usia 60 dan 61
    v. $i = 0,15$
    vi. ${}_{10}V = 205,11$

    Hitunglah "net premium reserve" di saat $t = 10,4$

    A. 218,84

    B. 219,74

    C. 223,95

    D. 227,26

    E. 232,70

    Pembahasan:
    Pada kasus ini kita akan menggunakan rumus rekursif. Dua "*quartely premium whole life*" yang masing-masing besarnya adalah 6,10 dibayarkan pada rentang waktu $[10, \quad 10,4)$. Karena diketahui bahwa "*force of mortality*" adalah konstan, maka "rale of mortality" untuk semua periode sebesar s selama tahun tersebut adalah $1 - 0,98^s$.
    Dengan demikian

$$\begin{aligned}
{}_{10,4}V &= \frac{({}_{10}V + \frac{P}{4})(1,1^{0,4}) + (0,98^{0,25})(\frac{P}{4})(1,1^{0,15}) - 1000(1 - 0,98^{0,4})(1,1^{-0,6})}{0,98^{0,4}} \\
&= \frac{(205,11 + 6,10)(1,1^{0,4}) + (0,98^{0,25})(6,10)(1,1^{0,15}) - 7,60117}{0,98^{0,4}} \\
&= 219,74
\end{aligned}$$

Jadi "*net premium reserve*" di saat $t = 10,4$ adalah 219,74.

Jawab: B

26. Diberikan suatu "survival function"

$$S_0(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Hitunglah ${}_{5|5}q_{15}$

A. 0,06

B. 0,08

C. 0,10

D. 0,12

E. 0,14

Pembahasan:

$$\begin{aligned} S_x(t) &= \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = \frac{\frac{1}{1+\sqrt{x+t}}}{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} \\ &= \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x+t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{5|5}q_{15} &= \mathbb{P}(5 < T_{15} \leq 10) \\ &= F_{T_{15}}(10) - F_{T_{15}}(5) = S_{15}(5) - S_{15}(10) \\ &= \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{20}} - \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{25}} \\ &= 0,078345. \end{aligned}$$

Jawab: B.

27. Untuk suatu model "2-year selection and ultimate mortality", diberikan

(i) $q_{[x]+1} = 0,95q_{x+1}$

(ii) $\ell_{76} = 96.815$

(iii) $\ell_{77} = 96.124$

Hitunglah $\ell_{[75]+1}$

A. 96.150

B. 96.780

C. 97.420

D. 98.050

E. 98.690

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
p_{[75]+1} &= \frac{\ell_{77}}{\ell_{[75]+1}} \\
1 - 0,95 p_{76} &= \frac{\ell_{77}}{\ell_{[75]+1}} \\
\ell_{[75]+1} &= \frac{\ell_{77}}{1 - 0,95 \frac{\ell_{76} - \ell_{77}}{\ell_{76}}} \\
&= 96.780,21414.
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

28. Diberikan sebagai berikut:

(i) $q_x = 0,024$

(ii) "*Force of mortality*" adalah konstan antara *usia usia ber-bilangan bulat*

Hitunglah ${}_{1/2}q_{x+1/4}$

A. 0,051

B. 0,043

C. 0,032

D. 0,026

E. 0,012

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{4}} &= 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{4}} \\
&= 1 - (p^{\frac{1}{2}}_{)} \\
&= 1 - (1 - 0,024)^{\frac{1}{2}} = 0,01207.
\end{aligned}
$$

Jawab: E.

29. Untuk dua asuransi ”fully continuous whole life” pada (x), diketahui sebagai berikut:

    a) Polis A: manfaat kematian sebesar 1, “annual premium rate” sebesar 0,10 dan “variance of the present value of future loss at t” sebesar 0,455

    b) Polis B: manfaat kematian sebesar 2, ”annual premium rate” sebesar 0,16

    c) $\delta = 0,06$

    Hitunglah nilai dari ”variance of the present value of future loss at t” pada polis B

    A. 0,9

    B. 1,4

    C. 2,0

    D. 2,9

    E. 3,4

    Pembahasan: .

    - Untuk polis A diketahui *future loss* pada waktu t adalah

$$
\begin{aligned}
{}_tL &= 1 \times v^{T_{x+t}} - P\bar{a}_{\overline{T_{x+t}|}} \\
&= e^{-\delta T_{x+t}} - 0.1\left(\frac{1 - e^{-\delta T_{x+t}}}{\delta}\right) \\
&= \left(1 + \frac{0,10}{\delta}\right) e^{-\delta T_{x+t}} - \frac{0,10}{\delta}.
\end{aligned}
$$

Sehinga

$$
\begin{aligned}
Var({}_tL) &= \left(1 + \frac{0,10}{\delta}\right)^2 Var(e^{-\delta T_{x+t}}) \\
0,455 &= \left(1 + \frac{0,10}{0,06}\right)^2 \left({}^2\bar{A}_{x+t} - \bar{A}^2_{x+t}\right)
\end{aligned}
$$

atau

$$
\left({}^2\bar{A}_{x+t} - \bar{A}^2_{x+t}\right) = \frac{0,455}{\left(1 + \frac{0,10}{0,06}\right)^2} = 0.063984375.
$$

- Untuk polis B:

$$\begin{aligned}
{}_tL &= 2 \times v^{T_{x+t}} - P\bar{a}_{\overline{T_{x+t}}|} \\
&= e^{-\delta T_{x+t}} - 0.16\left(\frac{1-e^{-\delta T_{x+t}}}{\delta}\right) \\
&= \left(1 + \frac{0,16}{\delta}\right) e^{-\delta T_{x+t}} - \frac{0,16}{\delta}.
\end{aligned}$$

  Sehinga

$$\begin{aligned}
Var({}_tL) &= \left(2 + \frac{0,16}{\delta}\right)^2 Var(e^{-\delta T_{x+t}}) \\
&= \left(2 + \frac{0,16}{0,06}\right)^2 \left({}^2\bar{A}_{x+t} - \bar{A}_{x+t}^2\right) \\
&= 21.77777778 \times 0.063984375 \\
&= 1,3934375.
\end{aligned}$$

Jawab: B.

30. Jika variabel acak "age-at-failure" berdistribusi "exponential" dengan "mean" $1/\lambda$, manakah dari penyataan berikut yang benar untuk $\bar{P}(\bar{A}_x)$?

    A. $\overline{P}(\bar{A}_x) = \lambda$

    B. $\overline{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\lambda}$

    C. $\overline{P}(\bar{A}_x) = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$

    D. $\overline{P}(\bar{A}_x) = \frac{\delta}{\lambda+\delta}$

    E. $\overline{P}(\bar{A}_x) = \frac{1}{\lambda+\delta}$

    Pembahasan:

$$\overline{P}(\bar{A}_x) = \frac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+\delta}}{\frac{1}{\lambda+\delta}} = \lambda.$$

    Jawab: A.

4 Periode November 2016

1. Untuk suatu model *double decrement*, diketahui sebagai berikut:

   (i) T adalah variabel acak dari *time-until-death*

   (ii) J adalah variabel acak dari *cause-of-decrement*

   (iii) $f_{T,J}$ adalah joint p.d.f dari T dan J

   (iv)

$$f_{T,J}(t,j) \quad = \quad \begin{cases} 0,6ke^{-0,8t} + 0,9(1-k)e^{-1,5t}, & t \geq 0 \quad and \quad J = 1 \\ 0,2ke^{-0,8t} + 0,6(1-k)e^{-1,5t}, & t \geq 0 \quad and \quad J = 2 \end{cases}$$

   (v) ${}_{\infty}q_x^{(1)} = 2{}_{\infty}q_x^{(2)}$

   Hitunglah k .

   A. 3/8 B. 4/9 C. 1/2 D. 2/3 E. 3/4

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_{\infty}q_x^{(1)} &= 2{}_{\infty}q_x^{(2)} \\ \int_0^{\infty} f_{T,1}(t,1)\ dt &= 2\int_0^{\infty} f_{T,2}(t,2)\ dt \\ \int_0^{\infty} 0,6ke^{-0,8t} + 0,9(1-k)e^{-1,5t}dt &= 2\int_0^{\infty} 0,2ke^{-0,8t} + 0,6(1-k)e^{-1,5t}dt \\ 0,6k\int_0^{\infty} e^{-0,8t}dt + 0,9(1-k)\int_0^{\infty} e^{-1,5t}dt &= 0,4k\int_0^{\infty} e^{-0,8t}dt + 1,2(1-k)\int_0^{\infty} e^{-1,5t}dt \end{aligned}$$

   Misalkan:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\infty} e^{-0,8t}dt = \frac{1}{0,8} = \frac{5}{4} \\ B &= \int_0^{\infty} e^{-1,5t}dt = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kita bisa menuliskan ulang persamaan tersebut menjadi :

$$\begin{aligned}
(0,6k)A + (0,9)(1-k)B &= (0,4k)A + (1,2)(1-k)B \\
0,6kA + 0,9B - 0,9kB &= 0,4kA + 1,2B - 1,2kB \\
0,2kA &= 0,3B - 0,3kB \\
k &= \frac{0,3B}{0,2A + 0,3B} \\
&= \frac{(0,3)(\frac{2}{3})}{(0,2)(\frac{5}{4}) + (0,3)(\frac{2}{3})} \\
&= \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Jawab: B.

2. Perusahaan elektronik ingin menawarkan garansi pada sistem mereka *high-end stereo*, yang ”blaster”, yang akan mencakup hanya ”kegagalan” karena cacat pabrik. CFO khawatir tentang biaya garansi ini dan ingin memastikan bahwa klaim atas garansi tersebut terbatas. Anda diberikan:

   (i) Semua ”kegagalan” karena cacat semua produsen akan menghasilkan klaim garansi

   (ii) Fungsi *hazard* untuk kegagalan produk karena cacat pabrik adalah $\mu = 0,01$

   (iii) Fungsi *hazard* untuk kegagalan produk karena semua penyebab lainnya adalah $\mu = 0,02$

   (iv) Garansi harus n tahun, dimana n adalah suatu integer

   Berapa lama garansi terpanjang untuk memastikan bahwa tidak lebih dari 1 dalam 50 sistem ”blaster” menghasilkan klaim garansi?

   A. 1 Tahun

   B. 2 Tahun

   C. 3 Tahun

   D. 4 Tahun

   E. 5 Tahun

   Pembahasan:

   Dengan menyatakan kegagalan karena cacat pabrik sebagai (1), kita ingin membuat agar ”decrement” dari (1) selama n tahun tidak lebih besar dari $\frac{1}{50}$ atau 0,02. Dengan kata lain

$$\begin{aligned}
{}_nq^{(1)} &= 0,02 \\
0,02 &= \int_0^n e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\mu_1 dt
\end{aligned}$$

dimana $\mu_1 = 0,01$ dan $\mu_2 = 0,02$. Jadi

$$\begin{aligned} 0,02 &= \int_0^n e^{-0,03t}(0,01)dt \\ &= \frac{1}{3}(1 - e^{-0,03n}) \\ 0,94 &= e^{-0,03n} \\ 0,03n &= -\ln 0,94 = 0,06188 \\ n &= 2,0626 \approx 2 \end{aligned}$$

Jadi lama garansi terpanjang untuk memastikan bahwa tidak lebih dari 1 dalam 50 sistem "blaster" menghasilkan klaim garansi adalah 2 tahun.

Jawab: B

3. Suatu asuransi "*special whole life*" di terbitkan pada (x) . Manfaat kematian adalah 1 untuk tahun pertama dan 2 untuk tahun selanjutnya. Manfaat tambahan sebesar 2 ditambahkan jika meninggal karena kecelakaan:

   (i) Manfaat dibayarkan pada "*moment of death*".

   (ii) "*force of mortality*" meninggal karena kecelakaan adalah $\mu_{x+t}^{(ad)} = 0,005, \quad t \geq 0$

   (iii) $\mu_{x+t}^{(\tau)} = 0,040, \quad t \geq 0$

   (iv) $\delta = 0,06$

   Hitunglah "*net single premium*" untuk asuransi ini

   A. 0,777

   B. 0,812

   C. 0,827

   D. 0,844

   E. 0,862

   Pembahasan:
   Diasumsikan bahwa premi dihitung berdasarkan prinsip ekivalensi.

$$
\begin{aligned}
Net\ single\ premium &= \text{Nilai saat ini dari semua manfaat asuransi yang didapatkan} \\
&= \text{Nilai saat ini untuk manfaat kematian sebesar 1 dengan} \\
&\quad \mu_{x+t}^{(\tau)} = 0,04 + \text{nilai saat ini untuk manfaat kematian sebesar 1} \\
&\quad \text{yang tertunda 1 tahun (deffered) dengan } \mu_{x+t}^{(\tau)} = 0,04 + \\
&\quad \text{Nilai saat ini untuk manfaat kematian tambahan sebesar 2} \\
&\quad \text{dengan } \mu_{x+t}^{(ad)} = 0,005
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Net\ single\ premium =& 1 \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt + v \ p_x^{(\tau)} \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt + \\
& 2 \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(ad)} dt \\
=& (1 + v \ p_x^{(\tau)}) \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(\tau)} dt + 2 \int_0^\infty v^t \ {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(ad)} dt \\
=& (1 + e^{-0,06} \ e^{-0,04}) \int_0^\infty e^{-0,06t} e^{-0,04t} (0,04) dt + \\
& 2 \int_0^\infty e^{-0,06t} e^{-0,04t} (0,005) dt \\
=& (1 + e^{-0,1}) \left(\frac{0,04}{0,04 + 0,06} \right) + \frac{2(0,005)}{0,04 + 0,06} \\
=& \frac{4}{10} (1 + e^{-0,1}) + \frac{1}{10} \\
=& 0,8619349672 \\
\approx& 0,862
\end{aligned}
$$

Jawab: E.

4. Suatu "*whole life insurance*" dengan manfaat 1 dibayarkan saat "*moment of death*" dari (x) termasuk ketentuan "*double-ganti rugi*". Ketentuan ini membayarkan manfaat kematian tambahan sebesar 1 untuk kematian yang disengaja. S merupakan "*net single premium*" untuk asuransi ini.

   "*Whole life insurance*" yang kedua dengan manfaat 1 dibayarkan saat "*moment of death*" dari (x) termasuk ketentuan "*triple-ganti rugi*". Ketentuan ini membayarkan manfaat kematian tambahan sebesar 2 untuk kematian yang disengaja. T merupakan "*net single premium*" untuk asuransi ini. Diberikan sebagai berikut:

   (i) μ adalah suatu "*force of decrement*" untuk kematian yang disengaja

   (ii) 5μ adalah suatu "*force of decrement*" untuk kematian dengan cara lain

   (iii) Tidak ada "*decrement*" lainnya.

   Tentukan lah $T - S$

   A. S /12

B. S / 8

C. S / 7

D. S / 4

E. S / 2

Pembahasan:
Pertama kita akan menghitung nilai saat ini dari manfaat kematian untuk "*whole life insurance*" tipe 1.
Nilai saat ini dari manfaat kematian sebesar 1 yang dibayarkan saat "moment of death" adalah:

$$\frac{5\mu}{\mu+\delta}$$

Nilai saat ini dari manfaat kematian sebesar 2 untuk kematian yang disengaja dan dibayarkan saat "moment of death" adalah

$$\frac{2\mu}{\mu+\delta}$$

Dengan demikian kita peroleh nilai saat ini dari manfaat kematian untuk "*whole life insurance*" tipe 1 adalah

$$\begin{aligned} S &= \frac{5\mu}{\mu+\delta} + \frac{2\mu}{\mu+\delta} \\ &= \frac{7\mu}{\mu+\delta} \end{aligned}$$

Berikutnya kita akan menghitung nilai saat ini dari manfaat kematian untuk "*whole life insurance*" tipe 2. Nilai saat ini dari manfaat kematian sebesar 1 yang dibayarkan saat "moment of death" adalah

$$\frac{5\mu}{\mu+\delta}$$

Nilai saat ini dari manfaat kematian sebesar 3 untuk kematian yang disengaja dan dibayarkan saat "moment of death" adalah:

$$\frac{3\mu}{\mu+\delta}$$

Dengan demikian nilai saat ini dari manfaat kematian untuk "*whole life insurance*" tipe 2 adalah

$$\begin{aligned} T &= \frac{5\mu}{\mu+\delta} + \frac{3\mu}{\mu+\delta} \\ &= \frac{8\mu}{\mu+\delta} \end{aligned}$$

Jadi, $T - S = \dfrac{8\mu}{\mu+\delta} - \dfrac{7\mu}{\mu+\delta} = \dfrac{\mu}{\mu+\delta} = \dfrac{S}{7}$

Jawab: C.

5. Sebuah "*10-year term insurance*" diterbitkan pada (x) yang memberikan manfaat kematian sebesar 2.000 jika kematian terjadi karena kecelakaan dan 1.000 jika kematian terjadi karena hal lainnya. Manfaat kematian dibayarkan saat "*moment of death*".
"*Force of mortality*" untuk kematian karena kecelakaan adalah konstan 0,01. Bunga pada "*constant force*", $\delta = 0,09$.
Tentukan "*net single premium*" untuk "*coverage*" berikut.
A. $2000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,10) + 1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09)$
B. $2000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09) + 1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,10)$
C. $1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09) + 20\bar{a}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09)$
D. $1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09) + 10\bar{a}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,10)$
E. $1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,10) + 10\bar{a}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,10)$

Pembahasan:
Net Single Premium untuk kontrak asuransi ini adalah sama dengan jumlah seluruh benefit yang diperoleh oleh *policyholder*, yaitu:

$$\begin{aligned} P &= 1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}\ \delta=0,09} + 2000 \int_0^{10} v^t \ {}_tp_x \ (0,01) \ dt \\ &= 1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}\ \delta=0,09} + 20 \int_0^{10} v^t \ {}_tp_x \ dt \\ &= 1000\bar{A}^{1}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09) + 20\bar{a}_{x:\overline{10|}} \ \ (at \ \ \delta = 0,09) \end{aligned}$$

Jawab: C

6. Untuk "*two independent lives now*" usia 30 dan 34, diberikan sebagai berikut:

x	q_x
30	0,1
31	0,2
32	0,3
33	0,4
34	0,5
35	0,6
36	0,7
37	0,8

Hitunglah peluang dimana kematian terakhir dari "*two lives*" ini akan terjadi selama 3 tahun dari sekarang $({}_{2|}q_{\overline{30:34}})$

A. 0,01

B. 0,03

C. 0,14

D. 0,18

E. 0,24

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_{2|}q_{\overline{30:34}} &= {}_3q_{\overline{30:34}} - {}_2q_{\overline{30:34}} \\
&= {}_3q_{30}\ {}_3q_{34} - {}_2q_{30}\ {}_2q_{34} \\
&= (1 - {}_3p_{30})(1 - {}_3p_{34}) - (1 - {}_2p_{30})(1 - {}_2p_{34}) \\
&= (1 - p_{30}\ p_{31}\ p_{32})(1 - p_{34}\ p_{35}\ p_{36}) - (1 - p_{30}\ p_{31})(1 - p_{34}\ p_{35}) \\
&= (1 - (0,9)(0,8)(0,7))(1 - (0,5)(0,4)(0,3)) - (1 - (0,9)(0,8))(1 - (0,5)(0,4)) \\
&= 0,24224 \\
&\approx 0,24
\end{aligned}$$

Jawab: E.

7. Diberikan 2 "*independent lives*", (x) dan (y) , bergantung pada "*identical forces of mortality*":

$$\mu_{x+t} = \mu_{y+t} = 0,05 \quad untuk \quad 0 < t \leq 20$$

Tentukan peluang "*last survivor* $(\overline{xy})$" akan hidup 10 tahun.

A. Kurang dari 0,20

B. Lebih besar sama dengan 0,20, tetapi lebih kecil dari 0,40

C. Lebih besar sama dengan 0,40, tetapi lebih kecil dari 0,60

D. Lebih besar sama dengan 0,60, tetapi lebih kecil dari 0,80

E. Lebih besar sama dengan 0,80

Pembahasan:
Karena x dan y saling independen dan memiliki laju kematian yang identik maka kita peroleh:

$$_{10}q_x = {}_{10}q_y = 1 - {}_{10}p_x = 1 - e^{-0,05(10)} = 1 - e^{-0,5}$$

Peluang "last survivor" akan hidup 10 tahun adalah

$$_{10}p_{\overline{xy}} = 1 - {}_{10}q_{\overline{xy}} = 1 - {}_{10}q_x \ {}_{10}q_y = 1 - (1 - e^{-0,5})^2 = 0,845181$$

Jawab: E.

8. (40) dan (50) adalah "*independent lives*". Manakah dari pernyataan berikut yang benar untuk menyatakan peluang dari "*last survivor*" dari (40) dan (50) akan meninggal antara usia 70 dan 75?

A. $_{20}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{30}q_{40} + {}_{30}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{20}q_{50}$

B. $_{20}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{30}q_{40} + {}_{30}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{20}q_{50} + {}_{20}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{30}p_{40} \ {}_5q_{70}$

C. $_{20}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{30}q_{40} + {}_{30}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{20}q_{50} + 2{}_{20}p_{50} \ {}_5q_{70} \ {}_{30}p_{40} \ {}_5q_{70}$

D. $_{20}q_{40} \ {}_{20}p_{50} \ {}_5q_{70} + {}_{20}p_{40} \ {}_{20}p_{50} \ \int_0^5 {}_tq_{60} \ {}_tp_{70} \ \mu_{70+t} dt + {}_{30}q_{50} \ {}_{30}p_{40} \ {}_5q_{70} +$
$_{30}p_{50} \ {}_{30}p_{40} \int_0^5 {}_tq_{80} \ {}_tp_{70} \ \mu_{70+t} \, dt$

E. $\Sigma_{t=0}^4 ({}_{30}p_{40} \ {}_tp_{70} q_{70+t} \ {}_{30+t}q_{50} + {}_{20}p_{50} \ {}_tp_{70} \ q_{70+t} \cdot {}_{20+t}q_{40})$

Pembahasan:
Misalkan $(x) = 40$ dan $(y) = 50$. Untuk menghitung peluang dari "last survivor" (x) dan (y) yang akan meninggal antara usia 70 dan 75, kita akan mempertimbangkan empat kemungkinan yang dapat terjadi:

1) Dalam 20 tahun mendatang, (x) akan meninggal dan (y) (yang masih hidup ketika (x) meninggal) akan meninggal antara usia 70 tahun dan 75 tahun.
Peluang dari kejadian ini adalah:

$$_{20}q_{40} \ {}_{20|5}q_{50} = {}_{20}q_{40} \ {}_{20}p_{50} \ {}_5q_{70}$$

2) Dalam kurun waktu 20 tahun mendatang, (x) dan (y) masih tetap hidup, namun (y) akan meninggal setelah (x) meninggal ((y) meninggal kedua) pada usia antara 70 tahun dan 75 tahun. Peluang dari kejadian ini adalah:

$$_{20}p_{40}\ _{20}p_{50} \int_0^5 {}_tq_{60}\ _tp_{70}\ \mu_{70+t}dt$$

3) Dalam kurun waktu 30 tahun mendatang, (y) akan meninggal dan (x) (yang masih hidup ketika (y) meninggal) akan meninggal antara usia 70 tahun dan 75 tahun. Peluang dari kejadian ini adalah:

$$_{30}q_{50}\ _{30|5}q_{40} = {}_{30}q_{50}\ _{30}p_{40}\ _5q_{70}$$

4) Dalam kurun waktu 30 tahun mendatang, (x) dan (y) masih tetap hidup, namun (x) akan meninggal setelah (y) ((x) meninggal kedua) pada usia antara 70 tahun dan 75 tahun. Peluang dari kejadian ini adalah:

$$_{30}p_{50}\ _{30}p_{40} \int_0^5 {}_tq_{80}\ _tp_{70}\ \mu_{70+t}dt$$

Jadi pernyataan yang benar untuk menyatakan peluang dari "last survivor" dari (40) dan (50) akan meninggal antara usia 70 dan 75 adalah:

$$_{20}q_{40}\ _{20}p_{50}\ _5q_{70} + {}_{20}p_{40}\ _{20}p_{50} \int_0^5 {}_tq_{60}\ _tp_{70}\ \mu_{70+t}dt + {}_{30}q_{50}\ _{30}p_{40}\ _5q_{70} +$$
$$_{30}p_{50}\ _{30}p_{40} \int_0^5 {}_tq_{80}\ _tp_{70}\ \mu_{70+t}\,dt$$

Jawab: D

9. Diberikan sebagai berikut:
   (i) T_x dan T_y adalah "*independent*"
   (ii) Fungsi "*survival*" untuk (x) mengikuti $l_x = 100(95 - x), \quad 0 \leq x \leq 95$
   (iii) Fungsi "*survival*" untuk (y) berdasarkan konstan "*force of mortality*", $\mu_{y+t} = \mu$ untuk $t \geq 0$
   (iv) $n < 95 - x$

   Tentukan peluang dimana (x) meninggal dalam waktu n tahun dan meninggal sebelum (y) .

   A. $\dfrac{e^{-\mu n}}{95 - x}$

   B. $\dfrac{ne^{-\mu n}}{95 - x}$

C. $\dfrac{1-e^{-\mu n}}{\mu(95-x)}$

D. $\dfrac{1-e^{-\mu n}}{95-x}$

E. $1-e^{\mu n}+\dfrac{e^{-\mu n}}{95-x}$

Pembahasan:
Peluang (x) hidup hingga t tahun kemudian adalah:

$$_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - \frac{t}{95-x}$$

sedangkan peluang (y) hidup hingga t tahun kemudian adalah

$$_tp_y = e^{-\mu t}$$

peluang *joint-life* antara (x) dan (y) hingga t tahun adalah

$$_tp_{x:y} = {_tp_x}\ {_tp_y} = \left(1 - \frac{t}{95-x}\right)e^{-\mu t}$$

Dengan demikian peluang dimana (x) meninggal dalam waktu n tahun dan meninggal sebelum (y) adalah

$$\begin{aligned}
{_nq^1_{x:y}} &= \int_0^n {_tp_{x:y}}\mu_{x+t}dt \\
&= \int_0^n \left(1-\frac{t}{95-x}\right)e^{-\mu t}\left(\frac{1}{95-x-t}\right)dt \\
&= \int_0^n \left(\frac{e^{-\mu t}}{95-x}\right)dt \\
&= \frac{1}{95-x}\frac{1}{\mu}(1-e^{-\mu n}) \\
&= \frac{1-e^{-\mu n}}{\mu(95-x)}
\end{aligned}$$

Jawab: C.

10. Suatu group terdiri dari dua "*independent lives*" (x) dan (y) , dimana $x = 40$ dan $y = 30$
Diberikan sebagai berikut:
    (i) Untuk (x), $l_x = 50 - x \quad (0 \leq x \leq 50)$
    (ii) Untuk (y), $l_y = 100 - y \quad (0 \leq y \leq 100)$

Hitunglah "*expected*" usia kematian untuk kematian pertama

A. Kurang dari 44,0

B. Paling sedikit 44,0; tetapi kurang dari 44,5

C. Paling sedikit 44,5; tetapi kurang dari 45,0

D. Paling sedikit 45,0; tetapi kurang dari 45,5

E. Paling sedikit 45,5

Pembahasan:
karena (x) dan (y) saling independen, maka:

$$ {}_tp_{xy} = {}_tp_x \cdot {}_tp_y $$

dimana

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= {}_tp_{40} = 1 - \frac{t}{50-40} = 1 - \frac{t}{10} \\ {}_tp_y &= {}_tp_{30} = 1 - \frac{t}{50-30} = 1 - \frac{t}{20} \end{aligned} $$

dengan demikian

$$ {}_tp_{xy} = {}_tp_{40:30} = \left(1 - \frac{t}{10}\right)\left(1 - \frac{t}{20}\right) = 1 - \frac{3t}{20} + \frac{t^2}{200} $$

"Expected future life" untuk x dan y adalah:

$$ \begin{aligned} \mathring{e}_{xy} &= \int_0^{10} {}_tp_{40:30}\ dt \\ &= \int_0^{10} 1 - \frac{3t}{20} + \frac{t^2}{200}\ dt \\ &= 10 - \frac{300}{40} + \frac{1000}{600} \\ &= 4,167 \end{aligned} $$

Jadi, "expected" usia untuk kematian pertama adalah: $40 + 4,167 = 44,167$

Jawab: B

11. Anda diberikan sebagai berikut:

(i) Kematian berdistribusi "*uniform*" dengan $\omega = 110$

(ii) T_{80} dan T_{85} adalah "*independent*"

(iii) G adalah peluang (80) meninggal setelah (85) dan sebelum 5 tahun dari sekarang

(iv) H adalah peluang dimana kematian pertama terjadi setelah 5 tahun dan sebelum 10 tahun dari sekarang

Hitunglah G + H

A. 0,25

B. 0,28

C. 0,33

D. 0,38

E. 0,41

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
G = {}_5q^{\,2}_{80:85} &= \int_0^5 {}_tp_{80}(1 - {}_tp_{85})\mu_{80+t}dt \\
&= \int_0^5 \left(1 - \frac{t}{110-80}\right)\left(\frac{t}{110-85}\right)\left(\frac{1}{30-t}\right)dt \\
&= \int_0^5 \frac{t}{750}dt \\
&= \frac{25}{1500} \\
&= \frac{1}{60}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H = {}_{5|5}q_{80:85} &= {}_5p_{80:85} - {}_{10}p_{80:85} \\
&= {}_5p_{80}\ \ {}_5p_{85} - {}_{10}p_{80}\ \ {}_{10}p_{85} \\
&= \left(1 - \frac{5}{110-80}\right)\left(1 - \frac{5}{110-85}\right) - \left(1 - \frac{10}{110-80}\right)\left(1 - \frac{10}{110-85}\right) \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian kita peroleh G+H $= \frac{1}{60} + \frac{4}{15} = \frac{17}{60} = 0,28333 \approx 0,28$

Jawab: B.

Gunakan informasi berikut untuk soal nomor 12-14

Untuk suatu asuransi spesial ”*20-year term*” pada (40) dan (50), diketahui sebagai berikut:

(i) Kematian berdistribusi ”*uniform*” dengan $\omega = 100$

(ii) (40) dan (50) adalah ”*independent*”

12. Hitunglah peluang paling sedikit satu dari (40) dan (50) akan meninggal dalam kurun waktu 10 tahun:

    A. 1/30

    B. 3/10

    C. 1/3

    D. 2/3

    E. 7/10

    Pembahasan:
    Untuk kematian yang berdistribusi seragam, peluang (x) akan tetap hidup hingga t tahun kemudian diberikan oleh:

    $$ {}_tp_x = 1 - \frac{t}{\omega - x} $$

    dengan demikian diperoleh:

    $$ {}_{10}p_{40} = 1 - \frac{10}{60} = \frac{5}{6} $$

    dan

    $$ {}_{10}p_{50} = 1 - \frac{10}{50} = \frac{4}{5} $$

    peluang dari kedua orang (40) dan (50) akan hidup dalam kurun waktu 10 tahun adalah

    $$ \begin{aligned} {}_{10}p_{40:50} &= {}_{10}p_{40} \;\; {}_{10}p_{50} \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \end{aligned} $$

    peluang paling sedikit satu dari (40) dan (50) akan meninggal dalam kurun waktu 10 tahun adalah

    $$ \begin{aligned} {}_{10}p_{40:50} &= 1 - {}_{10}p_{40:50} \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} $$

    Jawab: C.

13. Hitunglah peluang dari (40) meninggal sebelum usia 50 tetapi setelah (50) meninggal:

    A. 1/60

B. 1/30

C. 1/20

D. 3/20

E. 11/60

Pembahasan:
Peluang dari (40) meninggal sebelum usia 50 tetapi setelah (50) meninggal adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{10}q^{2}_{40:50} &= \int_0^{10} {}_tp_{40}(1 - {}_tp_{50})\mu_{40+t}dt \\
&= \int_0^{10} \left(1 - \frac{t}{60}\right)\left(\frac{t}{50}\right)\left(\frac{1}{60-t}\right)dt \\
&= \int_0^{10} \left(\frac{60-t}{60}\right)\left(\frac{t}{50}\right)\left(\frac{1}{60-t}\right)dt \\
&= \int_0^{10} \left(\frac{t}{3000}\right)dt \\
&= \frac{100}{6000} \\
&= \frac{1}{60}
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

14. Hitunglah peluang dimana kematian kedua terjadi antara t = 10 dan t = 20 A. 1/10 B. 1/5

Pembahasan:
Peluang dimana kematian kedua terjadi antara $t = 10$ dan $t = 20$ adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{10|10}q_{\overline{40:50}} &= {}_{20}q_{\overline{40:50}} - {}_{10}q_{\overline{40:50}} \\
&= {}_{20}q_{40}\ \ {}_{20}q_{50} - {}_{10}q_{40}\ \ {}_{10}q_{50} \\
&= \left(\frac{20}{60}\right)\left(\frac{20}{50}\right) - \left(\frac{10}{60}\right)\left(\frac{10}{50}\right) \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

15. Untuk ”*two lives*” (50) dan (60) dengan ”*independent future lifetimes*”:

   (i) $\mu_{50+t} = 0,002t, \quad t > 0$

(ii) $\mu_{60+t} = 0,003t, \quad t > 0$

Hitunglah ${}_{20}q^{1}_{50:60} - {}_{20}q_{50:\overset{2}{60}}$

A. 0,17

B. 0,18

C. 0,30

D. 0,31

E. 0,37

Pembahasan:

Dari informasi tersebut diperoleh pdf dari T_{50} dan T_{60} masing-masing adalah

$$\begin{aligned} f_{T_{50}}(t) &= e^{-\int_0^t \mu_{50+s} ds} \mu_{50+t} \\ &= e^{-\int_0^t 0,002s ds} 0,002t \\ &= e^{-0,001t^2} 0,002t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{T_{60}}(t) &= e^{-\int_0^t \mu_{60+s} ds} \mu_{60+t} \\ &= e^{-\int_0^t 0,003s ds} 0,003t \\ &= e^{-0,0015t^2} 0,003t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{20}q^{1}_{50:60} &= P(T_{50} \leq 20 \text{ dan } T_{50} < T_{60}) \\ &= \int_0^{20} \int_t^{\infty} f_{T_{60},T_{50}}(s,t) ds dt \\ &= \int_0^{20} \int_t^{\infty} f_{T_{60}}(s) f_{T_{50}}(t) ds dt \\ &= \int_0^{20} \int_t^{\infty} e^{-0,0015s^2}(0,003s) e^{-0,001t^2}(0,002t) ds dt \\ &= \int_0^{20} (0,002t) e^{-0,001t^2} \int_t^{\infty} (0,003s) e^{-0,0015s^2} ds dt \\ &= \int_0^{20} 0.002t e^{-0,001t^2} e^{-0,0015t^2} dt \\ &= \int_0^{20} 0.002t e^{-0,0025t^2} dt \\ &= 0,2528482235 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_{20}q^{\;\;2}_{50:60} &= P(T_{60} \leq 20 \text{ dan } T_{60} > T_{50}) \\
&= \int_0^{20}\int_0^t f_{T_{50},T_{60}}(s,t)dsdt \\
&= \int_0^{20}\int_0^t f_{T_{50}}(s)f_{T_{60}}(t)dsdt \\
&= \int_0^{20}\int_0^t e^{-0{,}001s^2}(0{,}002s)e^{-0{,}0015t^2}(0{,}003t)dsdt \\
&= \int_0^{20}(0{,}003t)e^{-0{,}0015t^2}\int_0^t(0{,}002s)e^{-0{,}001s^2}dsdt \\
&= \int_0^{20}(0{,}003t)e^{-0{,}0015t^2}(1-e^{-0{,}001t^2})dt \\
&= \int_0^{20}(0{,}003)te^{-0{,}0015t^2}dt - \int_0^{20}(0{,}003t)e^{-0{,}0025t^2}dt \\
&= 0{,}451188364 - 0{,}3792723353 \\
&= 0{,}0719165011
\end{aligned}$$

Jadi,

$$ {}_{20}q^{\;\;1}_{50:60} - {}_{20}q^{\;\;2}_{50:60} = 0{,}1809317224 \approx 0{,}18 $$

Jawab: B.

16. Untuk suatu asuransi "*spesial fully discrete whole life*" pada (40) diberikan:
    (i) "*annual net premium*" pada 20 tahun pertama adalah $1000P_{40}$
    (ii) "*annual net premium*" berubah pada usia 60
    (iii) Manfaat kematian adalah 1000 pada 20 tahun pertama, setelah itu menjadi 2000
    (iv) $\ddot{a}_{60} = 11{,}1454 \quad \ddot{a}_{40} = 14{,}8166 \quad A_{60} = 0{,}36913 \quad q_{60} = 0{,}01376$
    (v) $i = 0{,}06$

    Hitunglah ${}_{21}V$, "*net premium reserve*" pada akhir tahun 21.

    A. 282 B. 286 C. 292 D. 296 E. 300

Pembahasan:

Karena pada kasus ini ("*special fully discrete whole life*") premi dan benefitnya sama untuk sebuah kontrak asuransi pada seseorang yang berumur (40) tahun selama kurun waktu 20 tahun, maka ${}_{20}V$ harus sama seperti pada sebuah kontrak asuransi seumur hidup standard dengan benefit sebesar 1000 pada seseorang berumur (40). Jadi

$$ {}_{20}V_{40} = 1 - \frac{\ddot{a}_{60}}{\ddot{a}_{40}} = 1 - \frac{11{,}1454}{14{,}8166} = 0{,}247776 $$

Kemudian berdasarkan prinsip ekivalensi, besar cadangan (reserve) ini ditambahkan dengan "*future net premium*" haruslah sama dengan "*future benefit*". Misalkan P adalah premi asuransi untuk seseorang yang berusia lebih dari 60 tahun, maka

$$\begin{aligned}
2000A_{60} &= 247,776 + P\ddot{a}_{60} \\
2000(0,36913) &= 247,776 + P(11,1454) \\
P &= \frac{2000(0,36913) - 247,776}{11,1454} = 44,0077
\end{aligned}$$

Berikutnya kita akan menghitung ${}_{21}V$ dengan rumus rekursif

$$\begin{aligned}
{}_{21}V &= \frac{({}_{20}V + P)(1+i) - 2000q_{60}}{1 - q_{60}} \\
&= \frac{(247,776 + 44,0077)(1,06) - 2000(0,01376)}{1 - 0,01376} \\
&= 285,70 \\
&\approx 286
\end{aligned}$$

Jadi ${}_{21}V = 286$
Jawab: B

17. Anda diberikan sebagai berikut:

(i) Rate Kematian untuk (x) dan manfaat asuransi dibayarkan setiap tahun mengikuti tabel berikut:

t	q_{x+t-1}	b_t
1	0,01	10
2	0,03	10
3	0,05	20

(ii) $i = 0,05$

(iii) Z adalah "*present value*" dari variabel acak untuk 3 tahun asuransi "*term life*" pada (x) dengan manfaat pada tabel diatas dibayarkan pada akhir tahun kematian

Hitunglah $Var(Z)$

A. 16.26 B. 16,47 C. 16,78 D. 18,30 E. 18,81

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=0}^{2} b_{t+1} v^{k+1}{}_{k|}q_x \\
&= 10\left(\frac{1}{1,05}\right)0,01 + 10\left(\frac{1}{1,05}\right)^2 0,99\times 0,03 + 20\left(\frac{1}{1,05}\right)^3 0,99\times 0,97\times 0,05 \\
&= 1,1941691
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
E(Z^2) &= \sum_{k=0}^{2} \left(b_{t+1} v^{k+1}\right)^2 {}_{k|}q_x \\
&= 10^2\left(\frac{1}{1,05}\right)^2 0,01 + 10^2\left(\frac{1}{1,05}\right)^4 0,99\times 0,03 + 20^2\left(\frac{1}{1,05}\right)^6 0,99\times 0,97\times 0,05 \\
&= 17,68226874
\end{aligned}$$

Jadi

$$Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = 16,2563 \approx 16,26$$

Jawab: A.

18. Sebuah asuransi "*3-year term life*" pada (x) membayarkan 5000 pada akhir tahun kematian. Diberikan sebagai berikut:

    (i) "*Spot rates*" untuk 1 tahun *zero-coupon bond* 0,05 dan 2 tahun *zero-coupon bond* 0,06

    (ii) $q_x = 0,01 \quad q_{x+1} = 0,015 \quad q_{x+2} = 0,02$

    (iii) Z adalah "*present-value*" variabel acak untuk asuransi

    (iv) $E[Z] = 194,89$

    Hitunglah "2-*year forward rate*" untuk "1-*year bond*"

    A. 0,063

    B. 0,066

    C. 0,069

    D. 0,072

    E. 0,075

Pembahasan:

Diberikan $y_1 = 0,05$ dan $y_2 = 0,06$

$$1 + f(1,2) = \frac{(1+y_2)^2}{(1+y_1)} = \frac{(1,06)^2}{(1,05)} = 1,07009524$$

$$
\begin{aligned}
E[Z] &= (v_1 q_x + v_1 v_2\ {}_{1|}q_x + v_1 v_2 v_3\ {}_{2|}q_x) \times 5000 \\
194,89 &= 5000\left(\frac{0,01}{1,05} + \frac{(0,99)(0,015)}{(1,05)(1,07009524)} + \frac{(0,99)(0,985)(0,02)}{(1,05)(1,07009524)(1+f(2,3))}\right) \\
194,89 &= 47,61904762 + 66,08223555 + \frac{86,78800269}{(1+f(2,3))} \\
81,18871683 &= \frac{86,78800269}{(1+f(2,3))} \\
f(2,3) &= \frac{86,78800269}{81,18871683} - 1 \\
&= 0,06897 \\
&\approx 0,069
\end{aligned}
$$

Jawab: C.

Informasi untuk nomor 19 sampai 21

Suatu unit *"continuously-operating air conditioning"* mempunyai *"exponential lifetime distribution"* dengan nilai rata-rata 4 tahun. Ketika unit rusak, harus diganti dengan biaya 1.000, yang dianggap sebagai satu unit uang. Misalkan $\bar{Z}$ adalah nilai sekarang dari variabel acak untuk pembayaran unit saat waktu gagal. Gunakan *"effective annual interest rate"* dari 5%.

19. Hitunglah $E[\bar{Z}]$ (pembulatan terdekat)

    A. 0,35

    B. 0,47

    C. 0,53

    D. 0,62

    E. 0,84

Pembahasan:

Dalam hal ini biaya 1000 dianggap sebagai satu unit pembayaran, sehingga $\overline{Z}$ adalah *present value* per unit pembayaran bila terjadi *fail*, atau pembayaran dalam ribuan, sehingga variabel acaknya adalah $\overline{Z} = e^{-\delta T}$, dengan T menunjukkan unit waktu (dalam tahun) sampai terjadi *fail*. Karena T berdistribusi eksponensial maka pdf dari T adalah

$$f_T(t) = \mu e^{-\mu t}. \tag{4.1}$$

Nilai dari μ diperoleh dari informasi tentang mean dari T. Diketahui bahwa mean dari variabel acak berdistribusi eksponensial dengan pdf (5.1) adalah $\frac{1}{\mu}$ dan diketahui mean dari T adalah

4 tahun maka $\mu = \frac{1}{4} = 0,25$. Nilai harapan dari $\overline{Z}$ adalah

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{Z}) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{0,25}{0,25 + \log(1,05)} = 0,8367076.\end{aligned}$$

Jawab: E.

20. Hitunglah $Var[\bar{Z}]$ (pembulatan terdekat)
    - A. 0,010
    - B. 0,012
    - C. 0,014
    - D. 0,016
    - E. 0,019

    Pembahasan:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{Z}^2) &= \int_0^\infty (e^{-\delta t})^2 e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = 0,7192581962\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\overline{Z}) &= \mathbb{E}(\overline{Z}^2) - (\mathbb{E}(\overline{Z}))^2 \\ &= 0,7192581962 - 0,8367076^2 = 0,01917859484\end{aligned}$$

Jawab: E.

21. Hitunglah ”90 *th percentile*” dari distribusi $\bar{Z}$ (pembulatan terdekat)
    - A. 0,45
    - B. 0,56
    - C. 0,67
    - D. 0,79
    - E. 0,98

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(e^{-\delta T_x} \leq z) &= 0,90 \\
\mathbb{P}\Big(T_x \geq \frac{\log(z)}{-\delta}\Big) &= 0,90 \\
\int_{\frac{\log(z)}{-\delta}}^{\infty} e^{-\mu t}\mu dt &= 0.90 \\
\frac{\mu \log(z)}{\delta} &= \log 0.90 \\
z = e^{\frac{\delta \log 0,90}{\mu}} &= 0,9796477336
\end{aligned}$$

Jawab: E.

22. Diberikan bahwa kematian mengikuti $l_x = 100 - x, \quad 0 \leq x \leq 100$
    Hitunglah $e_{85,2}$
    A. 6,890
    B. 6,895
    C. 6,900
    D. 6,905
    E. 6,910

    Pembahasan:

$$\begin{aligned}
e_{85,2} &= \sum_{k=1}^{14} {}_k p_{85,2} \\
&= \sum_{k=1}^{14} \frac{14,8-k}{14,8} \\
&= 14 - \frac{(14)(15)/2}{14,8} \\
&= 6,90541 \\
&\approx 6,905
\end{aligned}$$

Jawab: D

23. Untuk *”two lives”* (x) dan (y) dengan *”independent future lifetimes”*:

    (i) $\mu_x = \dfrac{2}{100-x}, \quad x < 100$

(ii) $\mu_x = \dfrac{3}{100-y}, \quad y < 100$

Hitunglah ${}_{20}q_{xy}^{2}$ untuk $x = 60$, $y = 60$

A. 47/160 B. 3/8 C. 13/40 D. 31/80 E. 2/5

Pembahasan:

(x) dan (y) saling independen dan memiliki peluang hidup hingga t tahun kemudian masing-masing adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \left(1 - \frac{t}{100-x}\right)^2 \\
{}_tp_y &= \left(1 - \frac{t}{100-y}\right)^3
\end{aligned}
$$

untuk $(x) = 60$, kita peroleh:

$$
{}_tp_{60} = \left(1 - \frac{t}{40}\right)^2
$$

sedangkan untuk $(y) = 60$, kita peroleh:

$$
{}_tp_{60} = \left(1 - \frac{t}{40}\right)^3
$$

Dengan demikian nilai dari ${}_{20}q_{xy}^{2}$ untuk $(x) = 60$ dan $(y) = 60$ adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_{20}q_{xy}^{\;2} &= \int_0^{20} {}_tp_y(1-{}_tp_x)\mu_{y+t}dt \\
&= \int_0^{20} \left(1-\frac{t}{40}\right)^3 \left(1-\left(1-\frac{t}{40}\right)^2\right)\frac{3}{40-t}dt \\
&= \int_0^{20} \frac{3(40-t)^2}{40^3}\left(1-\left(\frac{40-t}{40}\right)^2\right)dt \\
&= \int_0^{20} \frac{3}{40^5}(40-t)^2(40^2-(40-t)^2)dt \\
&= \int_0^{20} \frac{3}{40^5}(40-t)^2(80t-t^2)dt \\
&= \int_0^{20} \frac{3}{40^5}(1600-80t+t^2)(80t-t^2)dt \\
&= \frac{3}{40^5}\int_0^{20} 128000t-8000t^2+160t^3-t^4dt \\
&= \frac{3}{40^5}(64000(20)^2-\frac{8000}{3}(20)^3+40(20)^4-\frac{1}{5}(20)^5) \\
&= \frac{47}{160}
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

24. Untuk suatu asuransi *"quarterly premium whole life"* dengan manfaat 1000 pada (50),

 (i) *"annual net premium"* adalah 24,40

 (ii) Manfaat kematian dibayarkan pada akhir tahun kematian

 (iii) $q_{60} = 0,02$

 (iv) *"force of mortality"* adalah konstan antara usia 60 dan 61

 (v) $i = 0,1$

 (vi) ${}_{10}V = 205,11$

 Hitunglah *"net premium reserve"* di saat $t = 10,4$

 A. 218,84 B. 219,74 C. 222,38 D. 227,26 E. 232,70

Pembahasan:

Pada kasus ini kita akan menggunakan rumus rekursif. Dua "*quartely premium whole life*" yang masing-masing besarnya adalah 6,10 dibayarkan pada rentang waktu $[10, \quad 10,4)$. Karena diketahui bahwa "*force of mortality*" adalah konstan, maka "*rate of mortality*" untuk semua periode sebesar s selama tahun tersebut adalah $1 - 0,98^s$.

Dengan demikian

$$
\begin{aligned}
{}_{10,4}V &= \frac{({}_{10}V+\frac{P}{4})(1,1^{0,4})+(0,98^{0,25})(\frac{P}{4})(1,1^{0,15})-1000(1-0,98^{0,4})(1,1^{-0,6})}{0,98^{0,4}} \\
&= \frac{(205,11+6,10)(1,1^{0,4})+(0,98^{0,25})(6,10)(1,1^{0,15})-7,60117}{0,98^{0,4}} \\
&= 219,74
\end{aligned}
$$

Jadi "*net premium reserve*" di saat $t = 10,4$ adalah 219,74
Jawab: B

25. Untuk suatu portofolio dari asuransi dengan manfaat 100 *"fully discrete whole life"* untuk individu usia (35):

    (i) 50 polis memiliki *"face amount"* 5.000 dan 50 polis memiliki *"face amount"* 10.000

    (ii) $A_{35} = 0,175$

    (iii) ${}^2A_{35} = 0,060$

    (iv) $d = 0,04$

    Dengan menggunakan pendekatan normal, hitunglah premi per 1.000 untuk peluang dari *"positive future net loss"* adalah 5%

    A. 10,30 B. 10,60 C. 10,68 D. 10,75 E. 10,88

    Pembahasan:
    Dalam bentuk P, premi per 1000, "expected future loss" tiap individu adalah

$$
\begin{aligned}
A_{35} - 0,001P\ddot{a}_{35} &= A_{35}\left(1+\frac{0,001P}{d}\right) - \frac{0,001P}{d} \\
&= 0,175(1+0,025P) - 0,025P \\
&= 0,175 - 0,020625P
\end{aligned}
$$

karena $\frac{1}{d} = 25$. Untuk portofolio dari asuransi, kalikan nilai tersebut dengan $50(5000) + 50(10.000) = 750.000$ untuk medapatkan

$$
\mathbb{E}[{}_oL^{portofolio}] = 131.250 - 15.468,75P
$$

Variansi dari "*future loss*" per 1000 adalah

$$
\begin{aligned}
\left({}^2A_{35} - A_{35}^2\right)\left(1000+\frac{P}{d}\right)^2 &= (0,060-0,175^2)(1000+25P)^2 \\
&= 0,029375(1000+25P)^2
\end{aligned}
$$

Karena nilai tersebut adalah variansi per 1000, bukan variansi per unit/individu, maka untuk portofolio asuransi kalikan nilai tersebut dengan 5^2 untuk polis dengan "*face amount*" 5000 dan kalikan dengan 10^2 untuk polis dengan "*face amount*" 10.000, kemudian jumlahkan. Dengan kata lain, kalikan nilai tersebut dengan 50(25)+50(100)=6250, sehingga kita peroleh

$$Var({}_oL^{portofolio}) = 183,59375(1000+25P)^2$$

Presentil ke-95 dari "*future net loss*" kita atur agar sama dengan 0 sehingga peluang kerugian yang lebih besar dari 0 adalah 5%. Dengan kata lain

$$131.250 - 15.468,75P + 1,645\sqrt{183,59375(1000+25P)^2} = 0$$
$$131.250 - 15.468,75P + 1.645\sqrt{183,59375} + 41,125\sqrt{183,59375}P = 0$$

$$153.539 - 14.912P = 0$$
$$P = \frac{153.539}{14.912} = 10,30$$

Jadi premi per 1000 untuk peluang dari "positive future net loss" adalah 5% $= 10,30$
Jawab: A

26. Diberikan suatu "*survival function*"

$$S_0(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

Hitunglah ${}_{5|10}q_{15}$

A. 0,06

B. 0,08

C. 0,10

D. 0,12

E. 0,14

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x = S_x(t) &= \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{1+\sqrt{x+t}}}{\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}} \\
&= \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x+t}}
\end{aligned}
$$

Nilai dari ${}_5p_{15}$ dan ${}_{15}p_{15}$ masing-masing adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_5p_{15} &= S_{15}(5) = \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{20}} \\
{}_{15}p_{15} &= S_{15}(15) = \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{30}}
\end{aligned}
$$

Dengan demikian kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
{}_{5|10}q_{15} &= {}_5p_{15} - {}_{15}p_{15} \\
&= \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{20}} - \frac{1+\sqrt{15}}{1+\sqrt{30}} \\
&= 0,1381827 \\
&\approx 0,14
\end{aligned}
$$

Jawab: E.

27. Untuk suatu asuransi *"fully discrete whole life"* dengan manfaat 1.000 pada (45), diberikan sebagai berikut:

    (i) Kematian mengikuti $l_x = 10(110 - x), \quad 0 \leq x \leq 110$

    (ii) $i = 0,06$

    Pada akhir tahun ke 20, nasabah menginginkan perubahan premi sehingga polis akan *"paid up"* dengan tambahan 10 tahun. Perusahaan asuransi tidak menambahkan biaya untuk perubahan ini, dan menggunakan *"equivalence principle"* untuk menghitung *"new net premium"*

    Hitunglah *"new net premium"* tersebut

    A. 21,95

B. 24,65

C. 27,22

D. 30,90

E. 33,27

Pembahasan:

$$A_{45} = \frac{1 - \frac{1}{(1,06)^{65}}}{(0,06)(65)} = 0,250602$$
$$A_{65} = \frac{1 - \frac{1}{(1,06)^{45}}}{(0,06)(45)} = 0,343463$$

"*Net premium reserve*" pada akhir tahun ke-20 adalah

$${}_{20}V = 1000\left(\frac{0,343463 - 0,250602}{1 - 0,250602}\right) = 123,91$$

Berdasarkan prinsip ekivalensi dengan menggunakan premi asuransi yang baru ("*new net premium*") yang dinotasikan dengan P, kita peroleh

$$123,91 + P\ddot{a}_{65:\overline{10}|} = 1000A_{65}$$

dimana

$$A_{65:\overline{10}|} = \frac{1 - \frac{1}{(1,06)^{10}}}{(0,06)(45)} + \frac{35}{45}\frac{1}{(1,06)^{10}} = 0,597865$$
$$\ddot{a}_{65:\overline{10}|} = \frac{1 - A_{65:\overline{10}|}}{d} = \frac{1 - 0,597865}{\frac{0,06}{1,06}} = 7,104393$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$123,91 + 7,104393P = 343,463$$
$$P = \frac{343,463 - 123,91}{7,104393} = 30,90$$

Jadi "*new net premium*" adalah 30,90

Jawab: D

28. Untuk *"cohort"* dari 1000 jiwa usia 50, peluang hidup adalah

$${}_tp_{50} = \frac{20 - \sqrt{t}}{20} \quad t < 400$$

Dengan pendekatan *"normal"*, hitunglah 95 *percentile* dari *"number of lives"* untuk *cohort* ini yang akan hidup 30 tahun.

A. 744

B. 749

C. 755

D. 764

E. 771

Pembahasan:
Peluang seseorang berumur 50 yang akan hidup hingga 30 tahun mendatang adalah:

$$ {}_{30}p_{50} = \frac{20 - \sqrt{30}}{20} $$

Jumlah kematian (D) untuk *"cohort"* dari 1000 jiwa usia 50 yang akan meninggal dalam kurun waktu 30 tahun mendatang mengikuti distribusi binomial dengan parameter $n = 1000$ dan $p = {}_{30}p_{50} = \frac{20-\sqrt{30}}{20}$.
Dengan demikian nilai ekspetasi dan varians dari jumlah kematian untuk kelompok ini adalah :

$$ E[D] = 1000_{30}p_{50} = 1000\left(\frac{20-\sqrt{30}}{20}\right) = 726,1387212 $$

$$ Var[D] = 1000_{30}p_{50}(1 - {}_{30}p_{50}) = 1000\left(\frac{20-\sqrt{30}}{20}\right)\left(\frac{\sqrt{30}}{20}\right) = 198,8613 $$

Dengan pendekatan distribusi normal, 95 precentile dari *"number of lifes"* untuk *"cohort"* yang akan hidup 30 tahun memenuhi persamaan berikut:

$$ P\left(\frac{D - E[D]}{\sqrt{Var[D]}} < k\right) = 0,95 $$

dengan $k = 1,645$ (tabel distribusi normal standart).
Dengan demikian kita peroleh:

$$ \frac{D - E[D]}{\sqrt{Var[D]}} = \frac{D - 726,1387212}{\sqrt{198,8613}} = 1,645 $$

$$ D = 749,3362 \approx 749 $$

Jawab: B

29. Untuk suatu model *"2-year selection and ultimate mortality"*, diberikan:
    (i) $q_{[x]+1} = 0,95 q_{x+1}$
    (ii) $l_{76} = 98.153$
    (iii) $l_{77} = 96.124$

    Hitunglah $l_{[75]+1}$

    A. 96.150
    B. 96.780
    C. 97.420
    D. 98.050
    E. 98.690

    Pembahasan:

$$q_{[x]+1} = \frac{l_{[75]+1} - l_{77}}{l_{[75]+1}}$$
$$q_{75+1} = q_{76} = \frac{l_{76} - l_{77}}{l_{76}}$$

Diketahui bahwa $q_{[x]+1} = 0,95 q_{x+1}$. Dengan demikian kita peroleh:

$$q_{[75]+1} = 0,95 \ q_{76}$$
$$\frac{l_{[75]+1} - l_{77}}{l_{[75]+1}} = 0,95 \left(\frac{l_{76} - l_{77}}{l_{76}} \right)$$
$$\frac{l_{[75]+1} - 96.124}{l_{[75]+1}} = 0,95 \left(\frac{98.153 - 96.124}{98.153} \right)$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita dapatkan:

$$l_{[75]+1} = 98.049,518 \approx 98.050$$

Jawab: D.

30. Untuk suatu asuransi *"fully discrete 10-pay 20 year term life"* dengan manfaat 1 pada (40)

diberikan:

$$\begin{aligned} A_{40} &= 0,22 & {}_5E_{40} &= 0,8 \\ A_{45} &= 0,24 & {}_{10}E_{40} &= 0,64 \\ A_{50} &= 0,26 & {}_{20}E_{40} &= 0,4 \\ A_{60} &= 0,30 & d &= 0,04 \end{aligned}$$

Hitunglah "*net premium reserve*" pada akhir tahun ke 5

A. 0,008

B. 0,014

C. 0,028

D. 0,035

E. 0,042

Pembahasan:

Diberikan $d = 0,04$, dengan demikian kita peroleh $v = 1 - d = 0,96$. Pertama, kita akan menghitung nilai dari $\frac{l_{50}}{l_{45}}$ dan $\frac{l_{60}}{l_{45}}$ terlebih dahulu.

$${}_5E_{40} = v^5 \ {}_5p_{40} = v^5 \ \frac{l_{45}}{l_{40}} = (0,96)^5 \frac{l_{45}}{l_{40}} = 0,8$$

kita peroleh $l_{40} = \frac{(0,96)^5}{0,8} \ l_{45}$

$${}_{10}E_{40} = v^{10} \ {}_{10}p_{40} = v^{10} \ \frac{l_{50}}{l_{40}} = (0,96)^{10} \frac{l_{50}}{l_{40}} = 0,64$$

kita peroleh $l_{40} = \frac{(0,96)^{10}}{0,64} \ l_{50}$

$${}_{20}E_{40} = v^{20} \ {}_{20}p_{40} = v^{20} \ \frac{l_{60}}{l_{40}} = 0,4$$

kita peroleh $l_{40} = \frac{(0,96)^{20}}{0,4} \ l_{60}$

Dari ketiga persamaan, kita bisa mendapatkan nilai dari $\frac{l_{50}}{l_{45}}$ dan $\frac{l_{60}}{l_{45}}$, yaitu

$$\frac{l_{50}}{l_{45}} = (0,96)^{-5}(0,8) \text{ dan } \frac{l_{60}}{l_{45}} = (0,96)^{-15}(0,5)$$

Selanjutnya, kita akan menghitung nilai dari "*net premium*" dengan menggunakan prinsip ekuivalensi, yaitu

$$A^{1}_{40:\overline{20|}} = P \ \ddot{a}_{40:\overline{10|}}$$

dimana

$$\begin{aligned}
A^{1}_{40:\overline{20|}} &= A_{40} - {}_{20}E_{40} \ A_{60} = 0,22 - (0,4)(0,3) = 0,1 \\
A_{40:\overline{10|}} &= A_{40} - {}_{10}E_{40}A_{50} + {}_{10}E_{40} = 0,22 - (0,64)(0,26) + 0,64 = 0,6936 \\
\ddot{a}_{40:\overline{10|}} &= \frac{1 - A_{40:\overline{10|}}}{d} = \frac{1 - 0,6936}{0,04} = 7,66
\end{aligned}$$

Jadi $P = \dfrac{A^{1}_{40:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{40:\overline{10|}}} = \dfrac{0,1}{7,66} = \dfrac{5}{383}$

Berikutnya kita akan menghitung "*net premium reserve*" pada akhir tahun kelima yaitu

$${}_5V = A^{1}_{45:\overline{15|}} - P \ \ddot{a}_{45:\overline{5|}}$$

dimana

$$\begin{aligned}
A^{1}_{45:\overline{15|}} &= A_{45} - v^{15}\frac{l_{60}}{l_{45}}A_{60} = 0,24 - \frac{(0,96)^{15}}{(0,96)^{15}}(0,5)(0,3) = 0,09 \\
A_{45:\overline{5|}} &= A_{45} - v^{5}\frac{l_{50}}{l_{45}}A_{50} + v^{5}\frac{l_{50}}{l_{45}} = 0,24 - \frac{(0,96)^{5}}{(0,96)^{5}}(0,8)(0,26) + \frac{(0,96)^{5}}{(0,96)^{5}}(0,8) \\
&= 0,832 \\
\ddot{a}_{45:\overline{5|}} &= \frac{1 - A_{45:\overline{5|}}}{d} = \frac{1 - 0,832}{0,04} = 4,2
\end{aligned}$$

Jadi kita dapatkan ${}_5V = 0,09 - \dfrac{5}{383}(4,2) = 0,03517 \approx 0,035$

Jawab: D.

5 Periode Juni 2016

1. Jonny melakukan atraksi melompat sepeda motor sepanjang tahun dan memiliki kemungkinan cedera saat melakukan atraksi tersebut berdasarkan 3 tahapan berikut:

   - Tahap 1: tidak terjadi cedera
   - Tahap 2: tepat satu cedera
   - Tahap 3: Paling sedikit dua cedera

   Diberikan sebagai berikut:

   (i) Intensitas transisi antara per tahapan adalah per tahun

   (ii) $\mu_t^{01} = 0,03 + 0,06(2^t), \qquad t > 0$

   (iii) $\mu_t^{02} = 2,718\mu_t^{01}, \qquad t > 0$

   (iv) $\mu_t^{12} = 0,025, \qquad t > 0$

   Hitunglah peluang dimana Jonny, saat sekarang tidak terjadi cedera, akan bertahan paling sedikit satu cedera dalam tahun berikutnya.

   A. 0,35

   B. 0,39

   C. 0,43

   D. 0,47

   E. 0,51

   Pembahasan: Peluang Jonny tidak mengalami cedera dalam tahun berikutnya adalah:

   $${}_1p_x^{\overline{00}} = e^{-\int_0^1 (\mu_t^{01} + \mu_t^{02}) dt}$$

   dimana $\mu_t^{01} + \mu_t^{02} = 3,718\mu_t^{01}$. Sehingga diperoleh:

   $$\begin{aligned} \int_0^1 3,718\mu_t^{01} dt &= \int_0^1 3,718 \left(0,03 + 0,06 \left(2^t\right)\right) dt = 3,718 \left(0,03 + \frac{0,06}{\ln 2}\right) \\ &= 0,4334 \end{aligned}$$

   maka

   $${}_1p_x^{\overline{00}} = e^{-0,4334} = 0,6483$$

Peluang Jonny sedikitnya memiliki satu cedera dalam tahun berikutnya adalah: $1 - 0,6483 = 0,3517$.

Jawab: A.

2. Untuk suatu model "2-year selection and ultimate mortality", diberikan

   (i) $q_{[x]+1} = 0,95 q_{x+1}$

   (ii) $\ell_{76} = 98.153$

   (iii) $\ell_{77} = 96.124$

   Hitunglah $\ell_{[75]+1}$ (pembulatan terdekat)

   A. 96.150

   B. 96.780

   C. 97.420

   D. 98.050

   E. 98.690

   Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{\ell_{77}}{\ell_{[75]+1}} &= q_{[75]+1} = 0,95 q_{76} \\
1 - \frac{96.124}{\ell_{[75]+1}} &= 0,95 \times \left(\frac{98.153 - 96.124}{98.153} \right) \\
\ell_{[75]+1} &= 98,090.9936
\end{aligned}
$$

   Jawab: D.

3. Untuk suatu "fully discrete whole life insurance policy" (30) dengan manfaat kematian sebesar 150.000 diberikan sebagai berikut:

   (i) Cadangan saat akhir tahun 20 dan 21 adalah 24.496 dan 26.261 secara berturut-turut

   (ii) Premi gross adalah 1.212

   (iii) Biaya yang diestimasikan sama dengan 60 + W% dari premi bruto dibayarkan tiap awal tahun

   (iv) $q_{50} = 0,004736$

   (v) Suku bunga yang dipakai adalah 8%

   (vi) Profit pada saat awal tahun polis ke 21 adalah 722

   Hitunglah W%

A. 8%

B. 9%

C. 10%

D. 11%

E. 12%

Pembahasan: Profit pada saat akhir tahun polis ke 20 sama dengan profit pada saat awal tahun polis ke 21, yaitu:

$$\begin{aligned}722 &= \left({}_{20}V + P^G - (W \times P^G + 60)\right)(1+i) - q_{50}(150.000) - p_{50}({}_{21}V) \\ &= (24.496 + 1.212 - (W \times 1.212 + 60))\,(1,08) - (0,004736)(150.000) \\ &- (1 - 0,004736)(26.261) \\ W &= 10\%\end{aligned}$$

Jawab: C.

4. Untuk suatu "fully discrete whole life insurance" dengan manfaat 100.000 untuk orang yang berusia (45), diberikan sebagai berikut:

   (i) Cadangan gross premi saat durasi 5 adalah 5.500 dan saat durasi 6 adalah 7.100

   (ii) $q_{50} = 0,009$

   (iii) $i = 0,05$

   (iv) "renewal expenses" saat awal setiap tahun adalah 50 plus 4% dari premi gross

   (v) "claim expenses" adalah 200

   Hitunglah premi bruto! (pembulatan terdekat)

   A. 2.200

   B. 2.250

   C. 2.300

   D. 2.350

   E. 2.400

   Pembahasan:

$$\begin{aligned}\left({}_{5}V + 0,96P^G - 50\right)(1+i) &= q_{50}(100.200) + p_{50}({}_{6}V) \\ (5.500 + 0,96P^G - 50)(1.05) &= (0,009)(100.200) + (1 - 0,009)(7.100) \\ P^G &= 2.197,8175\end{aligned}$$

Jawab: A.

5. Untuk suatu tabel kematian dengan faktor seleksi dua tahun, diberikan sebagai berikut:

   (i)

x	$q_{[x]}$	$q_{[x]+1}$	q_{x+2}	$x+2$
50	0,0050	0,0063	0,0080	52
51	0,0060	0,0073	0,0090	53
52	0,0070	0,0083	0,0100	54
53	0,0080	0,0093	0,0110	55

   (ii) "force of mortality" adalah konstan diantara "integral ages"

   Hitunglah ${}_{2,5}q_{[50]+0,4}$

   A. 15,2

   B. 16,4

   C. 17,7

   D. 19,0

   E. 20,2

   Pembahasan:

$$\begin{aligned}
{}_{2,5}q_{[50]+0,4} &= 1 - {}_{2,5}p_{[50]+0,4} = 1 - \frac{{}_{2,9}p_{[50]}}{{}_{0,4}p_{[50]}} \\
&= 1 - \frac{p_{[50]} \times p_{[50]+1} \times (p_{52})^{0,9}}{(p_{[50]})^{0,4}} \\
&= 1 - \frac{(1-q_{[50]}) \times (1-q_{[50]+1}) \times (1-q_{52})^{0,9}}{(1-q_{[50]})^{0,4}} \\
&= 1 - \frac{(1-0,0050) \times (1-0,0063) \times (1-0,0080)^{0,9}}{(1-0,0050)^{0,4}} \\
&= 0.0164 \\
1000{}_{2,5}q_{[50]+0,4} &= 16,4
\end{aligned}$$

   Jawab: B.

6. Untuk suatu "fully discrete 5-payment whole life insurance" untuk manfaat 1.000 pada (80), diberikan:

   (i) Premi bruto adalah 130

   (ii) $q_{80+k} = 0,01(k+1), \qquad k = 0,1,2,\ldots,5$

(iii) $v = 0,95$

(iv) $1000A_{86} = 683$

(v) ${}_3L$ adalah "prospective loss random variable" saat $t = 3$, berdasarkan premi bruto

Hitunglah $E[{}_3L]$ (pembulatan terdekat)

A. 330

B. 350

C. 360

D. 380

E. 390

Pembahasan:

$$E[{}_3L] = 1000A_{83} - P\ddot{a}_{83:\overline{3}|}, \qquad \text{karena hanya ada 5 pembayaran, maka}$$

$$\begin{aligned}
E[{}_3L] &= 1000(A^{1}_{83:\overline{3}|} + {}_3E_{83}A_{86}) - 130(1 + p_{83}v) \\
&= 1000\left[q_{83}v + p_{83}q_{84}v^2 + {}_2p_{83}q_{85}v^3 + v^3{}_3p_{83}A_{86}\right] - 130(1 + p_{83})v \\
&= 1000\left[0,04v + (0,96 \times 0,05)v^2 + 0,96 \times 0,95 \times (0,06 + 0,94 \times 0,683)v^3\right] \\
&\quad - 130(1 + 0,96)v \\
&= 630,2477 - 248,56 \\
&= 381,6877
\end{aligned}$$

Jawab: D.

7. Diberikan sebagai berikut:

(i) $q_x = 0,1$

(ii) "*Force of mortality*" adalah konstan antara *"integral ages"*

Hitunglah ${}_{1/2}q_{x+1/4}$ (pembulatan terdekat)

A. 0,051

B. 0,043

C. 0,032

D. 0,026

E. 0,012

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{4}} &= 1 - {}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{4}} \\ &= 1 - (p_x)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - 0,9^{\frac{1}{2}} = 0,0513. \end{aligned}$$

Jawab: A.

8. Untuk suatu "fully discrete 20-year endowment insurance" dengan manfaat 100.000 pada (30), diberikan sebagai berikut:
   (i) $d = 0,05$
   (ii) biaya, dibayarkan pada awal setiap tahun:

	Tahun Pertama		**Tahun Berikutnya**	
	Persen dari Premi bruto?	Per Polis	Persen dari Premi bruto?	Per Polis
Pajak	4%	0	4%	0
Komisi Agen	35%	0	2%	0
Biaya Maintenance	0%	250	0%	50

   (iii) Premi netto adalah 2.143

   Hitunglah premi bruto mengunakan prinsip "equivalence"

   A. 2.408
   B. 2.530
   C. 2.800
   D. 3.130
   E. 3.280

Pembahasan: Dari premi netto diperoleh:

$$P^N \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 100.000 A_{30:\overline{20}|} = 100.000(1 - d\ddot{a}_{30:\overline{20}|})$$

$$\Rightarrow \ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 13.9997$$

$$A_{30:\overline{20}|} = 1 - d\ddot{a}_{30:\overline{20}|} = 0,3$$

Misalkan P^G menyatakan premi bruto, maka menggunakan prinsip "equivalence":

$$
\begin{aligned}
P^G \ddot{a}_{30:\overline{20|}} &= 100.000 A_{30:\overline{20|}} + \left(200 + 50\ddot{a}_{30:\overline{20|}}\right) + \left(0,33P^G + 0,06P^G \ddot{a}_{30:\overline{20|}}\right) \\
13,9997P^G &= 30.901,3860 + 1,17P^G \\
P^G &= 2.408,5752
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

9. Sepasang suami-istri usia 55 dan 50, dengan *independent future lifetimes*, diberikan sebagai berikut:
   (i) *Force of mortality* pada usia 50 adalah $\mu_{50+t} = \dfrac{1}{50-t}$, untuk $0 \leqslant t < 50$
   (ii) *Force of mortality* pada usia 55 adalah $\mu_{55+t} = 0,04$, untuk $t > 0$
   (iii) Untuk *single* premi sebesar 60, sebuah perusahaan asuransi menerbitkan sebuah polis yang membayarkan manfaat sebesar 100 pada saat kematian pertama kali dari (55) dan (50)
   (iv) $\delta = 0,05$

   Hitunglah probabilitas dimana perusahaan asuransi tidak mengalami kerugian pada polis tersebut: (pembulatan terdekat)

   A. 0,45 B. 0,47 C. 0,49 D. 0,51 E. 0,53

Pembahasan: Dari informasi tersebut diperoleh

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{50} &= e^{-\int_0^t \mu_{50+s} ds} \\
&= e^{-\int_0^t \frac{1}{50-s} ds} \\
&= \left(\frac{50-t}{50}\right), \qquad 0 \le t \le 50 \\
{}_tp_{55} &= e^{-\int_0^t \mu_{55+s} ds} \\
&= e^{-\int_0^t 0,04 ds} \\
&= e^{-0,04t} \qquad t \ge 0.
\end{aligned}
$$

$T_{50:55} = \min(T_{50}, T_{55})$ menyatakan waktu hingga kematian pertama kali dari (55) dan (50), maka

$$\begin{aligned} {}_tp_{50:55} &= \mathbb{P}(T_{50:55} \geq t) \\ &= {}_tp_{50} \times {}_tp_{55} && \text{karena } \textit{independent,} \\ &= \left(\frac{50-t}{50}\right) e^{-0,04t}, && 0 \leq t \leq 50 \end{aligned}$$

Variabel random kerugian untuk model asuransi ini diberikan oleh

$$L = 100e^{-\delta T_{50:55}} - 60 = 100e^{-0,05T_{50:55}} - 60$$

Sehingga perusahaan asuransi mengalami kerugian (*positive loss*) jika

$$L > 0 \rightarrow e^{-0,05T_{50:55}} > 0,6 \rightarrow T_{50:55} < -20\ln(0,6).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L > 0) &= \mathbb{P}(T_{50:55} < -20\ln(0,6)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_{50:55} \geq -20\ln(0,6)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_{50:55} \geq 10,2165) \\ &= 1 - \left(\frac{50-(10,2165)}{50}\right) e^{-0,04(10,2165)} \\ &= 0,4712 \end{aligned}$$

Sehingga probabilitas dimana perusahaan asuransi tidak mengalami kerugian adalah $1 - \mathbb{P}(L > 0) = 0,53$.
Jawab: E.
Komentar: di kunci jawaban tertulis B, mungkin yang dimaksud oleh soal seharusnya adalah *positive loss*.

10. Diberikan sebagai berikut:
    (i) $Z(n)$ adalah "present value random variable for an n-year term insurance on a life age x" berdasarkan yield curve sekarang.
    (ii) $\mathbb{E}[Z(1)] = 0,014354$ dan $\mathbb{E}[Z(2)] = 0,032308$
    (iii) "current one-year spot rate" adalah 4,50%
    (iv) $q_{x+1} = 0,02$

    Hitunglah "current two-year spot rate" (pembulatan terdekat)

    A. 4,55%

B. 4,75%

C. 4,95%

D. 5,15%

E. 5,35%

Pembahasan: $\mathbb{E}[Z(1)] = q_x v_{4,5\%} = 0,014354 \rightarrow q_x = 0,015$
Sehingga

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(2)] &= q_x v_{4,5\%} + p_x(v_{4,5\%}v_j)q_{x+1} = 0,032308 \\
&\rightarrow 0,014354 + (1-0,015)(v_{4,5\%}v_j)(0,02) = 0,032308 \\
&\rightarrow v_{4,5\%}v_j = 0,9114 \\
\frac{1}{(1+i)^2} &= 0,9114, \qquad \text{dengan } i \text{ adalah "currrent two-year spot rate"} \\
\Longrightarrow i &= 4,75\%
\end{aligned}$$

Jawab: B.

11. Untuk (x) dan y dengan "independent future lifetimes" diberikan sebagai berikut:
    (i) $\bar{a}_x = 10,06$
    (ii) $\bar{a}_y = 11,95$
    (iii) $\bar{a}_{\overline{xy}} = 12,59$
    (iv) $\bar{A}_{xy}^{\;1} = 0,09$
    (v) $\delta = 0,07$

    Hitunglah $\bar{A}_{xy}^{1}$

    A. 0,15

    B. 0,20

    C. 0,25

    D. 0,30

    E. 0,35

    Pembahasan: Diketahui hubungan berikut

$$\bar{a}_{xy} + \bar{a}_{\overline{xy}} = \bar{a}_x + \bar{a}_y,$$

sehingga diperoleh

$$\bar{a}_{xy} = 10,06 + 11,95 - 12,59 = 9,42.$$

Informasi ini digunakan untuk menghitung asuransi *joint life* sebagai berikut

$$\bar{A}_{xy} = 1 - \delta \bar{a}_{xy} = 0,3406.$$

Diketahui pula hubungan

$$\bar{A}^{1}_{xy} + \bar{A}_{xy}^{\ 1} = \bar{A}_{xy},$$

sehingga diperoleh

$$\bar{A}^{1}_{xy} = \bar{A}_{xy} - \bar{A}_{xy}^{\ 1} = 0,2506.$$

Jawab: C.

12. Untuk suatu "special 10-year deferred whole life annuity-due" dengan manfaat 50.000 pada (62), diberikan sebagai berikut:
    (i) "level annual benefit premiums" dibayarkan selama 10 tahun
    (ii) manfaat kematian dibayarkan saat akhir tahun kematian dan hanya diberikan selama periode penangguhan yang adalah jumlah premi manfaat tanpa bunga
    (iii) $\ddot{a}_{62} = 12,2758$
    (iv) $\ddot{a}_{62:\overline{10|}} = 7,4574$
    (v) $A^{1}_{62:\overline{10|}} = 0,0910$
    (vi) $\sum_{k=1}^{10} A^{1}_{62:\overline{k|}} = 0,4891$

    Hitunglah premi manfaat untuk "special annuity" ini (pembulatan terdekat)

    A. 34.400
    B. 34.500
    C. 34.600
    D. 34.700
    E. 34.800

    Pembahasan: Berdasarkan prinsip ekuivalensi, nilai sekarang dari premium sama dengan nilai sekarang dari total manfaat yang diperoleh, yaitu

$$\begin{aligned} P\ddot{a}_{62:\overline{10|}} &= 50.000\left({}_{10|}a_{62}\right) + P\left((IA)^{1}_{62:\overline{10|}}\right) \\ &= 50.000\left(\ddot{a}_{62} - \ddot{a}_{62:\overline{10|}}\right) + P\left(11A^{1}_{62:\overline{10|}} - \sum_{k=1}^{10} A^{1}_{62:\overline{k|}}\right) \\ \sum_{k=0}^{2} \\ P &= 34.687,2075 \end{aligned}$$

Jawab: D.

13. Untuk suatu ”fully discrete whole life insurance” dengan manfaat 10.000 pada (45), diberikan:
    (i) $i = 0,05$
    (ii) ${}_0L$ adalah variabel acak kerugian saat polis diterbitkan berdasarkan premi manfaat
    (iii) Jika $K_{45} = 10$, dan ${}_0L = 4.450$
    (iv) $\ddot{a}_{55} = 13,4205$

    Hitunglah ${}_{10}V$, cadangan manfaat saat akhir tahun ke 10 untuk asuransi ini

    A. 1.010
    B. 1.460
    C. 1.820
    D. 2.140
    E. 2.300

    Pembahasan: Dari informasi mengenai variabel acak kerugian saat polis diterbitkan berdasarkan premi manfaat kita dapat hitung nilai preminya adalah:

$${}_0L = 10.000v^{K_{45}+1} - P\ddot{a}_{\overline{K_{45}+1|}} = 10.000v^{11} - P\ddot{a}_{\overline{11|}}$$

$$4.450 = 10.000(0,5847) - P(8.7217) \longrightarrow P = 160,151$$

    Selanjutnya, kita hitung cadangan manfaat saat akhir tahun ke 10 untuk asuransi ini

$$A_{55} = 1 - d\ddot{a}_{55} = 0,3609$$

$${}_{10}V = 10.000A_{55} - P\ddot{a}_{55} = 1.459,982$$

    Jawab: B.

14. Suatu asuransi seumur hidup pada (x) dengan manfaat 1 dengan pengembalian dari ”net single premium” tanpa bunga pada saat kematian. Diberikan:
    (i) $\mu_{x+t} = 0,01$ for $t > 0$
    (ii) $\delta = 0,03$

    Hitunglah ”net single premium”
    A. 1/2 B. 1/3 C. 1/4 D. 1/5 E. 3/4

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^\infty (1+P)e^{-\delta t}{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\
&= (1+P)\int_0^\infty e^{-(0{,}03+0{,}01)t}0,01dt \\
&= \frac{1}{4}+\frac{1}{4}P \\
P &= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

15. Untuk dua "fully continuous whole life insurance policies" pada (x), diberikan sebagai berikut:
    (i) Polis A: Manfaat Kematian 1 ; rate premi tahunan 0,10 ; Variansi dari nilai sekarang kerugian dimasa depan saat t= 0,455
    (ii) Polis B: Manfaat Kematian 2 ; rate premi tahunan 0,16
    (iii) $\delta = 0,06$

    Hitunglah variansi dari nilai sekarang kerugian dimasa depan saat t untuk polis B (pembulatan terdekat)

    A. 0,9
    B. 1,4
    C. 2,0
    D. 2,9
    E. 3,4

Pembahasan: .

- Untuk polis A diketahui *future loss* pada waktu t adalah

$$
\begin{aligned}
{}_tL &= 1\times v^{T_{x+t}} - P\bar{a}_{\overline{T_{x+t}}|} \\
&= e^{-\delta T_{x+t}} - 0.1\left(\frac{1-e^{-\delta T_{x+t}}}{\delta}\right) \\
&= \left(1+\frac{0,10}{\delta}\right)e^{-\delta T_{x+t}} - \frac{0,10}{\delta}.
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
Var({}_tL) &= \left(1+\frac{0,10}{\delta}\right)^2 Var(e^{-\delta T_{x+t}}) \\
0,455 &= \left(1+\frac{0,10}{0,06}\right)^2 \left({}^2\bar{A}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}^2\right)
\end{aligned}
$$

atau

$$
\left({}^2\bar{A}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}^2\right) = \frac{0,455}{\left(1+\frac{0,10}{0,06}\right)^2} = 0.063984375.
$$

- Untuk polis B:

$$
\begin{aligned}
{}_tL &= 2\times v^{T_{x+t}} - P\bar{a}_{\overline{T_{x+t}|}} \\
&= e^{-\delta T_{x+t}} - 0.16\left(\frac{1-e^{-\delta T_{x+t}}}{\delta}\right) \\
&= \left(1+\frac{0,16}{\delta}\right)e^{-\delta T_{x+t}} - \frac{0,16}{\delta}.
\end{aligned}
$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
Var({}_tL) &= \left(2+\frac{0,16}{\delta}\right)^2 Var(e^{-\delta T_{x+t}}) \\
&= \left(2+\frac{0,16}{0,06}\right)^2 \left({}^2\bar{A}_{x+t}-\bar{A}_{x+t}^2\right) \\
&= 21.77777778\times 0.063984375 \\
&= 1,3934375.
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

16. Diberikan:
    (i) Kematian berdistribusi seragam untuk setiap tahun usia
    (ii) $i = 0,10$
    (iii) $q_x = 0,05$
    (iv) $q_{x+1} = 0,08$

    Hitunglah $\bar{A}^1_{x:\overline{2|}}$ (pembulatan terdekat)

    A. 0,103 B. 0,108 C. 0,111 D. 0,114 E. 0,119

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{1}_{x:\overline{2}|} &= \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{2}|} = \frac{i}{\delta}[vq_x + v^2 p_x q_{x+1}] \\
&= \frac{0,10}{\ln(1+0,10)}[(1+0,10)^{-1}(0,05) + (1+0,10)^{-2}(0,95)(0,08)] \\
&= 0,114.
\end{aligned}
$$

Jawab: D.

<u>Informasi untuk nomor 17 dan 18</u>

Suatu ”fully discrete 2-payment, 3-year term insurance” dengan manfaat kematian 10.000 pada (x) diberikan :

(i) $i = 0,05$

(ii) $q_x = 0,1 \qquad q_{x+1} = 0,15 \qquad q_{x+2} = 0,20$

(iii) Kematian adalah satu-satunya *decrement*

(iv) Biaya yang dibayarkan pada saat awal tahun adalah:

Tahun Polis	Per Polis	Per 1.000 dari manfaat kematian	Per 100 dari *gross premium*
1	25	4,5	20
2	10	1,5	10
3	10	1,5	-

(v) Biaya tambahan yang dibayarkan pada akhir tahun saat terjadi kematian adalah sebesar 20 per polis ditambahkan 1 per 1.000 dari manfaat kematian

(v) G adalah *gross premium* tahunan untuk asuransi ini

(v) *Net single premium* untuk asuransi ini adalah 3.499

17. Hitunglah nilai dari *expected present value* dari biaya (tidak termasuk biaya tambahan) pada saat issue (polis terbit) dalam bentuk G. (pembulatan terdekat)

A. 101,9 + 0,286G

B. 108,8 + 0,286G

C. 119,3 + 0,286G

D. 182,2 + 0,286G

E. 546,8 + 0,286G

Pembahasan: Nilai dari *expected present value* dari biaya (tidak termasuk biaya tambahan) pada saat issue (polis terbit) adalah:

$$\begin{aligned}EPV =& \left[25 + (4,5)\left(\frac{10.000}{1.000}\right) + \left(\frac{20}{100}\right)G\right]\\&+\left[10 + (1,5)\left(\frac{10.000}{1.000}\right) + \left(\frac{10}{100}\right)G\right]vp_x\\&+\left[10 + (1,5)\left(\frac{10.000}{1.000}\right)\right]v^2 p_x p_{x+1}\\=&70 + 0,2G + (25 + 0,1G)\left(\frac{0,9}{1,05}\right) + (25)\frac{(0,9)(0,85)}{1,05^2}\\=&108,78 + 0,2857G\end{aligned}$$

Jawab: B.

18. Hitunglah G dengan menggunakan prinsip ekuivalen (pembulatan terdekat) A. 1.597 B. 2.296 C. 2.303 D. 2.343 E. 2.575

Pembahasan: Nilai dari *expected present value* dari manfaat kematian adalah 3.499 (dari *Net single premium*).
Nilai dari *expected present value* dari *gross premium* tahunan adalah

$$G(1 + vp_x) = 1,8571G$$

Biaya tambahan adalah sebesar $20 + (1)(10) = 30$, yang dibayarkan pada akhir tahun saat terjadi kematian, sehingga nilai dari *expected present value* dari biaya tambahan adalah

$$\left(\frac{30}{10.000}\right) EPV\text{manfaat kematian} = (0,003)(3.499) = 10,50$$

Sehingga, menggunakan prinsip ekuivalen untuk menghitung nilai G, diperoleh:

$$\begin{aligned}1,8571G &= 3499 + (108,78 + 0,2857G) + 10,50\\G &= \frac{3618,28}{1,8571 - 0,2857} = 2302,59\end{aligned}$$

Jawab: C.

19. Jika T_x dan T_y adalah saling bebas, hitunglah nilai dari ${}_{2|}q_{xy}$ diberikan: (pembulatan terdekat)

$$q_x = 0,08 \qquad q_{x+1} = 0,09 \qquad q_{x+2} = 0,10$$

$$q_y = 0,10 \qquad q_{y+1} = 0,15 \qquad q_{y+2} = 0,20$$

A. 0,10

B. 0,14

C. 0,18

D. 0,20

E. 0,24

Pembahasan:

$$\begin{aligned} {}_{2|}q_{xy} &= \left({}_2p_{xy}\right)\left(q_{x+2:y+2}\right) \\ &= \left({}_2p_x\right)\left({}_2p_y\right)\left(1 - p_{x+y:y+2}\right) \\ &= \left(p_x p_{x+1}\right)\left(p_y p_{y+1}\right)\left(1 - p_{x+2}p_{y+2}\right) \\ &= 0,17932 \end{aligned}$$

Jawab: C.

Informasi untuk nomor 20 sampai 22

Suatu unit ”continuously-operation air conditioning” mempunyai ”exponential lifetime distribution” dengan nilai rata-rata 4 tahun. Ketika unit rusak, harus diganti dengan biaya 1.000, yang dianggap sebagai satu unit uang. Misalkan $\bar{Z}$ menyatakan nilai sekarang dari variabel acak untuk setiap pembayaran unit saat gagal. Gunakan ”effective annual interest rate 5%”.

20. Hitunglah $\mathbb{E}(\overline{Z})$ (pembulatan terdekat)

A. 0,35

B. 0,47

C. 0,53

D. 0,62

E. 0,84

Pembahasan: Dalam hal ini biaya 1000 dianggap sebagai satu unit pembayaran, sehingga $\overline{Z}$ adalah present value per unit pembayaran bila terjadi fail, atau pembayaran dalam ribuan, sehingga variabel acaknya adalah $\overline{Z} = e^{-\delta T}$, dengan T menunjukkan unit waktu (dalam tahun) sampai terjadi *fail*. Karena T berdistribusi eksponensial maka pdf dari T adalah

$$f_T(t) = \mu e^{-\mu t}. \tag{5.1}$$

Nilai dari μ diperoleh dari informasi tentang mean dari T. Diketahui bahwa mean dari variabel acak berdistribusi eksponensial dengan pdf (5.1) adalah $\frac{1}{\mu}$ dan diketahui mean dari T adalah 4 tahun maka $\mu = \frac{1}{4} = 0,25$. Nilai harapan dari $\overline{Z}$ adalah

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{Z}) &= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{0,25}{0,25 + \log(1,05)} = 0,8367076.\end{aligned}$$

Jawab: E

21. Hitunglah $Var(\bar{Z})$ (pembulatan terdekat)

    A. 0,010

    B. 0,012

    C. 0,014

    D. 0,016

    E. 0,019

    Pembahasan:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\overline{Z}^2) &= \int_0^\infty (e^{-\delta t})^2 e^{-\mu t} \mu dt \\ &= \frac{\mu}{\mu + 2\delta} = 0,7192581962\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(\overline{Z}) &= \mathbb{E}(\overline{Z}^2) - (\mathbb{E}(\overline{Z}))^2 \\ &= 0,7192581962 - 0,8367076^2 = 0,01917859484\end{aligned}$$

Jawab: E.

22. Hitunglah ”90th percentile” dari distribusi $\bar{Z}$ (pembulatan terdekat)

    A. 0,45

    B. 0,56

    C. 0,67

    D. 0,79

    E. 0,98

Pembahasan:

$$\mathbb{P}(e^{-\delta T_x} \leq z) = 0,90$$
$$\mathbb{P}\Big(T_x \geq \frac{\log(z)}{-\delta}\Big) = 0,90$$
$$\int_{\frac{\log(z)}{-\delta}}^{\infty} e^{-\mu t}\mu dt = 0.90$$
$$\frac{\mu \log(z)}{\delta} = \log 0.90$$
$$z = e^{\frac{\delta \log 0,90}{\mu}} = 0,9796477336$$

Jawab: E.

23. Perusahaan Anda menerbitkan polis asuransi anuitas seumur hidup (*whole life annuities*) kepada sebuah kelompok yang memiliki umur 70 tahun. Untuk setiap polis, anda diberikan:
    i. Pembayaran anuitas sebesar 2.000 setiap akhir tahun
    ii. Premi tunggal gross (*single gross premium*) adalah 26.600
    iii. Keuntungan (*Profit*) berdasarkan cadangan *gross premium (gross premium reserve)*
    iv. Cadangan *gross premium* pada akhir tahun ke 10 adalah 8.929,18 per polis
    v. Biaya dibayarkan setiap akhir tahun untuk setiap pemegang polis yang tidak meninggal dalam tahun tersebut

    Pada tahun ke 11, antisipasi (*anticipated*) dan aktual *experience* adalah sebagai berikut:

    a) 1.000 polis inforce di awal tahun ke 11

    b) Tabel aktual dan antisipasi:

	Antisipasi (*anticipated*)	Aktual (*actual*)
Mortality	$q_{80} = 0,11$	200 kematian
Interest	$i = 0,03$	$i = 0,04$
Expenses	30 per polis	35 per polis

Untuk tahun ke 11, anda menghitung keuntungan (*gain*) karena bunga (*interest*) sebelum menghitung keuntungan (*gain*)dari sumber lain. Hitunglah keuntungan karena bunga (*interest*) pada tahun ke 11

A. 87.560

B. 87.902

C. 88.435

D. 88.880

E. 89.292

Pembahasan: Karena anuitas dibayarkan di akhir tahun, maka hanya cadangan *gross premium* pada akhir tahun ke 10 saja yang mendapat bunga.

Keuntungan karena bunga (*interest*) pada tahun ke 11 adalah:
cadangan di awal tahun × keuntungan dari bunga (aktual - antisipasi)
$= 1000 \times (8.929, 18) \times (0, 04 - 0, 03) = 89.291, 8$
Jawab: E.

24. Untuk sebuah tabel *double decrement*, anda diberikan:
   i. $q_x^{\prime(1)} = 0, 1$
   ii. $q_x^{(2)} = 0, 2$
   iii. Setiap *decrement* adalah berdistribusi seragam (*uniform distribution*) di setiap tahun usia dalam hubungannya dengan tabel *single decrement*

   Hitunglah $q_x^{(1)}$ (pembulatan terdekat)
   A. 0,0895 B. 0,0915 C. 0,0935 D. 0,0955 E. 0,0975

   Pembahasan: Karena setiap *decrement* berdistribusi seragam, maka

$$\begin{aligned} 0,2 = q_x^{(2)} &= q_x^{\prime(2)}\left(1 - \frac{1}{2}q_x^{\prime(1)}\right) \\ &= q_x^{\prime(2)}\left(1 - \frac{1}{2}(0,1)\right) = 0,95q_x^{\prime(2)} \\ &\Rightarrow q_x^{\prime(2)} = 0,21053 \end{aligned}$$

$$p_x^{(\tau)} = p_x^{\prime(1)} p_x^{\prime(2)} = (0,9)(1 - 0,21053) = 0,71053$$

$$\begin{aligned} q_x^{(1)} = q_x^{(\tau)} - q_x^{(2)} &= 1 - p_x^{(\tau)} - q_x^{(2)} \\ &= 1 - 0,71053 - 0,2 = 0,08947 \end{aligned}$$

   Jawab: A.

25. Karyawan di perusahaan ABC bisa berstatus:
   State 0: Karyawan tidak eksekutif
   Stete 1: Karyawan eksekutif

State 2: Karyawan yang diberhentikan

John bergabung dengan perusahan ABC sebagai karyawan tidak eksekutif pada usia 30 tahun. Anda diberikan:

i. $\mu^{01} = 0,01$ untuk setiap tahun pelayanan

ii. $\mu^{02} = 0,006$ untuk setiap tahun pelayanan

iii. $\mu^{12} = 0,002$ untuk setiap tahun pelayanan

iv. Karyawan eksekutif tidak pernah kembali menjadi karyawan tidak eksekutif

v. Karyawan yang diberhentikan tidak pernah kembali dipekerjakan

vi. Probabilitas bahwa John hidup sampai umur 65 tahun adalah 0,9 tanpa menghiraukan state

Hitunglah probabilitas bahwa John akan menjadi karyawan eksekutif dari perusahaan ABC pada usia 65 tahun.

A. 0,232 B. 0,245 C. 0,258 D. 0,271 E. 0,284

Pembahasan: Peluang bahwa John akan menjadi karyawan eksekutif dalam 35 tahun adalah ${}_{35}p_0^{01}$.

$$
\begin{aligned}
{}_{35}p_0^{01} &= \int_0^{35} {}_tp_0^{00} \times \mu_t^{01} \times {}_{(35-t)}p_t^{11} dt \\
&= \int_0^{35} e^{-\int_0^t \left(\mu_s^{01}+\mu_s^{02}\right)ds} \times \mu_t^{01} \times e^{-\int_t^{35} \mu_s^{12} ds} dt \\
&= \int_0^{35} e^{-\left(\mu_t^{01}+\mu_t^{02}\right)t} \times \mu_t^{01} \times e^{-\mu_t^{12}(35-t)} dt \\
&= \int_0^{35} e^{-(0{,}01+0{,}006)t} \times 0,01 \times e^{-(0{,}002)(35-t)} dt \\
&= 0,01 \times e^{-0{,}07} \times \int_0^{35} e^{-0{,}014t} dt \\
&= \frac{0,01}{0,014} \times e^{-0{,}07} \times \left(1 - e^{-0{,}49}\right) \\
&= 0,25799
\end{aligned}
$$

Peluang bahwa John akan menjadi karyawan eksekutif dari perusahaan ABC pada usia 65 tahun mensyaratkan bahwa John hidup sampai umur 65 tahun, sehingga peluangnya adalah:

$$0,9 \times 0,25799 = 0,232.$$

Jawab: A.

26. Untuk suatu ”20 tahun temporary life annuity due” dari manfaat 100 per tahun pada usia (65), diberikan:

    i. $\mu_x = 0,001x, \quad x \geq 65$

    ii. $i = 0,05$

    iii. Y adalah *present value* variabel acak untuk anuitas ini

    Hitunglah probabilitas bahwa Y kurang dari 1000 (pembulatan terdekat)

    A. 0,54 B. 0,57 C. 0,61 D. 0,64 E. 0,67

    Pembahasan: Kita ingin menghitung $\mathbb{P}(Y < 1000) = \mathbb{P}\left(100\ddot{a}_{\overline{K_{65}+1}|} < 1000\right) = \mathbb{P}\left(\ddot{a}_{\overline{K_{65}+1}|} < 10\right)$. Karena

    $$\ddot{a}_{\overline{13}|} = \frac{1-v^{13}}{d} = 9,86 \qquad \text{dan} \qquad \ddot{a}_{\overline{14}|} = \frac{1-v^{14}}{d} = 10,4$$

    Maka

    $$\begin{aligned}
    \mathbb{P}(Y < 1000) &= \mathbb{P}(K_{65} \leq 13-1) = \mathbb{P}(T_{65} < 13) \\
    &= 1 - \exp\left(-\int_0^{13} \mu_{65+t} dt\right) = 1 - \exp\left(-0,001 \int_0^{13} (65+t) dt\right) \\
    &= 1 - \exp[-0,001(0,5)((65+13)^2 - 65^2)] \\
    &= 0,6052
    \end{aligned}$$

    Jawab: C.

27. Pada 1 Januari, sebuah perusahaan asuransi menerbitkan 10 polis ”*one-year term life insurance*” pada usia x dengan *independent future lifetime*. Anda diberikan:

    (i) Setiap polis membayarkan manfaat sebesar 1.000 pada akhir tahun jika pemegang polis meninggal dalam tahun tersebut

    (ii) Setiap pemegang polis membayar premi tunggal sebesar 90

    (iii) q_x adalah sama untuk setiap pemegang polis. Dengan probabilitas $0,3$, $q_x = 0,0$ untuk setiap pemegang polis. Dengan probabilitas $0,7$, $q_x = 0,2$ untuk setiap pemegang polis

    (iv) $i = 0,04$

    Hitunglah variansi dari *present value of future losses* yang diterbitkan pada variabel acak untuk seluruh portfolio (pembulatan terdekat). Hint: Var [Loss] = E[Var(Loss)] + Var(E[Loss])

    A. 800.000

    B. 900.000

    C. 1.000.000

D. 1.400.000

E. 1.800.000

Pembahasan: Misalkan N menyatakan jumlah kematian, maka $S = 1000vN - 900$ dengan N berdistribusi binomial $(10, Q)$ dan

$$Q = \begin{cases} 0 & \text{dengan peluang } 0,3 \\ 0,2 & \text{dengan peluang } 0,7 \end{cases}$$

Maka

$$\begin{aligned}
Var(N) =& \mathbb{E}\left[Var(N|Q)\right] + Var\left[\mathbb{E}(N|Q)\right] \\
=& \mathbb{E}[10Q(1-Q)] + Var[10Q] \\
=& 10\mathbb{E}[Q] - 10\mathbb{E}[Q^2] + 100\left(\mathbb{E}[Q^2] - \mathbb{E}[Q]^2\right) \\
=& 90\mathbb{E}[Q^2] + 10\mathbb{E}[Q] - 100\mathbb{E}[Q]^2 \\
=& 90[0^2(0,3) + 0,2^2(0,7)] + 10[0(0,3) + 0,2(0,7)] \\
& - 100[0(0,3) + 0,2(0,7)]^2 \\
=& 1,96 \\
Var(S) =& Var(1000vN - 900) \\
=& (1000v)^2(1,96) = 1.812.130
\end{aligned}$$

Jawab: E.

28. Untuk sebuah asuransi berjangka 3 tahun dengan benefit 1.000 pada usia 75, diberikan:
   i. Manfaat meninggal dibayarkan pada akhir tahun kematian
   ii. *Level premium* dibayarkan setiap awal kwartal
   iii. *Mortality* mengikuti *select and ultimate life table* dengan 2 tahun periode seleksi:

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
75	15.930	15.668	15.286	77
76	15.508	15.224	14.816	78
77	15.050	14.744	14.310	79

Hitunglah nilai dari premi kuarteran (pembulatan terdekat)

A. 5,3 B. 5,5 C. 5,7 D. 5,9 E. 6,1

Pembahasan: Jawab: C. – ini dari kunci jawaban.
Kurang informasi pada soal. Dibutuhkan informasi mengenai i (interest) dan asumsi yang digunakan (distribusi seragam? atau WH formula?)

29. Untuk sebuah asuransi diskrit berjangka 5 tahun "*fully discrete 5 year term*" dengan manfaat 100.000 pada usia 80 tahun, diberikan:

    i. $l_{80} = 1.000$

    ii.

x	l_x	d_x
83	920	50
84	870	60

    iii.

Time to maturity	Annual spot rate
1	0,04
2	0,04
3	0,04
4	0,05
5	0,06

    iv. Nilai berikut dihitung pada $i = 0,04$
    $\ddot{a}_{80:\overline{5}|} = 4,3868$
    $A^{1}_{80:\overline{5}|} = 0,1655$

Hitunglah manfaat premi tahunan untuk asuransi tersebut (pembulatan terdekat)

A. 3.660

B. 3.680

C. 3.700

D. 3.720

E. 3.740

Pembahasan: Karena annual spot rate untuk tahun ke 4 dan ke 5 berubah, maka kita perlu menyesuaikan cash flownya.

$$\ddot{a}_{80:\overline{5}|} = 4,3868 + \frac{870}{1.000} \times \left[\frac{1}{1,05^4} - \frac{1}{1,04^4}\right] = 4,3589$$

$$A^{1}_{80:\overline{5}|} = 0,1655 + \frac{50}{1.000} \times \left[\frac{1}{1,05^4} - \frac{1}{1,04^4}\right] + \frac{60}{1.000} \times \left[\frac{1}{1,06^5} - \frac{1}{1,04^5}\right] = 0,1594$$

Sehingga, besarnya manfaat premi tahunan adalah

$$100.000 \times \frac{0,1594}{4,3589} = 3657,25$$

Jawab: A.

30. Diberikan:

a) "*select and ultimate life table*" dengan periode seleksi 2 tahun:

x	$l_{[x]}$	$l_{[x]+1}$	l_{x+2}	$x+2$
50	99.000	96.000	93.000	52
51	97.000	93.000	89.000	53
52	93.000	88.000	83.000	54
53	90.000	84.000	78.000	55

b) Kematian berdistribusi seragam di sepanjang tahun usia

Hitunglah $10.000{}_{2,2}q_{[51]+0,5}$ (pembulatan terdekat)

A. 705

B. 709

C. 713

D. 1.070

E. 1.074

Pembahasan:

$$\ell_{[51]+0,5} = 0,5\ell_{[51]} + 0,5\ell_{[51]+1} = 0,5\,(97.000) + 0,5\,(93.000) = 95.000$$

$$\ell_{53.7} = 0,3\ell_{53} + 0,7\ell_{54} = 0,3\,(89.000) + 0,7\,(83.000) = 84.800$$

$${}_{2,2}q_{[51]+0,5} = \frac{\ell_{[51]+0,5} - \ell_{53.7}}{\ell_{[51]+0,5}} = \frac{95.000 - 84.800}{95.000} = 0,10737$$

$$10.000{}_{2,2}q_{[51]+0,5} = 1.074$$

Jawab: E.

6 Periode November 2015

1. Diberikan $\mu_{35+t} = \frac{1}{100+t}$. Hitung nilai dari ${}_{10}p_{35}$.

   (A) 7/11

   (B) 8/11

   (C) 9/11

   (D) 10/11

   (E) 1

   Pembahasan

   $$\begin{aligned} {}_{t}p_{35} &= e^{-\int_0^t \mu_{35+u} du} \\ &= e^{-\int_0^t \frac{du}{100+u}} \\ &= \frac{100}{100+t} \end{aligned}$$

   $${}_{10}p_{35} = \frac{100}{100+10} = \frac{10}{11}$$

   Jawab: D.

2. Untuk model "*2-year selection and ultimate mortality*",

   (i) $q_{[x]+1} = 0,95 \cdot q_{x+1}$

   (ii) $l_{76} = 98.153$

   (iii) $l_{77} = 96.124$

   Hitung $l_{[75]+1}$

   (A) 96.150

   (B) 96.780

   (C) 97.420

   (D) 98.050

   (E) 98.690

   Pembahasan

   Untuk model "*2-year selection and ultimate mortality*",

$$
\begin{aligned}
q_{[75]+1} &= 0{,}95\ q_{76} \\
1-\frac{96.124}{l_{[75]+1}} &= 0{,}95\left(1-\frac{96.124}{98.153}\right) \\
l_{[75]+1} &= 98.049{,}52
\end{aligned}
$$

Jawab: D.

3. Diberikan sebagai berikut.

   (i) $q_x = 0,1$

   (ii) "Force of Mortality" adalah konstan antara "integral ages"

   Hitung $_{1/2}q_{x+1/4}$

   (A) 0,051

   (B) 0,043

   (C) 0,032

   (D) 0,026

   (E) 0,012

   Pembahasan

   Diketahui bahwa *Force of Mortality* adalah konstan.

$$
\begin{aligned}
{}_{\frac{1}{2}}q_{x+\frac{1}{4}} &= 1-{}_{\frac{1}{2}}p_{x+\frac{1}{4}} \\
&= 1-(p_x)^{1/2} \\
&= 1-\sqrt{0.9} \\
&= 0{,}051
\end{aligned}
$$

   Jawab: A.

4. Diberikan sebagai berikut.

   (i) $l_{[45]} = 1000$

   (ii) $_5q_{[45]} = 0,04$

   (iii) $_5q_{[45]+5} = 0,05$

   Hitung $l_{[45]+10}$

   (A) 912

   (B) 960

   (C) 950

   (D) 800

(E) 990

Pembahasan

Kita akan menghitung dulu nilai dari $l_{[45]+5}$.

$$\begin{aligned}
{}_5q_{[45]} &= 1 - \frac{l_{[45]+5}}{l_{[45]}} \\
0{,}04 &= 1 - \frac{l_{[45]+5}}{1.000} \\
l_{[45]+5} &= 1.000(0,96) \\
l_{[45]+5} &= 960
\end{aligned}$$

Lalu, kita akan menghitung nilai dari $l_{[45]+10}$.

$$\begin{aligned}
{}_5q_{[45]+5} &= 1 - \frac{l_{[45]+10}}{l_{[45]+5}} \\
0{,}05 &= 1 - \frac{l_{[45]+10}}{960} \\
l_{[45]+10} &= 960(0,95) \\
l_{[45]+10} &= 912
\end{aligned}$$

Jawab: A.

5. Suatu asuransi seumur hidup pada (x) dengan manfaat 1 dengan pengembalian dari "net single premium" tanpa bunga pada saat kematian. Diberikan: $\mu_{x+t} = 0,01$ untuk $t > 0$ dan $\delta = 0,03$. Hitung "net single premium"

   (A) 1/2

   (B) 1/3

   (C) 1/4

   (D) 1/5

   (E) 3/4

   Pembahasan

   Manfaat (*Benefit*) yang akan dibayarkan adalah sebesar $1 + P$, dengan premi P.

$$(1+P)\bar{A}_x = P$$

$$P = \frac{\bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x}$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x\mu_{x+t}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-0,03t}e^{-0,01t}(0,01)dt \\
&= 0,01\int_0^\infty e^{-0,04t}dt \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Maka,

$$P = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Jawab: B.

6. Diberikan:

   (i) Kematian berdistribusi seragam untuk setiap tahun usia

   (ii) $i = 0,1$

   (iii) $q_x = 0,05$

   (iv) $q_{x+1} = 0,08$

   Hitung $\bar{A}^1_{x:\overline{2|}}$

   (A) 0,103

   (B) 0,108

   (C) 0,111

   (D) 0,114

   (E) 0,119

   Pembahasan

   Kita akan terlebih dahulu menghitung nilai dari $A^1_{x:\overline{2|}}$.

$$\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{2|}} &= \sum_{k=0}^{1} v^{k+1}\,{}_{k|}q_x \\
&= vq_x + v^2p_xq_{x+1} \\
&= 1,1^{-1}(0,05) + 1,1^{-2}(0,95)(0,08) \\
&= 0{,}108264
\end{aligned}$$

   Karena terdapat asumsi UDD (berdistribusi seragam),

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{x:\overline{2}|} &= \frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{2}|} \\ &= \frac{0,1}{ln(1,1)}(0,108264) \\ &= 0{,}113592\end{aligned}$$

Jawab: D.

Informasi untuk no 7 dan 8

7. Suatu "fully discrete 2-payment, 3-year term insurance" dengan manfaat kematian 10.000 pada (x) diberikan :

   (i) $i = 0,05$

   (ii) $q_x = 0,1 \quad q_{x+1} = 0,15 \quad q_{x+2} = 0,2$ (iii) Kematian adalah satu-satunya decrement

   (iv) Biaya yang dibayarkan pada saat awal tahun adalah:

Tahun Polis	Per Polis	Per 1.000 dari manfaat kematian	Per 100 dari gross premium
1	25	4,5	20
2	10	1,5	10
3	10	1,5	-

   (v) Biaya tambahan yang dibayarkan pada akhir tahun saat terjadi kematian adalah sebesar 20 per polis ditambahkan 1 per 1.000 dari manfaat kematian

   (vi) G adalah gross premium tahunan untuk asuransi ini

   (vii) Net single premium untuk asuransi ini adalah 3.499

   Hitunglah nilai dari expected present value dari biaya (tidak termasuk biaya tambahan) pada saat issue (polis terbit) dalam bentuk G. (pembulatan terdekat)

   (A) 101,9+0,286G

   (B) 108,8+0,286G

   (C) 119,3+0,286G

   (D) 182,2+0,286G

   (E) 546,8+0,286G

   Pembahasan

   Diketahui biaya yang dibayarkan saat awal tahun adalah:

Tahun Polis	Biaya per polis	Biaya Manfaat Kematian	Biaya Premium
1	25	45	20% G
2	10	15	10% G
3	10	15	-

Jadi, nilai sekarang dari biaya-biaya tersebut:

$$\begin{aligned} PV &= (25+45)+(10+15)v(p_x)+(10+15)v^2(p_x)(p_{x+1})+G(20\%+10\%v(p_x)) \\ &= 70+25\tfrac{0{,}9}{1{,}05}+25\tfrac{(0{,}9)(0{,}85)}{1{,}05^2}+G\left(20\%+10\%\tfrac{0{,}9}{1{,}05}\right) \\ &= 108{,}7755+0{,}2857G \end{aligned}$$

Jawab: B.

8. Hitunglah G dengan menggunakan prinsip ekuivalen (pembulatan terdekat)

   (A) 1.597

   (B) 2.296

   (C) 2.303

   (D) 2.343

   (E) 2.575

   Pembahasan

   Nilai sekarang dari biaya tambahan adalah:

$$\begin{aligned} PV &= 30(v(q_x)+v^2(p_x)(q_{x+1})+v^3(p_x)(p_{x+1})(q_{x+2})) \\ &= 30\left[\frac{0,1}{1,05}+\frac{0,9(0,15)}{1,05^2}+\frac{0,9(0,85)(0,2)}{1,05^3}\right] \\ &= 10{,}49563 \end{aligned}$$

$$A^1_{x:\overline{3}|}=vq_x+v^2p_xq_{x+1}+v^3p_xp_{x+1}q_{x+2}=0,349854$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{2}|}=1+vp_x=1,857143$$

$$10.000(A^1_{x:\overline{3}|})+(108,8+0,286G)+10,49563=G\ddot{a}_{x:\overline{2}|}$$

$$G=2.302,677$$

   Jawab: C.

9. Diberikan suatu rate kematian sebagai berikut:

$$q_{75}=0,01$$

$$q_{76}=0,02$$

$$q_{77}=0,04$$

$$i=0,05$$

   Hitung $\ddot{a}_{75:\overline{3}|}$

(A) 1,85

(B) 2,34

(C) 2,82

(D) 3,43

(E) 3,77

Pembahasan

Kita akan menghitung nilai dari $\ddot{a}_{75:\overline{3}|}$.

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{75:\overline{3}|} &= 1 + vp_{75} + v^2{}_2p_{75} \\
&= 1 + 1,05^{-1}(0,99) + 1,05^{-2}(0,99)(0,98) \\
&= 2,8229
\end{aligned}
$$

Jawab: C.

10. Untuk suatu "fully discrete whole life" dari manfaat kematian 1 di usia (25) diberikan:

- $P_{25} = 0,01128$
- $P_{25:\overset{\;1}{\overline{15}|}} = 0,05107$
- $P_{25:\overline{15}|} = 0,05332$

Hitunglah "net premium reserve" untuk manfaat kematian 25.000 pada akhir tahun ke 15.

(A) 4.420

(B) 4.460

(C) 4.500

(D) 4.540

(E) 4.580

Pembahasan

Kita akan mencari terlebih dahulu nilai dari $P^1_{25:\overline{15}|}$.

$$
\begin{aligned}
P_{25:\overline{15}|} &= P_{25:\overset{\;1}{\overline{15}|}} + P^1_{25:\overline{15}|} \\
0,05332 &= 0,05107 + P^1_{25:\overline{15}|} \\
P^1_{25:\overline{15}|} &= 0,00225 \\
P^1_{25:\overline{15}|} &= P_{25} - P_{25:\overset{\;1}{\overline{15}|}}A_{40} \\
0,00225 &= 0,01128 - 0,05107(P_{40}) \\
P_{40} &= 0,1768
\end{aligned}
$$

$$
{}_{15}V = 25.000P_{40} = 4.420
$$

Jawab: A.

11. Untuk suatu “independent lives” (x) dan (y):
    - $q_x = 0,05$
    - $q_y = 0,1$
    - Kematian berdistribusi seragam pada setiap tahun usia

    Hitung ${}_{0,75}q_{xy}$

    (A) 0,1088

    (B) 0,1097

    (C) 0,1106

    (D) 0,1116

    (E) 0,1125

    Pembahasan

    Untuk *independent lives* x dan y,

$$\begin{aligned} {}_{0,75}q_{xy} &= 1 - {}_{0,75}p_{xy} \\ &= 1 - ({}_{0,75}p_x)({}_{0,75}p_y) \\ &= 1 - (1 - \tfrac{3}{4}(0,05))(1 - \tfrac{3}{4}(0,1)) \\ &= 0{,}109688 \end{aligned}$$

    Jawab: B.

12. Kematian berdistribusi seragam diantara “integral ages”. Manakah diantara pernyataan berikut yang merepresentasikan ${}_{3/4}p_x + \frac{1}{2} \cdot {}_{1/2}\, p_x \cdot \mu_{x+1/2}$?

    (A) ${}_{3/4}p_x$

    (B) ${}_{3/4}q_x$

    (C) ${}_{1/2}p_x$

    (D) ${}_{1/2}q_x$

    (E) ${}_{1/4}p_x$

    Pembahasan

    Diketahui kematian berdistribusi seragam di antara *’integral ages’*.

$$\begin{aligned} {}_{\frac{3}{4}}p_x + \tfrac{1}{2}\,{}_{\frac{1}{2}}p_x\mu_{x+\frac{1}{2}} &= {}_{\frac{3}{4}}p_x + \tfrac{1}{2}q_x \\ &= (1 - \tfrac{3}{4}q_x) + \tfrac{1}{2}q_x \\ &= 1 - \tfrac{1}{4}q_x \\ &= 1 - {}_{\frac{1}{4}}q_x \\ &= {}_{\frac{1}{4}}p_x \end{aligned}$$

    Jawab: E.

13. Diberikan fungsi survival $S_0(x)$ dimana:

$$S_0(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \frac{e^x}{100}, & 1 \leq x < 4,5 \\ 0, & x \geq 4,5 \end{cases}$$

Hitung nilai dari μ_4.

(A) 0,45

(B) 0,55

(C) 0,8

(D) 1

(E) 1,2

Pembahasan

Kita akan terlebih dahulu menentukan μ_{x+t}.

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= -\tfrac{d}{dt} ln \tfrac{S_0(x+t)}{S_0(x)} \\ &= -\frac{d}{dt}\left[ln\left(1-\frac{e^{x+t}}{100}\right) - ln\left(1-\frac{e^x}{100}\right)\right] \\ &= \frac{1}{1-\frac{e^{x+t}}{100}}\left(\frac{e^{x+t}}{100}\right) \end{aligned}$$

Maka,

$$\mu_4 = \frac{\frac{e^4}{100}}{1-\frac{e^4}{100}} = 1,2$$

Jawab: E.

14. Untuk suatu “triple decrement” tabel, diberikan:

(i) $\mu_{x+t}^{(1)} = 0,3, t > 0$

(ii) $\mu_{x+t}^{(2)} = 0,5, t > 0$

(iii) $\mu_{x+t}^{(3)} = 0,7, t > 0$

Hitung $q_x^{(2)}$

(A) 0,26

(B) 0,3

(C) 0,33

(D) 0,36

(E) 0,39

Pembahasan

Kita akan terlebih dahulu menentukan ${}_tp_x^{(\tau)}$.

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(\tau)} &= e^{-\int_0^t \sum_i \mu_{x+u}^{(i)} du} \\ &= e^{-\int_0^t 0{,}3+0{,}5+0{,}7 du} \\ &= e^{-1{,}5t} \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} q_x^{(2)} &= \int_0^1 {}_tp_x^{(\tau)} \mu_{x+t}^{(2)} dt \\ &= \int_0^1 e^{-1{,}5t}(0,5)dt \\ &= 0{,}25896 \end{aligned}$$

Jawab: A.

15. Diberikan sebagai berikut.

(i) $\mu_{x+t} = 0,01; 0 \leq t < 5$

(ii) $\mu_{x+t} = 0,02; t \geq 5$

(iii) $\delta = 0,06$

Hitung $\bar{a}_x$

(A) 12,5

(B) 13

(C) 13,4

(D) 13,9

(E) 14,3

Pembahasan

Kita akan menghitung nilai dari $\bar{a}_x$.

$$
\begin{aligned}
\bar{a}_x &= \int_0^\infty e^{-\delta t} {}_t p_x dt \\
&= \int_0^5 e^{-0{,}06t} e^{-0{,}01t} dt + \int_0^\infty e^{-0{,}06(5)} e^{-0{,}01(5)} e^{-0{,}06t} e^{-0{,}02t} dt \\
&= 4{,}218742 + 8{,}808601 \\
&= 13{,}02734
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

16. Diberikan sebagai berikut.

$$\mu_x = \begin{cases} 0,04, & 0 < x < 40 \\ 0,05 & x \geq 40 \end{cases}$$

Hitung $\mathring{e}_{25:\overline{25}|}$

(A) 14

(B) 14,4

(C) 14,8

(D) 15,2

(E) 15,6

Pembahasan

Kita akan menghitung nilai dari $\mathring{e}_{25:\overline{25}|}$.

$$
\begin{aligned}
\mathring{e}_{25:\overline{25}|} &= \int_0^{25} {}_t p_{25} dt \\
&= \int_0^{15} e^{-0{,}04t} dt + e^{-0{,}04(15)} \int_0^{10} e^{-0{,}05t} dt \\
&= 15{,}59852
\end{aligned}
$$

Jawab: E.

17. Untuk suatu “continuous whole life annuity” dari 1 pada (x):

(i) T_x adalah “future lifetime” variabel acak untuk (x)

(ii) “force of interest” dan “force of mortality” adalah konstan dan bernilai sama

(iii) $\bar{a}_x = 12,5$

Hitunglah standar deviasi dari $\bar{a}_{\overline{T_x}|}$(pembulatan terdekat)

(A) 1,67

(B) 2,5

(C) 2,89

(D) 6,25

(E) 7,22

Pembahasan

Diketahui bahwa $\bar{a}_x = 12,5$. Karena *Force of interest* dan *Force of mortality* konstan, maka $\bar{a}_x = \frac{1}{\mu+\delta}$. Kita dapat menghitung bahwa $\mu + \delta = \frac{1}{\bar{a}_x} = \frac{1}{12,5} = 0,08$. Jadi, $\mu = \delta = 0,04$.

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta} = \frac{0,04}{0,08} = \frac{1}{2}$$

$$^2\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+2\delta} = \frac{0,04}{0,12} = \frac{1}{3}$$

$$Var = \frac{1}{\delta^2}\left[^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] = \frac{1}{0,04^2}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 52,0833$$

$$Std = \sqrt{Var} = \sqrt{52,0833} = 7,22$$

Jawab: E.

18. Diberikan suatu fungsi survival:

$$S_0(t) = 1 - (0,01t)^2, \quad 0 \le t \le 100$$

Hitung $\mathring{e}_{30:\overline{50}|}$

(A) 27

(B) 30

(C) 34

(D) 37

(E) 41

Pembahasan

Kita akan menghitung $\mathring{e}_{30:\overline{50}|}$.

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{30:\overline{50}|} &= \int_0^{50} {}_tp_{30}dt \\
&= \int_0^{50} \frac{S(30+t)}{S(30)}dt \\
&= \int_0^{50} \frac{1-\left(\frac{1}{100}(30+t)\right)^2}{1-\left(\frac{1}{100}30\right)^2}dt \\
&= 37{,}1795
\end{aligned}$$

Jawab: D.

19. Diberikan sebagai berikut.

    (i) $A_x = 0,28$

    (ii) $A_{x+20} = 0,4$

    (iii) $A_{x:\overline{20}|}^{1} = 0,25$

    (iv) $i = 0,05$

    Hitung $a_{x:\overline{20}|}$

    (A) 11

    (B) 11,2

    (C) 11,7

    (D) 12

    (E) 12,3

    Pembahasan

    Kita ketahui bahwa $A_{x:\overline{20}|}^{1} = {}_{20}E_x$.

$$\begin{aligned}
A^1_{x:\overline{20}|} &= A_x - {}_{20}E_xA_{x+20} \\
&= 0,28 - 0,25(0,4) \\
&= 0{,}18
\end{aligned}$$

$$A_{x:\overline{20}|} = A^1_{x:\overline{20}|} + A_{x:\overline{20}|}^{1} = 0,18 + 0,25 = 0,43$$

$$\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = \frac{1-A_{x:20}}{d} = \frac{1-0,43}{\frac{0,05}{1,05}} = 11,97$$

$$a_{x:20} = \ddot{a}_{x:\overline{20}|} - 1 + {}_{20}E_x = 11,97 - 1 + 0,25 = 11,22$$

Jawab: B.

20. Suatu “5-year temporary life annuity-immediate” pada (x) membayar 10 per tahun diberikan:

(i) $A^{1}_{x:\overline{5}|} = 0,04$

(ii) ${}^{2}A^{1}_{x:\overline{5}|} = 0,03$

(iii) ${}_{5}p_{x} = 0,94$

(iv) $i = 0,05$

Hitunglah variansi dari “present value 5-year annuity immediate” tersebut (pembulatan terdekat)

(A) 53,8

(B) 73,8

(C) 120,8

(D) 162,8

(E) 200,8

Pembahasan

$$A_{x:\overline{5}|} = A^{1}_{x:\overline{5}|} + A_{x:\overline{5}|}^{\;\;1} = 0,04 + (0,94)1,05^{-5} = 0,7765$$

$${}^{2}A_{x:\overline{5}|} = {}^{2}A^{1}_{x:\overline{5}|} + {}^{2}A_{x:\overline{5}|}^{\;\;1} = 0,03 + (0,94)1,05^{-10} = 0,6071$$

$$Var(Y) = \frac{1}{i^2}\left[{}^{2}A_{x:\overline{5}|} - \left(A_{x:\overline{5}|}\right)^2\right] = \frac{1}{0,05^2}[0,6071 - 0,7765^2] = 1,6591$$

Karena terdapat pembayaran sebesar 10 per tahun, maka sama saja dengan mencari:

$$Z = 10Y$$

$$Var(Z) = Var(10Y) = 100 \cdot Var(Y) = 165,91$$

21. Diberikan sebagai berikut:

(i) $P_x = 0,09$

(ii) “net premium reserve” pada saat akhir tahun ke n untuk suatu “fully discrete whole life insurance” dari 1 pada (x) adalah 0,563

(iii) $P_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = 0,00864$

Hitunglah $P^{1}_{x:\overline{n}|}$

(A) 0,008

(B) 0,024

(C) 0,04

(D) 0,065

(E) 0,085

Pembahasan

$$_nV_x = 1(P_{x+n}) = 0,563$$

$$\begin{aligned} P^{1}_{x:\overline{n}|} &= P_x - P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \cdot P_{x+n} \\ &= 0,09 - 0,00864(0,563) \\ &= 0{,}085136 \end{aligned}$$

Jawab: E.

22. Suatu "fully continuous whole life insurance" yang memiliki manfaat sebesar 1:

    (i) $\mu_x = 0,04, \quad x > 0$

    (ii) $\delta = 0,08$

    (iii) L adalah suatu variabel acak "loss-at-issue" pada "net premium"

    Hitunglah Var(L)

    (A) 1/10

    (B) 1/5

    (C) 1/4

    (D) 1/3

    (E) 1/2

    Pembahasan

    Pertama, kita cari dahulu besar premi netto.

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= P \cdot \bar{a}_x \\ \bar{A}_x &= P\frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \\ P &= \frac{\delta \bar{A}_x}{1 - \bar{A}_x} \\ &= \frac{0,08(\frac{1}{3})}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 0{,}04 \end{aligned}$$

Kita dapat mendefinisikan variabel acak L sebagai:

$$
\begin{aligned}
L &= 1(\bar{A}_x) - P(\bar{a}_x) \\
&= \bar{A}_x - P\frac{1-\bar{A}_x}{\delta} \\
&= \left(1+\frac{P}{\delta}\right)\bar{A}_x - \frac{P}{\delta} \\
\text{Var}(L) &= \text{Var}\left[(1+\frac{P}{\delta})\bar{A}_x - \frac{P}{\delta}\right] \\
&= \left(1+\frac{P}{\delta}\right)^2 \text{Var}(\bar{A}_x) \\
&= \left(1+\frac{0,04}{0,08}\right)^2 \left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] \\
&= 1.5^2\left[\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2\right] \\
&= 0{,}2
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

23. Let $X_1, X_2, ..., X_n$ suatu variabel acak yang bebas, sehingga setiap X_i memiliki "expected value μ" dan variansi σ^2. Jika $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, maka nilai dari $\mathbb{E}[S_n]$ adalah

    (A) μ

    (B) μ/n

    (C) $n\mu$

    (D) nX_i

    (E) ∞

    Pembahasan

    $$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + ... + X_n]$$

    Karena masing-masing variabel acak X_i independen satu sama lain,

    $$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + ... + \mathbb{E}[X_n] = \mu + \mu + ... + \mu = n\mu$$

    Jawab: C.

24. Hitunglah nilai dari $Var(S_n)$ pada soal nomor 23.

    (A) δ

    (B) δ^2

    (C) $n\delta$

    (D) $n\delta^2$

    (E) δ^2/n

    Pembahasan

    $$Var(S_n) = Var(X_1 + X_2 + ... + X_n)$$

    Karena masing-masing variabel acak X_i independen satu sama lain, $Cov(X_i, X_j) = 0$ untuk setiap $i \neq j$.

    $$Var(S_n) = nVar(X_i) = n\sigma^2$$

    Jawab: D.

25. Manakah diantara pernyataan berikut yang benar?

    (1) $\dfrac{P_x(1-A_x)}{A_x} = d$

    (2) $\dfrac{P_x}{A_x - P_x(1-A_x)} = i$

    (3) $\dfrac{A_x - P_x(1-A_x)}{A_x} = v$

    (A) 1

    (B) 1,2

    (C) 1,3

    (D) 2,3

    (E) 1,2,3

    Pembahasan

    Pernyataan 1:

    $$\frac{P_x(1-A_x)}{A_x} = d$$

    $$P_x = \frac{d(A_x)}{1-A_x} = \frac{A_x}{\frac{1-A_x}{d}} = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}$$

Pernyataan 2: Gunakan persamaan yang telah kita peroleh dari bagian (1)

$$\begin{aligned}
d &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
\frac{i}{1+i} &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} + i\,\frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i\left(1-\frac{P_x(1-A_x)}{A_x}\right) &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i\left(\frac{A_x-P_x(1-A_x)}{A_x}\right) &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x-P_x(1-A_x)}
\end{aligned}$$

Jadi pernyataan (2) salah

Pernyataan 3:

$$\begin{aligned}
\frac{A_x-P_x(1-A_x)}{A_x} &= v = 1-d \\
1-\frac{P_x(1-A_x)}{A_x} &= 1-d \\
\frac{P_x(1-A_x)}{A_x} &= d
\end{aligned}$$

Lalu seperti Pernyataan 1.

Jawab: C.

26. Untuk suatu asuransi seumur hidup dengan benefit 1 pada usia (41) dengan benefit kematian dibayarkan pada akhir tahun kematian, diberikan sebagai berikut:

(i) $i = 0,05$

(ii) $p_{40} = 0,9972$

(iii) $A_{41} - A_{40} = 0,00822$

(iv) ${}^2A_{41} - {}^2A_{40} = 0,00433$

(v) Z adalah nilai sekarang dari variabel acak untuk asuransi ini

Hitunglah Var (Z)

(A) 0,023

(B) 0,024

(C) 0,025

(D) 0,026

(E) 0,027

Pembahasan

Kita dapat menulis ulang $A_{41} - A_{40} = 0,00822$ sebagai

$$A_{40} = A_{41} - 0,00822$$

Dengan menggunakan rumus rekursif $A_x = vq_x + vp_x A_{x+1}$,

$$A_{40} = 1.05^{-1} q_{40} + 1.05^{-1} p_{40} A_{41}$$

Kita ketahui juga bahwa $p_{40} = 0,9972$ dan $q_{40} = 1 - p_{40} = 0,0028$. Maka kita peroleh

$$A_{41} = 0,216496$$

Apabila kita ingin menggunakan rumus rekursif ${}^2A_x = (v^*)q_x + (v^*)p_x({}^2A_{x+1})$, kita harus menghitungnya dengan tingkat suku bunga yang dikuadratkan juga. Tingkat suku bunga yang baru (j) menjadi $1 + j = (1 + 5\%)^2 = 1,1025$ sehingga $v^* = 1,1025^{-1}$. Maka kita peroleh

$${}^2A_{41} = 0,071926$$

Kita dapat mencari variansinya:

$$Var(Z) = {}^2A_{41} - A_{41}^2 = 0,025056$$

Jawab: C.

Soal dibawah ini digunakan untuk nomor 27-30

Anda diberikan suatu fungsi survival untuk suatu kelahiran baru (“newborn”)

$$S_0(t) = \frac{(121 - t)^{1/2}}{k}, \quad t \in [0, \omega]$$

27. Hitunglah nilai dari k sehingga $S_0(t)$ menjadi fungsi survival yang valid

(A) 11

(B) 12

(C) 13

(D) 14

(E) 15

Pembahasan

Untuk menjadi fungsi *survival* yang valid, $S_0(0) = 1$. Oleh karena itu,

$$\frac{\sqrt{121-0}}{k} = 1$$

Maka, nilai k adalah 11.

Jawab: A.

28. Hitunglah batas atas usia ω untuk fungsi survival tersebut

(A) 91

(B) 101

(C) 111

(D) 121

(E) 131

Pembahasan

Pertama, kita akan menentukan bentuk dari $f(t)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{d}{dt} S_0(t) \\ &= -\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{121-t}}{11} \\ &= \frac{1}{22}(121-t)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Agar memenuhi fungsi *survival* tersebut,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^w \frac{1}{22}(121-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ 22 &= \int_0^w (121-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ w &= 121 \end{aligned}$$

Jawab: D.

29. Hitunglah nilai dari $\mathring{e}_0$ dari fungsi survival tersebut (pembulatan terdekat)

(A) 81

(B) 95

(C) 105

(D) 121

(E) 140

Pembahasan

Kita akan menghitung nilai dari $\mathring{e}_0$.

$$\begin{aligned}\mathring{e}_0 &= \int_0^{121} S_0(t)dt \\ &= \int_0^{121} \frac{\sqrt{121-t}}{11}dt \\ &= 81\end{aligned}$$

Jawab: A.

30. Hitunglah peluang, dengan menggunakan fungsi survival diatas, orang yang berusia (57) meninggal antara usia 84 dan 100 (pembulatan terdekat)

    (A) 0,11

    (B) 0,15

    (C) 0,16

    (D) 0,18

    (E) 0,19

    Pembahasan

    Peluang orang yang berusia (57) meninggal antara usia 84 dan 100 dapat dinotasikan dengan ${}_{27|16}q_{57}$.

$$\begin{aligned}{}_{27|16}q_{57} &= \left({}_{27}p_{57}\right)\left({}_{16}q_{84}\right) \\ &= \frac{S_0(84)}{S_0(27)}\left(1-\frac{S_0(100)}{S_0(84)}\right) \\ &= \frac{\sqrt{37}-\sqrt{21}}{\sqrt{64}} \\ &= 0{,}1875 = 0{,}19\end{aligned}$$

    Jawab: E.

7 Periode Juni 2015

1. Diketahui sebagai berikut :

    (i) Usia saat kematian berdistribusi seragam (UDD).

    (ii) $\mathring{e}_{20} = 30$

    Hitunglah q_{20}

    A. 1/60

    B. 1/70

    C. 1/80

    D. 1/90

    E. 1/100

    Pembahasan:
    Diketahui bahwa usia kematian berdistribusi seragam dan $\mathring{e}_{20} = 30$. Berdasarkan rumus De'Moivre, kita peroleh:

    $$\mathring{e}_x = \frac{\omega - x}{2}$$
    $$\mathring{e}_{20} = \frac{\omega - 20}{2} = 30$$

    Dengan demikian kita dapatkan $\omega = 80$. Selanjutnya kita akan mencari nilai q_{20}

    $${}_tq_x = \frac{t}{\omega - x}$$
    $$q_{20} = \frac{1}{80 - 20} = \frac{1}{60}$$

    Jadi $q_{20} = \dfrac{1}{60}$
    Jawab: A.

2. Diketahui bahwa $i = 0$.
    Manakah diantara pernyataan berikut yang sama dengan $A_{x:\overline{30|}}$?

    A. ${}_{30}p_x$

B. ${}_{30}q_x$

C. ${}_{30|}p_x$

D. p_{x+30}

E. 1

Pembahasan:
Diberikan $i = 0$.

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{30|}} &= A^1_{x:\overline{30|}} + A_{x:\overline{30|}}^{\ \ \ \ 1} \\ &= \sum_{k=0}^{29} v^k \ {}_{k|}q_x + v^{30} \ {}_{30}p_x \end{aligned}$$

karena $i = 0$ maka kita dapatkan :

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{30|}} &= \sum_{k=0}^{29} {}_{k|}q_x + {}_{30}p_x \\ &= {}_{30}q_x + {}_{30}p_x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jawab: E.

3. Z adalah nilai sekarang dari variabel acak (*present value random variable*) untuk ”15-tahun *pure endowment* dengan benefit sebesar 1 pada (x)”.

   (i) *Force of mortality* adalah konstan selama periode 15 tahun.

   (ii) $v = 0,9$

   (iii) $Var(Z) = 0,065E[Z]$

   Hitunglah q_x

   A. 0,020

   B. 0,025

   C. 0,030

   D. 0,035

   E. 0,040

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
Var(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\
&= v^{30}\ {}_{15}p_x - (v^{15}\ {}_{15}p_x)^2 \\
&= v^{30}\ {}_{15}p_x - v^{30}({}_{15}p_x)^2 \\
&= v^{30}\ {}_{15}p_x(1 - {}_{15}p_x) \\
&= v^{30}\ {}_{15}p_x\ {}_{15}q_x
\end{aligned}$$

Diketahui $Var(Z) = 0,065E[Z]$, dengan demikian kita peroleh:

$$\begin{aligned}
v^{30}\ \ {}_{15}p_x\ {}_{15}q_x &= 0,065v^{15}\ {}_{15}p_x \\
v^{15}\ {}_{15}q_x &= 0,065 \\
{}_{15}q_x &= \frac{0,065}{(0,9)^{15}} \\
&= 0,3157
\end{aligned}$$

karena *force of mortality* adalah konstan, maka kita dapatkan:

$$\begin{aligned}
{}_{15}q_x = 1 - e^{-\mu(15)} &= 0,3157 \\
\mu &= \frac{ln(1-0,3157)}{-15} \\
&= \frac{ln(0,6843)}{-15} \\
&= 0,02529
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita akan mencari nilai dari q_x

$$\begin{aligned}
q_x &= 1 - e^{-\mu} \\
&= 1 - e^{-0,02529} \\
&= 0,025
\end{aligned}$$

Jawab: B.

4. Diberikan sebagai berikut:
   (i) $P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = 0,250$
   (ii) $P_x = 0,035$
   (iii) ${}_nv_x = 0,110$

Hitunglah $1000P^{1}_{x:\overline{n}|}$

A. 7,5 B. 8,0 C. 8,5 D. 9,0 E. 9,5

Pembahasan:

$$\begin{aligned} P_x &= P^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_n v_x P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\ 0,035 &= P^{1}_{x:\overline{n}|} + (0,110)(0,250) \\ P^{1}_{x:\overline{n}|} &= 0,0075 \end{aligned}$$

Dengan demikian $1000P^{1}_{x:\overline{n}|} = 7,5$

Jawab: A.

5. Diketahui dari suatu tabel *double-decrement*:
   (i) $q^{(1)}_{71} = 0,02$
   (ii) $q^{(2)}_{71} = 0,06$
   (iii) Setiap *decrement* berdistribusi seragam (*UDD*) pada setiap tahun usia dalam tabel *double-decrement*.

   Hitunglah $1000q'^{(1)}_{71}$.

   A. 20,57 B. 20,59 C. 20,61 D. 20,63 E. 20,65

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} q^{(\tau)}_{71} &= q^{(1)}_{71} + q^{(2)}_{71} \\ &= 0,02 + 0,06 \\ &= 0,08 \\ p^{(\tau)}_{71} &= 1 - q^{(\tau)}_{71} \\ &= 0,92 \end{aligned}$$

karena setiap *decrement* berdistribusi seragam, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned} p'^{(1)}_{71} &= p^{(\tau)\ \frac{q^{(1)}_{71}}{q^{(\tau)}_{71}}}_{71} \\ &= (0,92)^{\frac{0,02}{0,08}} \\ &= (0,92)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} q_{71}^{\prime(1)} &= 1 - p_{71}^{\prime(1)} \\ &= 1 - (0,92)^{\frac{1}{4}} \\ &= 0,02062964 \end{aligned}$$

Dengan demikian $1000 q_{71}^{\prime(1)} = 20,62964 \approx 20,63$

Jawab: D.

6. Untuk suatu model "*2-year selection and ultimate mortality*", diketahui:
   (i) $q_{[x]+1} = 0,96 q_{x+1}$
   (ii) $l_{76} = 76.213$
   (iii) $l_{77} = 75.880$

   Hitunglah $l_{[75]+1}$

   A. 75.900
   B. 76.000
   C. 76.100
   D. 76.200
   E. 76.300

   Pembahasan:

$$\begin{aligned} q_{[75]+1} &= \frac{l_{[75]+1} - l_{77}}{l_{[75]+1}} \\ q_{75+1} = q_{76} &= \frac{l_{76} - l_{77}}{l_{76}} \end{aligned}$$

Diketahui bahwa $q_{[x]+1} = 0,96 q_{x+1}$. Dengan demikian kita peroleh:

$$\begin{aligned} q_{[75]+1} &= 0,96 q_{76} \\ \frac{l_{[75]+1} - l_{77}}{l_{[75]+1}} &= 0,96 \left(\frac{l_{76} - l_{77}}{l_{76}} \right) \\ \frac{l_{[75]+1} - 75.880}{l_{[75]+1}} &= 0,96 \left(\frac{76.213 - 75.880}{76.213} \right) \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita dapatkan:

$$l_{[75]+1} = 76.199,624 \approx 76.200$$

Jawab: D.

7. Asuransi seumur hidup diskrit sepenuhnya (*fully discrete whole life*) dengan nilai pertanggungan 10.000 pada (x), diberikan:
   (i) Kematian berdistribusi uniform setiap tahun usia (UDD)
   (ii) Premi manfaat tahunan adalah 645,5
   (iii) Cadangan premi pada akhir tahun ke-4 sebesar 1.000
   (iv) $q_{x+4} = 0,04$
   (v) $i = 0,03$

   Hitunglah cadangan premi pada akhir tahun ke 4,5

   A. 1.323
   B. 1.349
   C. 1.500
   D. 1.525
   E. 1.542

   Pembahasan:
   Diberikan: Nilai pertanggungan (b) = 10.000.
   Premi manfaat tahunan (P) = 645,5
   Cadangan premi pada akhir tahun ke-4 (${}_4V$) = 1000

$$\begin{aligned} q_{x+4} &= 0,04 \\ i &= 0,03 \end{aligned}$$

   Karena kematian berdistribusi seragam, maka:

$$\begin{aligned} {}_sq_{x+4} &= s.q_{x+4} \\ {}_sp_{x+4} &= 1 - {}_sq_{x+4} \end{aligned}$$

   dengan demikian

$$\begin{aligned} {}_{0,5}q_{x+4} &= 0,5.q_{x+4} \\ &= (0,5)(0,04) \\ &= 0,02 \end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
{}_{0,5}p_{x+4} &= 1 - 0,02 \\
&= 0,98
\end{aligned}
$$

berikutnya, kita akan menggunakan rumus rekursif untuk menghitung cadangan premi pada akhir tahun ke 4,5.

$$({}_{n}V + P)(1+i)^{s} = v^{1-s} b \ {}_{s}q_{x+h} + \ {}_{s}p_{x+h} \ {}_{h+s}V$$

subtitusikan $n = 4$, $s = 0,5$, dan $h = 4$, sehingga kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
({}_{4}V + P)(1+i)^{0,5} &= v^{0,5} b \ {}_{0,5}q_{x+4} + \ {}_{0,5}p_{x+4} \ {}_{4,5}V \\
(1000 + 645,5)(1,03)^{0,5} &= 1,03^{-0,5}(10.000)(0,02) + (0,98) \ {}_{4,5}V \\
{}_{4,5}V &= \frac{(1000 + 645,5)(1,03)^{0,5} - 1,03^{-0,5}(10.000)(0,02)}{0,98} \\
&= 1.502,99 \\
&\approx 1.500
\end{aligned}
$$

Jawab: C.

8. Diberikan suatu fungsi survival $S_0(x)$,dimana:

   $S_0(x) = 1$, $\quad 0 \leq x < 1$

   $S_0(x) = 1 - \dfrac{e^x}{100}$, $\quad 1 \leq x < 4,5$

   $S_0(x) = 0$, $\quad 4,5 \leq x$

   Hitunglah nilai dari μ_4

   A. 0,45 B. 0,55 C. 0,80 D. 1,00 E. 1,20

Pembahasan:

$$\mu_{x+t} = -\frac{S_x'(t)}{S_x(t)}$$

karena kita ingin mendapatkan nilai dari μ_4, maka kita akan menggunakan $S_0(x)$ untuk $1 \leq x < 4,5$

$$
\begin{aligned}
S_0(x) &= 1 - \frac{e^x}{100} \\
S_0'(x) &= -\frac{e^x}{100}
\end{aligned}
$$

dengan demikian kita peroleh:

$$\begin{aligned}\mu_4 &= -\frac{S_0'(4)}{S_0(4)} \\ &= \frac{\frac{e^4}{100}}{1-\frac{e^4}{100}} \\ &= \frac{e^4}{100-e^4} = 1,203 \approx 1,2\end{aligned}$$

Jawab: E.

9. Suatu asuransi seumur hidup (*whole life insurance*) dengan *benefit* 1 pada (X), diketahui:
   (i) Force of mortality adalah μ_{x+t}.
   (ii) *Benefit* dibayarkan pada saat kematian (*moment of death*)
   (iii) $\delta = 0,06$
   (iv) $\bar{A}_x = 0,60$

   Hitunglah $\bar{A}'_x$ (*revised expected present value*) dari asuransi ini dengan mengasumsikan μ_{x+t} naik sebesar 0,03 untuk semua t dan δ turun sebesar 0,03.

   A. 0,5 B. 0,6 C. 0,7 D. 0,8 E. 0,9

   Pembahasan:
   Pada kasus ini, diketahui bahwa *force of mortality* dan *force of interest* adalah konstan, sehingga nilai saat ini dari asuransi seumur hidup adalah:

$$\bar{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta}$$

   dengan μ adalah *force of mortality* dan δ adalah *force of interest*.

$$\begin{aligned}0,60 &= \frac{\mu}{\mu+0,06} \\ \mu &= 0,09\end{aligned}$$

   Berikutnya diasumsikan bahwa μ_{x+t} naik sebesar 0,03 dan δ turun sebesar 0,03. Dengan demikian kita peroleh:

$$\mu' = 0,09 + 0,03 = 0,12$$

dan

$$\delta' = 0,06 - 0,03 = 0,03$$

Revised expected present value dari asumsi ini adalah:

$$\begin{aligned}\bar{A}'_x &= \frac{\mu'}{\mu' + \delta'} \\ &= \frac{0,12}{0,12 + 0,03} \\ &= 0,8\end{aligned}$$

Jawab: D.

10. Diberikan sebagai berikut:
    (i) $A_x = 0,22$
    (ii) $A_{x+25} = 0,46$
    (iii) $A_{x:\overset{1}{\overline{25}|}} = 0,20$
    (iv) $i = 0,06$

    Hitunglah $a_{x:\overline{25}|}$

    A. 9,8

    B. 10,1

    C. 10,4

    D. 10,9

    E. 11,1

    Pembahasan:
    Pertama-tama kita akan menghitung nilai dari $A^1_{x:\overline{25}|}$

$$\begin{aligned}A^1_{x:\overline{25}|} &= A_x - A^{\;\;1}_{x:\overline{25}|}A_{x+25} \\ &= 0,22 - (0,20)(0,46) \\ &= 0,128\end{aligned}$$

Berikutnya kita akan menghitung nilai dari $A_{x:\overline{25}|}$

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{25}|} &= A^1_{x:\overline{25}|} + A_{x:\overline{25}|}^{\ \ \ 1} \\ &= 0,128 + 0,20 \\ &= 0,328 \end{aligned}$$

selanjutnya menggunakan hubungan antara *expected present value* dari anuitas jiwa dan *expected present value* dari asuransi jiwa.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{25}|} &= \frac{1 - A_{x:\overline{25}|}}{d} \\ &= \frac{1 - 0,328}{\frac{0,06}{1,06}} \\ &= 11,872 \end{aligned}$$

dengan demikian kita peroleh:

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{25}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{25}|} - 1 + A_{x:\overline{25}|}^{\ \ \ 1} \\ &= 11,872 - 1 + 0,2 \\ &= 11,072 \approx 11,1 \end{aligned}$$

Jawab: E.

11. Dua orang aktuaris menggunakan tabel mortalitas yang sama untuk menghitung premi dari sebuah asuransi *fully discrete 2-year endowment* dari *benefit* 1000 pada (x)

    (i) Kevin menghitung *non-level benefit premiums* dari 608 untuk tahun pertama dan 350 untuk tahun kedua.

    (ii) Kira menghitung *level annual benefit premiums* dari π

    (iii) $d = 0,05$

    Hitunglah π.

    A. 482 B. 489 C. 497 D. 508 E. 517

    Pembahasan:
    Kedua premi memiliki *present value* yang sama, dan nilai tersebut juga sama dengan *present value* dari benefit. Hal ini berarti:

$$\begin{aligned} EPV_{kevin}(premium) = EPV_{kira}(premium) = EPV(benefit) \\ 608 + 350\, v\, p_x = \pi(1 + v\, p_x) = 1000\, v\, q_x + 1000\, v^2\, p_x \end{aligned}$$

karena diberikan $v = 1 - d = 0,95$, maka kita bisa mendapatkan nilai dari p_x dengan menyelesaikan bagian pertama dan ketiga dari persamaan di atas.

$$\begin{aligned} 608 + 350(0,95)(p_x) &= 1000(0,95)(q_x) + 1000(0,95)^2(p_x) \\ 608 + 332,5(p_x) &= 950(1 - p_x) + 902,5(p_x) \\ 380\ p_x &= 342 \\ p_x &= 0,9 \end{aligned}$$

subtitusikan nilai $p_x = 0,9$ ke dalam bagian pertama dan kedua dari persamaan awal, sehingga kita peroleh:

$$\begin{aligned} 608 + 350(0,95)(0,9) &= \pi(1 + (0,95)(0,9)) \\ \pi &= 489,1 \approx 489 \end{aligned}$$

Jawab: B.

12. Untuk suatu asuransi *fully discrete whole life* dari *benefit* 1000 pada (20), diberikan sebagai berikut:

   (i) $1.000P_{20} = 10$

   (ii) Cadangan benefit untuk asuransi ini adalah

      (a) ${}_{20}V = 490$

      (b) ${}_{21}V = 545$

      (c) ${}_{22}V = 605$

   (iii) $q_{40} = 0,022$

   Hitunglah q_{41}

   A. 0,024

   B. 0,025

   C. 0,026

   D. 0,027

   E. 0,028

   Pembahasan:

   Diberikan $1000P_{20} = 10$ dan $b = 1.000$ Menggunakan rumus rekursif untuk cadangan benefit:

$$({}_hV + P_h)(1 + i) = {}_{h+1}V + q_{x+h}(b - {}_{h+1}V)$$

dengan demikian kita peroleh:

$$\begin{aligned}({}_{20}V + 1000P_{20})(1+i) &= {}_{21}V + q_{40}(b - {}_{21}V) \\ (490+10)(1+i) &= 545 + (0,022)(1.000 - 545) \\ (500)(1+i) &= 555,01 \\ (1+i) &= \frac{555,01}{500}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}({}_{21}V + 1000P_{21})(1+i) &= {}_{22}V + q_{41}(b - {}_{22}V) \\ (545+10)\left(\frac{555,01}{500}\right) &= 605 + q_{41}(1.000 - 605) \\ 616,0611 &= 605 + 395\, q_{41} \\ q_{41} &= 0,028002 \\ q_{41} &\approx 0,028\end{aligned}$$

Jawab: E.

13. Manakah diantara pernyataan berikut yang benar?

(1) $\dfrac{P_x(1-A_x)}{A_x} = d$

(2) $\dfrac{P_x}{A_x - P_x(1-A_x)} = i$

(3) $\dfrac{A_x - P_x(1-A_x)}{A_x} = v$

A. 1

B. 1,2

C. 1,3

D. 2,3

E. 1,2,3

Pembahasan:

(1) $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x} = \dfrac{A_x}{\frac{(1-A_x)}{d}}$

dengan demikian $d = \dfrac{P_x(1-A_x)}{A_x}$

Jadi pernyataan (1) benar

(2) Gunakan persamaan yang telah kita peroleh dari bagian (1)

$$\begin{aligned}
d &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
\frac{i}{1+i} &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} + i\,\frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i\left(1 - \frac{P_x(1-A_x)}{A_x}\right) &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i\left(\frac{A_x - P_x(1-A_x)}{A_x}\right) &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
i &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x - P_x(1-A_x)}
\end{aligned}$$

Jadi pernyataan (2) salah

(3)

$$\begin{aligned}
d &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
1 - v &= \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
v &= 1 - \frac{P_x(1-A_x)}{A_x} \\
v &= \frac{A_x - P_x(1-A_x)}{A_x}
\end{aligned}$$

Jadi pernyataan (3) benar

Jwab: C.

14. Diberikan sebagai berikut :

$$\mu_x = 0,05 \quad 50 \le x < 60$$
$$\mu_x = 0,04 \quad 60 \le x < 70$$

Hitunglah ${}_{4|14}q_{50}$

A. 0,38

B. 0,39

C. 0,41

D. 0,43

E. 0,44

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_{10}p_{50} &= e^{-\int_0^{10} 0{,}05dt} = e^{-0{,}05(10)} = e^{-0{,}5} = 0,6065 \\
{}_{4}p_{50} &= e^{-\int_0^{4} 0{,}05dt} = e^{-0{,}05(4)} = e^{-0{,}2} = 0,8187 \\
{}_{8}p_{60} &= e^{-\int_0^{8} 0{,}04dt} = e^{-0{,}04(8)} = e^{-0{,}32} = 0,7261 \\
{}_{18}p_{50} &= {}_{10}p_{50} \times {}_{8}p_{60} = 0,6065 \times 0,7261 = 0,4404
\end{aligned}
$$

dengan demikian

$$
\begin{aligned}
{}_{4|14}q_{50} &= {}_{4}p_{50} - {}_{18}\, p_{50} \\
&= 0,8187 - 0,4404 \\
&= 0,3783 \\
&\approx 0,38
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

Gunakan informasi dibawah ini untuk pertanyaan no 15-17 (dibulatkan ke angka terdekat)

Suatu "*fully discrete 2-payment, 3-year term insurance*" dengan *benefit* kematian 10.000 pada (x) diberikan :

(i) $i = 0,05$

(ii) $q_x = 0,1 \qquad q_{x+1} = 0,15 \qquad q_{x+2} = 0,20$

(iii) Kematian adalah satu-satunya *decrement*

(iv) Biaya, dibayarkan pada saat awal tahun, adalah:

Tahun Polis	Per Polis	Per 1.000 dari benefit kematian	% *dari gross premium*
1	25	4,5	0,20
2	10	1,5	0,10
3	10	1,5	-

(v) Biaya tambahan, dibayarkan pada akhir tahun saat terjadi kematian, sebesar 20 per polis ditambahkan 1 per 1.000 dari *benefit* kematian

(vi) G adalah gross premium tahunan untuk asuransi ini

(vii) *Net single premium* untuk asuransi ini adalah 3.499

15. Hitunglah nilai dari *present value* yang diharapkan semua biaya dalam G.

    A. 101,9 + 0,286G

    B. 108,8 + 0,286G

    C. 119,3 + 0,286G

    D. 182,2 + 0,286G

    E. 546,8 + 0,286G

    Pembahasan:
    Di Anulir

16. Hitunglah G dengan menggunakan prinsip ekuivalen

    A. 1.597 B. 2.296 C. 2.303 D. 2.343 E. 2.575

    Pembahasan:
    Di Anulir

17. Hitunglah *gross premium reserve* untuk asuransi ini pada saat akhir tahun 1

    A. 670 B. 710 C. 860 D. 920 E. 950

    Pembahasan:
    Di Anulir

18. Untuk suatu tabel *double-decrement*, diberikan:

    (i) $q_x^{'(2)} = 2q_x^{'(1)}$

    (ii) $q_x^{'(1)} + q_x^{'(2)} = q_x^{(\tau)} + 0,18$

    Hituglah $q_x^{'(2)}$

    A. 0,2

    B. 0,3

    C. 0,4

    D. 0,6

    E. 0,7

Pembahasan:

$$\begin{aligned} q_x'^{(1)} + q_x'^{(2)} &= 1 - p_x^{(\tau)} + 0,18 \\ &= 1 - p_x'^{(1)} p_x'^{(2)} + 0,18 \\ &= 1 - (1 - q_x'^{(1)})(1 - q_x'^{(2)}) + 0,18 \\ &= 1 - (1 - q_x'^{(1)} - q_x'^{(2)} + q_x'^{(1)} q_x'^{(2)}) + 0,18 \\ &= q_x'^{(1)} + q_x'^{(2)} - q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} + 0,18 \end{aligned}$$

dengan demikian kita dapatkan:

$$\begin{aligned} q_x'^{(1)} q_x'^{(2)} &= 0,18 \\ q_x'^{(1)} (2q_x'^{(1)}) &= 0,18 \\ (q_x'^{(1)})^2 &= 0,09 \\ q_x'^{(1)} &= 0,3 \end{aligned}$$

Diperoleh $q_x'^{(2)} = 2q_x'^{(1)} = 0,6$

Jawab: D.

19. Untuk suatu tabel *double-decrement*, diberikan:
    (i) $q_x^{'(2)} = \dfrac{1}{8}$
    (ii) ${}_{1|}q_x^{(1)} = \dfrac{1}{4}$
    (iii) $q_{x+1}^{(1)} = \dfrac{1}{3}$

    Hitunglah $q_x^{'(1)}$

    A. 1/4
    B. 1/5
    C. 1/6
    D. 1/7
    E. 1/8

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
{}_{1|}q_x^{(1)} &= p_x^{(\tau)} q_{x+1}^{(1)} \\
\frac{1}{4} &= p_x^{(\tau)} . \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

kita peroleh $p_x^{(\tau)} = \dfrac{3}{4}$. Berikutnya substitusikan nilai tersebut ke dalam persamaan di bawah ini.

$$
\begin{aligned}
p_x^{(\tau)} &= p_x^{\prime(1)} p_x^{\prime(2)} \\
\frac{3}{4} &= (1 - q_x^{\prime(1)})(1 - q_x^{\prime(2)}) \\
&= (1 - q_x^{\prime(1)})(1 - \frac{1}{8}) \\
&= (1 - q_x^{\prime(1)})(\frac{7}{8})
\end{aligned}
$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita dapatkan $q_x^{\prime(1)} = \dfrac{1}{7}$

Jawab: D.

20. Diberikan suatu kematian mengikuti $l_x = 100 - x, \quad 0 \leq x \leq 100.$
Hitunglah $e_{85,2}$
    A. 6.890
    B. 6.895
    C. 6.900
    D. 6.905
    E. 6.910

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
e_{85,2} &= \sum_{k=1}^{14} {}_k p_{85,2} \\
&= \sum_{k=1}^{14} \frac{14,8 - k}{14,8} \\
&= 14 - \frac{(14)(15)/2}{14,8} \\
&= 6,90541 \\
&\approx 6,905
\end{aligned}
$$

Jawab: D

21. Jika diketahui sebagai berikut:

    (i) Kematian berdistribusi *uniform* dengan $\omega = 100$

    (ii) x dan y adalah *independent lives* pada usia 90 untuk keduanya

    Hitunglah peluang *last survivor* dari x dan y akan meninggal antara usia 95 dan 96

    A. 0,05 B. 0,06 C. 0,10 D. 0,11 E. 0,20

Pembahasan:

$$_{t|u}q_{\overline{xy}} = {}_{t+u}q_{\overline{xy}} - {}_{t}q_{\overline{xy}}$$

karena x dan y adalah *independent*, serta keduanya memiliki usia yang sama. maka persamaan di atas dapat kita tuliskan lagi menjadi:

$$\begin{aligned} _{t|u}q_{\overline{xy}} &= {}_{t+u}q_{x}\ {}_{t+u}q_{y} - {}_{t}q_{x}\ {}_{t}q_{y} \\ &= ({}_{t+u}q_{x})^2 - ({}_{t}q_{x})^2 \end{aligned}$$

selanjutnya, karena diketahui bahwa kematian berdistribusi seragam dengan $\omega = 100$, maka kita peroleh:

$$_{6}q_{90} = \frac{6}{100-90} = \frac{6}{10}$$

dan

$$_{5}q_{90} = \frac{5}{100-90} = \frac{5}{10}$$

dengan demikian peluang *last survivor* dari x dan y akan meninggal antara 95 dan 96 adalah

$$\begin{aligned} _{5|}q_{\overline{90:90}} &= \left(\frac{6}{10}\right)^2 - \left(\frac{5}{10}\right)^2 \\ &= \frac{11}{100} = 0,11 \end{aligned}$$

Jawab: D.

22. Jika diketahui $\mu_x = 1/(100 - x) \quad ; 0 < x < 100$
Hitunglah $\mathring{e}_{80:90}$

A. 3,17
B. 4,17
C. 4,57
D. 4,67
E. 5,00

Pembahasan:
Diketahui bahwa kematian berdistribusi seragam dengan laju kematian adalah:

$$\mu_x = \frac{1}{(100 - x)} \quad ; 0 < x < 100$$

$E(T_x) = \dfrac{\omega - x}{2}$ dengan $\omega = 100$

$$\begin{aligned} E(T_{80}) &= \frac{100 - 80}{2} = 10 \\ E(T_{90}) &= \frac{100 - 90}{2} = 5 \end{aligned}$$

Nilai maksimum dari $T_{80:90}$ adalah

$$min(100 - 80, 100 - 90) = min(20, 10) = 10$$

karena kematian berdistribusi seragam, maka:

$$E(T_{x:y}) = \frac{min(\omega - x, \omega - y)}{2} - \frac{1}{6} \frac{(min(\omega - x, \omega - y))^2}{max(\omega - x, \omega - y)}$$

dengan demikian kita peroleh:

$$\begin{aligned} E(T_{80:90}) &= \mathring{e}_{80:90} \\ &= \frac{10}{2} - \frac{1}{6} \frac{10^2}{20} \\ &= \frac{25}{6} \\ &= 4,167 \\ &\approx 4,17 \end{aligned}$$

Jawab: B.

Gunakan informasi dibawah ini untuk pertanyaan no 23-26.

Diberikan sebagai berikut:

(i) (30) dan (50) adalah suatu *independent lives* dengan *constant force of mortality*, $\mu = 0,05$

(ii) $\delta = 0,03$

23. Hitunglah ${}_{10}q_{\overline{30:50}}$

A. 0,155 B. 0,368 C. 0,424 D.0,632 E. 0,845

Pembahasan:

$${}_{10}q_{\overline{30:50}} = {}_{10}q_{30} \ {}_{10}q_{50}$$

karena laju kematian adalah konstan sebesar 0,05 maka:

$$\begin{aligned}
{}_{10}q_{\overline{30:50}} &= (1 - {}_{10}p_{30})(1 - {}_{10}p_{50}) \\
&= (1 - e^{-0,05(10)})(1 - e^{-0,05(10)}) \\
&= (1 - e^{-0,05(10)})^2 \\
&= 0,15482 \\
&= 0,155
\end{aligned}$$

Jawab: A.

24. Hitunglah $\mathring{e}_{\overline{30:50}}$

A. 10 B. 20 C. 30 D. 40 E. 50

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{\overline{30:50}} &= \int_0^\infty {}_tp_{\overline{30:50}} \ dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_{30} + {}_tp_{50} - {}_tp_{30}\,{}_tp_{50} \ dt \\
&= \int_0^\infty e^{-0,05t} + e^{-0,05t} - (e^{-0,05t})^2 \ dt \\
&= \int_0^\infty 2e^{-0,05t} - e^{-0,1t} \ dt \\
&= \left.\frac{2e^{-0,05t}}{-0,05}\right|_{t=0}^{\infty} + \left.\frac{e^{-0,1t}}{0,1}\right|_{t=0}^{\infty} \\
&= 40 - 10 \\
&= 30
\end{aligned}$$

Jawab: C.

25. Hitunglah $Var(T_{30:50})$

A. 50 B. 100 C. 150 D. 200 E. 400

Pembahasan:
karena x dan y independen, maka ${}_tp_{xy} = \ {}_tp_x \ {}_tp_y$

$$\begin{aligned} {}_tp_{30:50} &= {}_tp_{30} \ {}_tp_{50} \\ &= (e^{-\mu t})(e^{-\mu t}) \\ &= (e^{-2\mu t}) \\ &= e^{-0,1t} \end{aligned}$$

Berikutnya kita akan menghitung $Var(T_{30:50})$

$$\begin{aligned} Var(T_{30:50}) &= \int_0^\infty 2t \ {}_tp_{30:50} \ dt - \left(\int_0^\infty {}_tp_{30:50} \ dt \right)^2 \\ &= \int_0^\infty 2t \ e^{-0,1t} \ dt - \left(\int_0^\infty e^{-0,1t} \ dt \right)^2 \\ &= 2\left(\frac{te^{-0,1t}}{(-0,1)} \Bigg|_{t=0}^{\infty} + 10 \int_0^\infty e^{-0,1t} \ dt \right) - (10)^2 \\ &= 2(100) - 100 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Jawab: B.

26. Hitunglah $Cov(T_{30:50}, T_{\overline{30:50}})$

A. 10 B. 25 C. 50 D. 100 E. 200

Pembahasan:
karena laju kematian adalah konstan dan kedua individu saling independen, maka:

$$\begin{aligned} E(T_{30}) &= E(T_{50}) \\ &= \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1}{0,05} = 20 \end{aligned}$$

Dari jawaban nomor 25, diketahui bahwa:

$$E(T_{30:50}) = \int_0^\infty {}_tp_{30:50}\ dt = \int_0^\infty e^{-0,1t}\ dt = 10$$

dengan demikian

$$\begin{aligned} Cov(T_{30:50}, T_{\overline{30:50}}) &= (E(T_{30}) - E(T_{30:50}))(E(T_{50}) - E(T_{30:50})) \\ &= (20-10)(20-10) = 100 \end{aligned}$$

Jawab: D.

27. Diberikan sebagai berikut:
    (i) $A_{x:\overline{n}|} = u$
    (ii) $A^1_{x:\overline{n}|} = y$
    (iii) $A_{x+n} = z$

    Hitunglah nilai dari A_x

    A. $(1-z)y + uz$
    B. $(1-z)u + yz$
    C. $(1+z)y - uz$
    D. $(1+z)u - yz$
    E. $(1+z)u - y$

    Pembahasan:

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \\ u &= y + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = u - y$. Selanjutnya kita akan menghitung nilai dari A_x.

$$\begin{aligned} A_x &= A^1_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}\ A_{x+n} \\ &= y + (u-y)z \\ &= y + uz - yz \\ &= (1-z)y + uz \end{aligned}$$

Jawab: A.

28. Diberikan sebagai berikut:

(i) $A_x = 0,632$

(ii) $A_{x+1} = 0,644$

(iii) $i = 3\%$

Hitunglah q_x

A. $q_x < 0,013$

B. $0,013 \leq q_x < 0,015$

C. $0,015 \leq q_x < 0,017$

D. $0,017 \leq q_x < 0,019$

E. $0,019 \leq q_x$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} A_x &= v\ q_x + v\ p_x\ A_{x+1} \\ 0,632 &= \frac{1}{1,03}\ q_x + \frac{1}{1,03}\ (1 - q_x)(0,644) \\ &= 0,97\ q_x + 0,625(1 - q_x) \\ &= 0,625 + 0,345\ q_x \end{aligned}$$

dengan menyelesaikan persamaan di atas diperoleh $q_x = 0,02029$
Jadi $q_x \geq 0,019$

Jawab: E.

29. Diberikan sebagai berikut:

(i) $\mu_{x+t} = 0,01 \qquad 0 \leq t < 5$

(ii) $\mu_{x+t} = 0,02 \qquad 5 \leq t$

(iii) $\delta = 0,06$

Hitunglah $\bar{a}_x$

A. 12,5 B. 13,0 C. 13,4 D. 13,9 E. 14,3

Pembahasan:
Untuk $0 \leq t < 5$ diperoleh:

$$v^t\ {}_tp_x = e^{-0,06t}e^{-0,01t} = e^{-0,07t}$$

Untuk $t \geq 5$ diperoleh:

$$\begin{aligned} v^t \; {}_tp_x &= e^{-0,06t}e^{-0,05}e^{-0,02(t-5)} \\ &= e^{-0,06t}e^{-0,05}e^{-0,02t+0,1} \\ &= e^{-0,08t+0,05} \end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} \bar{a}_x &= \int_0^{\infty} v^t \; {}_tp_x \; dt \\ &= \int_0^5 v^t \; {}_tp_x \; dt + \int_5^{\infty} v^t \; {}_tp_x \; dt \\ &= \int_0^5 e^{-0,07t} dt + \int_5^{\infty} e^{-0,08t+0,05} dt \\ &= \left. \frac{e^{-0,07t}}{(-0,07)} \right|_{t=0}^{t=5} + e^{0,05} \left. \frac{e^{-0,08t}}{(-0,08)} \right|_{t=5}^{t=\infty} \\ &= 4,21874 + 8,8086 \\ &= 13,02734 \\ &\approx 13 \end{aligned}$$

Jawab: B.

30. Untuk $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$;
    (i) $X_1, X_2, ...$ setiap x berdistribusi eksponential dengan rata-rata θ
    (ii) Variabel acak $N, X_1, X_2, ...$ saling independen
    (iii) N berdistribusi Poisson dengan rata-rata 1; dan
    (iv) $M_S(1) = 3$

    Tentukan nilai dari θ

    A. 0,50
    B. 0,52
    C. 0,54
    D. 0,56
    E. 0,58

    Pembahasan:

Gunakan rumus MGF untuk *compound poisson distribution*

$$
\begin{aligned}
M_s(t) &= M_N(\ln M_x(t)) \\
&= M_N\left(\ln \frac{1}{1-\theta t}\right) \\
&= e^{\lambda(e^{\ln(\frac{1}{1-\theta t})}-1)} \\
&= e^{\lambda(\frac{1}{1-\theta t}-1)} \\
&= e^{\lambda(\frac{\theta t}{1-\theta t})}
\end{aligned}
$$

Diberikan $\lambda = 1$, $\theta = \theta$, dan $M_s(1) = 3$, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
M_s(1) = e^{(\frac{\theta}{1-\theta})} &= 3 \\
e^{(\frac{\theta}{1-\theta})} &= 3 \\
\frac{\theta}{1-\theta} &= \ln 3
\end{aligned}
$$

Selesaikan persamaan di atas dan diperoleh $\theta = \dfrac{\ln 3}{1+\ln 3} = 0,5235 \approx 0,52$
Jawab: B.

8 Periode November 2014

1. Sebuah variable acak dari distribusi age-at-failure, didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{10}(100 - x)^{1/2}; 0 \leq x \leq 100$$

Carilah nilai $\mathbb{E}(X)$ yang paling mendekati, bila diketahui fungsi $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty S_x(x)dx$

A. 33,33

B. 1,67

C. 66,67

D. 203,07

E. 167,67

Pembahasan

Diketahui $F(x) = 1 - \frac{1}{10}(100 - x)^{1/2}; 0 \leq x \leq 100$.
Lalu kita tahu bahwa $S(x) = 1 - F(x) = \frac{1}{10}(100 - x)^{1/2}$ sehingga

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X] &= \int_0^{100} S(x)dx \\ &= \int_0^{100} \frac{1}{10}(100 - x)^{1/2}dx \\ &= \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Jawab: C.

2. Hitunglah nilai dari $\ddot{a}_{x:\overline{4}|}$, diketahui sebagai berikut:

$$\ddot{a}_{x:\overline{4}|} = \mathbb{E}[\ddot{Y}_{x:\overline{4}|}]$$

k	$\ddot{a}_{\overline{k}|}$	$_{k-1|}q_x$
1	1,00	0,33
2	1,93	0,24
3	2,80	0,16
4	3,62	0,11

A. 2,2186

B. 2,2862

C. 2,1862

D. 2,1268

E. 2,2681

Pembahasan

Kita akan menghitung nilai dari $\ddot{a}_{x:\overline{4}|}$.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{4}|} &= \ddot{a}^{1}_{x:\overline{4}|} + \ddot{a}_{x:\overline{4}|}^{\;\;1} \\ &= \sum_{k=0}^{3} {}_{k|}q_x \cdot \ddot{a}_{\overline{k+1}|} + {}_4p_x \cdot \ddot{a}_4 \\ &\quad \text{dengan } {}_4p_x = 1 - \sum_{k=0}^{3} {}_{k|}q_x = 0,27 \\ &= [(0,33)(1) + (0,24)(1,93) + (0,16)(2,8)] + (0,27)(3,62) \\ &= 2{,}2186 \end{aligned}$$

Jawab: A.

3. Sebuah perusahaan mesin cuci menyediakan garansi perbaikan untuk setiap mesin baru yang di jual. Perusahaan mengharuskan customer membayar 50 (deductible) untuk setiap perbaikan. Tabel di bawah ini menunjukkan biaya perbaikan selama ini.

Event	Loss amount (x)
A	25
B	52
C	70
D	75
E	150

Hitunglah berapa variance untuk biaya yang dibayarkan oleh perusahaan pada setiap kejadian kerusakan?

A. 10.580,14

B. 10.480,24

C. 1.431,44

D. 1.341,44

E. 1.250,25

Pembahasan

Diketahui terdapat biaya minimum yang harus dibayar tertanggung (deductible) sebesar 50, sehingga biaya yang harus ditanggung perusahaan (L) menjadi $x - 50$.

Kejadian	L	L^2
A	0	0
B	2	4
C	20	400
D	25	625
E	100	10.000
	$\bar{L} = 29,4$	$\sum L^2 = 11.029$

Kita dapat menghitung variansinya.

$$\begin{aligned} \text{Variansi} &= \frac{\sum L^2}{n} - \bar{L}^2 \\ &= \frac{11.029}{5} - (29,4)^2 \\ &= 1.341,44 \end{aligned}$$

Jawab: D.

4. Sebuah asuransi seumur hidup sebesar 1 untuk seorang berusia 41 tahun, dengan manfaat meninggal yang dibayarkan di akhir tahun kematian. Diketahui:

   - $i = 5\%$
   - $P_{40} = 0,9972$
   - $A_{41} - A_{40} = 0,00822$
   - ${}^2A_{41} - {}^2A_{40} = 0,00433$
   - Z adalah nilai sekarang dari variabel acak dari asuransi ini

   Hitung $Var(Z)$.

   A. 0,02343

   B. 0,02434

   C. 0,02544

   D. 0,02655

   E. 0,02712

   Pembahasan

   Kita dapat menulis ulang $A_{41} - A_{40} = 0,00822$ sebagai

$$A_{40} = A_{41} - 0,00822$$

Dengan menggunakan rumus rekursif $A_x = vq_x + vp_xA_{x+1}$,

$$A_{40} = 1.05^{-1}q_{40} + 1.05^{-1}p_{40}A_{41}$$

Kita ketahui juga bahwa $p_{40} = 0,9972$ dan $q_{40} = 1 - p_{40} = 0,0028$. Maka kita peroleh

$$A_{41} = 0,216496$$

Apabila kita ingin menggunakan rumus rekursif ${}^2A_x = (v^*)q_x + (v^*)p_x({}^2A_{x+1})$, kita harus menghitungnya dengan tingkat suku bunga yang dikuadratkan juga. Tingkat suku bunga yang baru (j) menjadi $1 + j = (1 + 5\%)^2 = 1,1025$ sehingga $v^* = 1,1025^{-1}$. Maka kita peroleh

$${}^2A_{41} = 0,071926$$

Kita dapat mencari variansinya:

$$Var(Z) = {}^2A_{41} - A_{41}^2 = 0,025056$$

Jawab: C.

5. Sebuah anuitas menaik (temporary annuity – due) membayarkan 2 pada tahun pertama, 3 di tahun kedua dan 4 di tahun ketiga. Diketahui nilai berikut:

$$p_x = 0,8$$

$$p_{x+1} = 0,75$$

$$p_{x+2} = 0,5$$

$$v = 0,9$$

Hitunglah variance terhadap nilai sekarang dari variabel acak anuitas ini (present value random variable)

A. 3,59
B. 4,79
C. 5,79
D. 7,59
E. 8,79

Pembahasan

Waktu (T)	**Peluang mendapat pembayaran sampai waktu** T	**Nilai sekarang dari pembayaran**
0	$1-0,8=0,2$	2
1	$(0,8)(1-0,75)=0,2$	$2+3v=4,7$
2	$(0,8)(0,75)=0,6$	$2+3v+4v^2=7,94$

Misalkan X merupakan nilai sekarang dari pembayaran anuitas tersebut.

$$\mathbb{E}[X]=(0,2)(2)+(0,2)(4,7)+(0,6)(7,94)=6,1042$$

$$\mathbb{E}[X^2]=(0,2)(2)^2+(0,2)(4,7)^2+(0,6)(7,94)^2=43,0442$$

$$Var(X)=\mathbb{E}[X^2]-(\mathbb{E}[X])^2=5,79$$

Jawab: C.

6. Jika X berdistribusi seragam pada (1,3), berapakah Var (X) ?

   A. 1

   B. 1/3

   C. 2/3

   D. 3

   E. 2

   Pembahasan

   X berdistribusi Uniform dengan batas $(1,3)$.

   $Var(X)=\dfrac{(3-1)^2}{12}=\dfrac{1}{3}$
   Jawab: B.

7. Aktuaris A dan B menggunakan tabel mortalita yang sama untuk menghitung premi dari suatu produk asuransi Dwiguna diskrit selama 2 tahun sebesar 1.000.

   (i) Aktuaris A menghitung premi sebesar 608 di tahun pertama dan 350 di tahun kedua.

   (ii) Aktuaris B menghitung level premi untuk tahun pertama dan kedua.

   (iii) $d=0.05$

   Berapakah level premi yang dihitung Aktuaris B? (yang paling mendekati)

   A. 459

   B. 479

   C. 489

D. 497

E. 517

Pembahasan

$v = 1 - d = 0,95.$
Karena kedua aktuaris menghitung manfaat dari produk asuransi yang sama:

$$\begin{aligned}
1.000 A_{x:\overline{2}|} &= 608 + 350 v p_x \\
1.000(vq_x + v^2 p_x) &= 608 + 350 v p_x \\
1.000(0,95(1 - p_x) + 0,95^2 p_x) &= 608 + 350(0,95) p_x \\
p_x &= \frac{950 - 608}{350(0,95) - 902,5 + 950} \\
&= 0{,}9
\end{aligned}$$

Kita dapat menghitung premi dari aktuaris B, yaitu:

$$\begin{aligned}
608 + 350(0,95)(0,9) &= P(1 + 0,95(0,9)) \\
P &= \frac{608 + 350(0,95)(0,9)}{1 + 0,95(0,9)} \\
&= 489
\end{aligned}$$

Jawab: C.

8. Tentukan nilai dari $Var(Y_{95})$, bila menggunakan tingkat bunga tahunan 5% dan nilai sebagai berikut: $l_{95} = 100, l_{96} = 70, l_{97} = 40, l_{98} = 20, l_{99} = 4, l_{100} = 0, a_{95} = 1,2532$ dan ${}^2a_{95} = 1,1403$.

   A. 1,0933

   B. 1,0399

   C. 2,0933

   D. 2,2352

   E. 2,2532

   Pembahasan

   Untuk momen kedua, kita akan menggunakan valuasi d dalam dua kali tingkat suku bunga yaitu sebagai d^*. Maka $d^* = 1 - (\frac{1}{1+i})^2 = 1 - (\frac{1}{1.05})^2$.

$$\ddot{a}_{95} = 1 + a_{95} = 2.2532; A_{95} = 1 - d \cdot \ddot{a}_{95} = 0,8936$$

$${}^2\ddot{a}_{95} = 1 + {}^2a_{95} = 2,1403; {}^2A_{95} = 1 - d^*({}^2\ddot{a}_{95}) = 0,8010$$

$$Var(Y_{95}) = \frac{{}^2A_{95} - (A_{95})^2}{d^2} = \frac{0,8010 - 0,8936^2}{(\frac{0,05}{1,05})^2} = 1,0933$$

   Jawab: A.

9. Suatu asuransi seumur hidup diskrit untuk seorang berusia 40 tahun sebesar 1.000. Diketahui:
   - $i = 6\%$
   - $\ddot{a}_{40:\overline{10}|} = 7,7$
   - $\ddot{a}_{50:\overline{10}|} = 7,57$
   - $1.000A^{1}_{40:\overline{20}|} = 60$
   - $A_{40} = 0,16132; A_{50} = 0,24905$ dan $A_{60} = 0,36913$
   - $\ddot{a}_{40} = 14,1866$
   - ${}_{10}E_{40} = 0,53667;{}_{10}E_{50} = 0,51081$ dan ${}_{20}E_{40} = 0,27414$

   Pada tahun ke 10, tertanggung ingin memilih opsi membayar hanya untuk 10 tahun berikutnya, tetapi tetap terproteksi sebesar 1.000 selama seumur hidup. Berapakah premi yang harus di bayar untuk 10 tahun berikutnya?

   A. 11
   B. 15
   C. 17
   D. 19
   E. tidak ada jawaban yang benar.

   Pembahasan
   $P = 1.000\dfrac{A_{40}}{\ddot{a}_{40}} = 1.000\dfrac{0,16132}{14,8166} = 10,89$
   ${}_{10}V = 1.000A_{50} - P\ddot{a}_{50} = 1.000(0,24905) - 10,89(13,26066) = 104,6707$

   $$\begin{aligned}\ddot{a}_{40} &= \ddot{a}_{40:\overline{10}|} + {}_{10}E_{40}\ddot{a}_{50}\\ 14{,}8166 &= 7,7 + 0,53667\ddot{a}_{50}\\ \ddot{a}_{50} &= 13{,}26066\end{aligned}$$

   Premi yang harus dibayar untuk 10 tahun berikutnya:

   $$\begin{aligned}{}_{10}V &= 1.000A_{50} - P\ddot{a}_{50:\overline{10}|}\\ 104{,}6707 &= 1.000(0,24905) - P(7,57)\\ \mathrm{P} &= 19{,}07256\end{aligned}$$

   Jawab: D.

10. Sebuah select survival distribution didefinisikan sebagai berikut: $S_T(t;x) = (1 - \frac{1}{40-x})$, untuk $0 \le x < 40$, dan $0 < t < 40 - -X$. Tentukan $\mathring{e}_{30}$

   A. 7
   B. 6
   C. 5

D. 4

E. 3

Pembahasan

Kita ketahui bahwa

$$
\begin{aligned}
{}_tq_x &= \frac{t}{\omega - x} \\
{}_tp_x &= 1 - {}_tq_x = 1 - \frac{t}{\omega - x} \\
\mathring{e}_x &= \frac{\omega - x}{2}
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, kita peroleh $\omega = 40$. Jadi:

$$\mathring{e}_{30} = \frac{40 - 30}{2} = 5$$

Jawab: C.

11. Sebuah anuitas ditunda 10 tahun dengan pembayaran 10.000 setahun di bayarkan setiap awal tahun (10 year deferred annuity-due), di jual kepada Bapak X yang berusia 55 tahun, dengan premi neto tahunan yang dibayarkan selama masa penundaan. Sebagai tambahan, produk ini juga menyediakan pengembalian premi tanpa bunga bila Bapak X meninggal selama masa penundaan. Hitunglah premi level neto tahunan bila diketahui:

- $\ddot{a}_{55:\overline{10|}} = 8$
- $\ddot{a}_{55} = 12$
- $(IA)^1_{55:\overline{10|}} = 2,5$

A. 7.200

B. 6.872

C. 7.327

D. 7.400

E. 7.273

Pembahasan

Kita ketahui bahwa $\ddot{a}_{55} = 12$ dan $\ddot{a}_{55:\overline{10|}} = 8$, sehingga:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{55} &= \ddot{a}_{55:\overline{10|}} + {}_{10|}\ddot{a}_{55} \\
{}_{10|}\ddot{a}_{55} &= 4
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu, kita dapat menghitung premi:

$$\begin{aligned} 10.000\,{}_{10|}\ddot{a}_{55} + P(IA)^{1}_{55:\overline{10|}} &= P\ddot{a}_{55:\overline{10|}} \\ 10.000(4) + P(2,5) &= P(8) \\ P &= 7.272{,}73 \end{aligned}$$

Jawab: E.

12. Sebuah kontrak dwiguna selama n tahun, dengan premi tunggal netto sebesar 600. Kontrak ini akan membayarkan sebesar 1000 bila tertanggung hidup di akhir tahun n, tetapi hanya akan membayarkan premi netto tunggal bila tertanggung meninggal dalam n tahun.

    Diketahui $A_{x:\overline{n|}} = 0,8$. Hitunglah ${}_nE_x$.

    A. 0,25

    B. 0,20

    C. 0,30

    D. 0,35

    E. 0,40

    Pembahasan

    Perlu diketahui bahwa $A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}$ sama dengan ${}_nE_x$.

$$\begin{aligned} P &= 1.000A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} + 600A^{1}_{x:\overline{n|}} \\ 600 &= 600A_{x:\overline{n|}} + 400A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} \\ 600 &= 600(0,8) + 400{}_nE_x \\ 600(0{,}2) &= 400{}_nE_x \\ {}_nE_x &= 0{,}3 \end{aligned}$$

    Jawab: C.

13. Tentukan nilai dari $1000({}_2V_{x:\overline{3|}} - {}_1V_{x:\overline{3|}})$, bila menggunakan tingkat bunga tahunan 6% dan nilai sebagai berikut: $l_x = 100, l_{x+1} = 90, P_{x:\overline{3|}} = 0,3251$

    A. 330,38

    B. 230,83

    C. 130,83

    D. 133,38

    E. tidak ada jawaban yang benar

    Pembahasan

$$P_{x:\overline{3|}} = \frac{A_{x:\overline{3|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{3|}}} = \frac{1 - \frac{0.06}{1.06}\ddot{a}_{x:\overline{3|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{3|}}}$$

Karena kita ketahui bahwa $P_{x:\overline{3}|} = 0,3251$ maka $\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = 2,61983$, serta $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{90}{100} = 0,9$.

$$\ddot{a}_{x:\overline{3}|} = 1 + v \cdot p_x + v^2 \cdot {}_2p_x$$
$$2,61983 = 1 + 1,06^{-1}(0,9) + 1,06^{-2}(0,9)(p_{x+1})$$
$$\Rightarrow p_{x+1} = 0,962268$$

Dengan menggunakan rumus rekursif,

$$({}_0V_{x:\overline{3}|} + 1.000 \cdot P_{x:\overline{3}|})(1+i) = 1.000 \cdot q_x + p_x \cdot {}_1V_{x:\overline{3}|}$$
$$\Rightarrow {}_1V_{x:\overline{3}|} = 271,784$$

Kembali menggunakan rumus rekursif,

$$({}_1V_{x:\overline{3}|} + 1.000 \cdot P_{x:\overline{3}|})(1+i) = 1.000 \cdot q_{x+1} + p_{x+1} \cdot {}_2V_{x:\overline{3}|}$$
$$\Rightarrow {}_2V_{x:\overline{3}|} = 618,295$$

Maka,

$$1.000({}_2V_{x:\overline{3}|} - {}_1V_{x:\overline{3}|}) = 346,511$$

Jawab: E.

14. Tentukan nilai dari a_{95}, bila menggunakan tingkat bunga tahunan 6% dan nilai sebagai berikut: $l_{95} = 100, l_{96} = 60, l_{97} = 50, l_{98} = 30, l_{99} = 6, l_{100} = 0$.

    A. 2,31
    B. 3,31
    C. 3,11
    D. 1,31
    E. 1,11

    Pembahasan

    Dengan tingkat suku bunga sebesar 6%,

$$\begin{aligned} a_{95} &= vp_{95} + v^2{}_2p_{95} + v^3{}_3p_{95} + v^4{}_4p_{95} \\ &= 1,06^{-1}\tfrac{60}{100} + 1,06^{-2}\tfrac{50}{100} + 1,06^{-3}\tfrac{30}{100} + 1,06^{-4}\tfrac{6}{100} \\ &= 1,31 \end{aligned}$$

    Jawab: D.

15. Diketahui $\lambda_x(x) = (80-x)^{-1/2}$ untuk $0 < x < 80$. Manakah dari nilai di bawah ini yang paling mendekati median dari distribusi T_{20}?

    A. 1,249

    B. 3,249

    C. 4,249

    D. 5,249

    E. 6,249

    Pembahasan

    Diketahui *force of mortality* $\lambda_x(x) = (80-x)^{-1/2}$. Kita dapat mencari ${}_tp_x$ dari rumus

    $${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$$

    Maka

    $$\begin{aligned} {}_tp_{20} &= e^{-\int_0^t \frac{1}{\sqrt{80-20-s}} ds} \\ &\text{Dengan teknik substitusi integral, } u = 60 - s \Rightarrow du = -ds \\ &= e^{\int_0^t \frac{1}{u^{1/2}} du} \\ &= e^{2\sqrt{60-t} - 2\sqrt{60}} \end{aligned}$$

    Karena kita ingin mencari median dari distribusi T_{20},

    $$e^{2\sqrt{60-t}-2\sqrt{60}} = 0.5$$

    $$\Rightarrow t = 5.24898$$

    Jawab: D.

16. Sebuah tabel penurunan multiple (mutiple decrement table) dengan kejadian meninggal (1), ketidakmampuan- disability (2) dan batal (3) dimana pembatalan hanya terjadi pada akhir tahun. Diketahui:

    - $q_{60}^{\prime(1)} = 0,01$
    - $q_{60}^{\prime(2)} = 0,05$
    - $q_{60}^{\prime(3)} = 0,1$
    - Kejadian meninggal dan ketidakmampuan berdistribusi seragam sepanjang usia yang diasosiasikan dengan tabel penurunan single.

    Hitunglah $q_{60}^{(3)}$

    A. 0,094

B. 0,088

C. 0,089

D. 0,084

E. 0,098

Pembahasan

Karena kejadian (1) dan (2) terjadi dalam tahun tersebut, peluang seseorang bertahan hidup sampai akhir tahun adalah

$$p_{60}^{'(1)} \cdot p_{60}^{'(2)} = (1 - 0,01)(1 - 0,05) = 0,9405$$

Peluang yang tersisa pada tahun tersebut

$$p_{60}^{'(1)} \cdot p_{60}^{'(2)} \cdot p_{60}^{'(3)} = (1 - 0,01)(1 - 0,05)(1 - 0,1) = 0,84645$$

Maka

$$q_{60}^{(3)} = 0,9405 - 0,84645 = 0,09405$$

Jawab: A.

17. Hitunglah premi neto tahunan dari produk asuransi selama 2 tahun dimana manfaat meninggal sebesar 1000 dibayarkan pada akhir tahun kematian. Premi neto tahunan dihitung berdasarkan equivalence principle.

Diketahui: $v = 0,9; q_x = 0,1$ dan $q_{x+1} = 0,2$

A. 330,27

B. 230,27

C. 130,27

D. 100,27

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan

Dengan menggunakan *Equivalence Principle*,

$$1.000(vq_x + v^2 p_x q_{x+1}) = P(1 + vp_x)$$

Maka, $P = \dfrac{1.000(0,09 + 0,9^3(0,2))}{1 + 0,9^2} = 130,2762$

Jawab: C.

18. Bila diketahui informasi berikut:

    - $\text{Var}(\bar{a}_{\overline{T_x}|}) = \frac{100}{9}$
    - $\delta = 4k$
    - $\mu_{x+t} = k$ untuk semua t

    Tentukan nilai dari k.

    A. 0,02
    B. 0,2
    C. 0,01
    D. 0,1
    E. tidak ada jawaban yang benar

    Pembahasan

    Kita ketahui bahwa Var $\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) = \frac{100}{9}$.

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\bar{a}_{\overline{T_x}|}\right) &= \frac{1}{\delta^2}\left[{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2\right] \\
\frac{100}{9} &= \frac{1}{\delta^2}\left[\frac{\mu}{\mu+2\delta} - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2\right] \\
\frac{100}{9} &= \frac{1}{(4k)^2}\left[\frac{k}{k+8k} - \left(\frac{k}{k+4k}\right)^2\right] \\
k &= 0{,}02
\end{aligned}$$

    Jawab: A.

19. Tabel kehidupan diberikan seperti di bawah ini:

x	l_x
0	100.000
1	97.408
2	97.259
3	97.160
4	97.081

    Berapakah yang akan meninggal antara usia 2 dan 4 tahun?

    A. 177
    B. 178
    C. 179
    D. 180
    E. 181

Pembahasan

Banyak orang yang hidup pada usia 2 adalah 97.259, sedangkan banyak orang yang hidup pada usia 4 adalah 97.081. Maka banyaknya orang yang akan meninggal antara usia 2 dan 4 tahun:

$$97.259 - 97.081 = 178$$

Jawab: B.

20. Hitunglah p_{38}. Diketahui ${}^{20}_{23}V_{15} = 0,585, {}^{20}_{24}V_{15} = 0,6, i = 8\%$

    A. 0,8482

    B. 0,979

    C. 0,9205

    D. 0,947

    E. 0,9709

    Pembahasan

    Kita akan mencari nilai dari p_{38}.

    $$\begin{aligned} {}^{20}_{23}V_{15} &= vq_{38} + vp_{38}({}^{20}_{24}V_{15}) \\ 0{,}585 &= 1,08^{-1}(1 - p_{38}) + 1,08^{-1}p_{38}(0,6) \\ p_{38} &= 0{,}9205 \end{aligned}$$

    Jawab: C.

21. Sebuah Anuitas seumur hidup ditunda yang dibayarkan di awal periode (deferred annuity due) dengan masa penundaan selama 30 tahun, di jual kepada seseorang berusia 35 tahun. Di tawarkan juga fitur tambahan bila tertanggung meninggal selama masa penundaan, premi tunggal netto yang telah di bayarkan akan di kembalikan. Hitunglah premi tunggal netto per unit dari produk asuransi tersebut bila diketahui sebagai berikut:

    $$\ddot{a}_{65} = 9,9$$

    $$A_{35:\overline{30|}} = 0,21$$

    $$A^{1}_{35:\overline{30|}} = 0,07$$

    A. 1,49032

    B. 2,49032

    C. 3,49032

    D. 4,14903

E. 4,49032

Pembahasan

Kita perlu terlebih dahulu menghitung $A_{35:\overset{1}{\overline{30|}}}$.

$$A_{35:\overset{1}{\overline{30|}}} = A_{35:\overline{30|}} - A^{1}_{35:\overline{30|}} = 0,14$$

$$\begin{aligned} P &= PA^{1}_{35:30} + {}_{30|}\ddot{a}_{35} \\ P(1-0,07) &= {}_{30}E_{35}\ddot{a}_{65} \\ P &= \frac{0,14(9,9)}{1-0,07} \\ &= 1{,}490323 \end{aligned}$$

Jawab: A.

22. Diketahui tingkat kematian (force of failure) untuk perokok adalah 2 kali lipat bukan perokok, untuk semua usia diatas 55 tahun. Bila variable acak untuk age-at-failure berdistribusi seragam dengan ω =75 , hitunglah nilai dari $\mathring{e}_{65:55}$, jika (65) adalah bukan perokok dan (55) adalah perokok dan saling independen.

    A. 5,34167

    B. 4,34167

    C. 3,54167

    D. 2,45167

    E. 1,67341

    Pembahasan

    Misalkan kita notasikan S sebagai seorang perokok, sedangkan NS sebagai seorang non perokok.

$$\begin{aligned} \mathring{e}_{65:55} &= \int_0^{10} {}_tp_{65:55}dt \\ &= \int_0^{10} {}_tp^{NS}_{65}\,{}_tp^{S}_{55}dt \\ &= \int_0^{10} \left(\frac{10-t}{10}\right)\left(\frac{20-t}{20}\right)^2 dt \\ &= \frac{85}{24} = 3,5417 \end{aligned}$$

Jawab: C.

23. Sebuah survival model didefinisikan sebagai berikut: $S_x(x) = \dfrac{c-x}{c+x}$ untuk $0 \leq x \leq c$. Kemudian, sebuah tabel kehidupan (Life table) disusun berdasarkan distribusi tersebut dengan radix 100,000. Dalam tabel tersebut, $l_{35} = 44.000$. Diketahui pula $\omega = 90$. Hitunglah probabilitas dari seorang berusia 10 tahun akan meninggal antara usia 30 dan 45.

    A. 11/24

    B. 9/24

    C. 7/24

    D. 5/24

    E. 1/8

    Pembahasan

    Terlebih dahulu, kita perlu menghitung nilai dari c.

$$
\begin{aligned}
S_x(35) &= \frac{c-35}{c+35} \\
\frac{l_{35}}{l_0} &= \frac{c-35}{c+35} \\
\frac{44.000}{100.000} &= \frac{c-35}{c+35} \\
\Rightarrow c &= 90
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{20|15}q_{10} &= ({}_{20}p_{10})({}_{15}q_{30}) \\
&= \frac{l_{30}}{l_{10}}\left(1 - \frac{l_{45}}{l_{30}}\right) \\
&= \frac{5}{24}
\end{aligned}
$$

    Jawab: D.

24. Sebuah asuransi diskrit seumur hidup sebesar 1,000 dengan informasi sebagai berikut:

    - Biaya tetap tahun pertama sebesar 70 (terdiri dari 50 biaya akuisisi dan 20 biaya maintenance) dan biaya tetap tahun selanjutnya sebesar 20 (biaya maintenance).
    - 3% dari setiap premi yang di bayarkan.
    - $d = 0,04, \ddot{a}_x = 20$ dan $\ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 10$

    A. 97,01

B. 97,10

C. 100,01

D. 87,01

E. 67,01

Pembahasan *Soal dianulir*

25. Diketahui bahwa $q_x^{(1)} = 0,2$ dan $q_x^{(2)} = 0,1$. Kedua penurunan (decrement) tersebut berdistribusi seragam di antara interval $(x, x+1)$ dalam konteks multiple decrement. Diketahui pula persamaan berikut:

$$_tP_x^{'(j)} = (1 - t \cdot q_x^{(\tau)})^{q_x^{(j)}/q_x^{(\tau)}} \quad \text{dan} \quad t = 1$$

Tentukanlah nilai $q_x^{'(2)}$.

A. 0,8879

B. 0,1121

C. 1,8879

D. 1,1121

E. tidak ada jawaban yang benar

Pembahasan

Karena berdistribusi seragam, maka:

$$q_x^{(1)} = q_x^{'(1)} - \frac{1}{2} q_x^{'(1)} q_x^{'(2)}$$

$$q_x^{(2)} = q_x^{'(2)} - \frac{1}{2} q_x^{'(1)} q_x^{'(2)}$$

Diketahui $q_x^{(1)} = 0,2$ dan $q_x^{(2)} = 0,1$, substitusikan ke dalam kedua persamaan di atas.

$$0,2 = q_x^{'(1)} - \frac{1}{2} q_x^{'(1)} q_x^{'(2)}$$

$$0,1 = q_x^{'(2)} - \frac{1}{2} q_x^{'(1)} q_x^{'(2)}$$

Eliminasi kedua persamaan tersebut, sehingga diperoleh:

$$0,1 = q_x^{'(1)} - q_x^{'(2)}$$

$$q_x^{'(1)} = 0,1 + q_x^{'(2)} \tag{8.1}$$

Substusikan (1) ke salah satu persamaan di atas untuk memperoleh $q_x^{'(2)} = 0.111847$.

Jawab: B.

26. Diketahui $\mu_x = 0,04$ untuk $0 < x \leq 40$ dan $\mu_x = 0,05$ untuk $x > 40$. Manakan dari pilihan nilai di bawah ini yang paling mendekati untuk $\mathring{e}_{25:\overline{25}|}$?

   A. 12,6

   B. 15,6

   C. 10,6

   D. 8,6

   E. 6,6

   Pembahasan

   Diketahui bahwa $\mu_x = 0,04$ untuk $0 < x \leq 40$ dan $\mu_x = 0,05$ untuk $x > 40$.

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_{25:\overline{25}|} &= \int_0^{25} {}_tp_{25} dt \\
&= \int_0^{15} {}_tp_{25} dt + {}_{15}p_{25} \int_0^{10} {}_tp_{40} dt \\
&= \int_0^{15} e^{-0,04t} dt + (e^{-\int_0^{15} 0,04 ds}) \int_0^{10} e^{-0,05t} dt \\
&= 15,6
\end{aligned}$$

   Jawab: B.

27. Sebuah bond korporasi dengan durasi 10 tahun dan kupon sebesar 40 setahun, dengan tingkat gagal (default rate) 2% setahun. Bila bond tersebut default maka tidak akan ada lagi pembayaran kupon selanjutnya. Pada tingkat yield rate 6%, berapakah ekspektasi nilai sekarang dari kupon tersebut? Diketahui pula bahwa anuitas pasti (tidak ada kemungkinan gagal) dari $a_{\overline{10}|0,06}$ adalah 7,36.

   A. 294,4

   B. 240,54

   C. 266,44

   D. 288,51

   E. 246,4

   Pembahasan

Karena terdapat kemungkinan *bond* dapat gagal, maka ${}_tp_x = 0.98^t$. Jadi, nilai sekarang dari kupon *bond* tersebut adalah:

$$\begin{aligned}
\text{PV} &= c(v)(p_x) + c(v^2)({}_2p_x) + ... + c(v^{10})({}_{10}p_x) \\
&= 40(1.06^{-1})(0,98) + 40(1,06^{-2})(0,98^2) + ... + 40(1,06^{-10})(0,98^{10}) \\
&= 40\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{0,98}{1,06}\right)^k \\
&= 40\frac{0,98}{1,06}\frac{1-(\frac{0,98}{1,06})^{10}}{1-\frac{0,98}{1,06}} \\
&= 266{,}44
\end{aligned}$$

Jawab: C.

28. Suatu polis asuransi biasanya memuat klausa bahwa bila usia tertanggung diketahui tidak tepat pada saat diterbitkan, maka manfaat dari polis tersebut dapat disesuaikan sebesar selisih kalau polis tersebut dibeli dengan usia yang tepat. Suatu polis asuransi berjangka diskrit selama 3 tahun sebesar 1.000 dijual kepada seseorang yang menyatakan berusia 30 pada saat penerbitan polis. Akan tetapi, pada tahun ke tiga, di ketahui sesungguhnya orang tersebut berusia 31 tahun pada saat penerbitan polis. Bila diketahui:

    - $i = 4\%$
    - $q_{30} = 0,01$
    - $q_{31} = 0,02$
    - $q_{32} = 0,03$
    - $q_{33} = 0,04$

    Hitunglah berapa besar manfaat yang harus disesuaikan (besar manfaat yang dikurangkan).

    A. 264,1
    B. 664,1
    C. 864,1
    D. 335,9
    E. 135,9

    Pembahasan

    Diberikan manfaat kematian S sebesar 1.000.

Jika dibeli pada usia 30, maka premi yang harus dibayar:

$$P = 1.000\frac{A^{1}_{30:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{3}|}}$$

dengan $\ddot{a}_{30:\overline{3}|} = 1 + vp_{30} + v^2({}_2p_{30}) = 2,84893$. Maka $A^{1}_{30:\overline{3}|} = A_{30:\overline{3}|} - {}_3E_{30} = (1 - d \cdot \ddot{a}_{30:\overline{3}|}) - {}_3p_{30} \cdot v^3 = 0,0537981$. Sehingga preminya sebesar $18,88362$.

Karena ternyata usianya 31 tahun, maka:

$$P = S\frac{A^{1}_{31:\overline{3}|}}{\ddot{a}_{31:\overline{3}|}}$$

dengan $\ddot{a}_{31:\overline{3}|} = 1 + vp_{31} + v^2({}_2p_{31}) = 2,821191$. Maka $A^{1}_{31:\overline{3}|} = A_{31:\overline{3}|} - {}_3E_{31} = (1 - d \cdot \ddot{a}_{31:\overline{3}|}) - {}_3p_{31} \cdot v^3 = 0,080216$.

Jadi, manfaat kematian yang baru:

$$18,88362 = S \cdot \frac{0,080216}{2,821191} \Rightarrow S = 664,1$$

Oleh karena itu, manfaat kematiannya harus dikurangi sebesar $1.000 - 664,1 = 335,9$

Jawab: D.

Sebenarnya, soal ini tidak masuk akal untuk menghitung manfaat yang diperoleh pada tahun ketiga dari suatu asuransi berjangka 3 tahun, karena nilai tunai dari asuransi tersebut adalah 0.

29. T_{80} dan T_{85} adalah variabel acak independen berdistribusi seragam dengan ω =100 . Hitunglah probabilitas bahwa kejadian kedua (second failure) terjadi 5 tahun dari sekarang.

    A. 1/12
    B. 5/12
    C. 1/4
    D. 1/2
    E. 1/6

    Pembahasan

    Karena berdistribusi seragam, maka:

    $$_tq_x = \frac{t}{100 - x}$$

    Maka peluang *second failure* terjadi dalam 5 tahun adalah:

$$
\begin{aligned}
{}_5q_{\overline{80:85}} &= ({}_5q_{80})({}_5q_{85}) \\
&= \frac{5}{100-80} \cdot \frac{5}{100-85} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

30. Asuransi diskrit berjangka 2 tahun dijual untuk usia (x) dengan tingkat bunga (i) = 0. Jika diketahui q_x = 0,50 dan Var($Z^1_{x:\overline{2}|}$)= 0,1771. Hitunglah q_{x+1} .

    A. 0,52

    B. 0,56

    C. 0,42

    D. 0,45

    E. 0,54

    Pembahasan

    Karena tingkat suku bunga $i = 0$, maka $v = 1$.

$$A^1_{x:\overline{2}|} = q_x + vp_xq_{x+1} = q_x + p_xq_{x+1}$$

$${}^2A^1_{x:\overline{2}|} = q_x + v^2p_xq_{x+1} = q_x + p_xq_{x+1}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Var}\ (A^1_{x:\overline{2}|}) &= {}^2A^1_{x:\overline{2}|} - (A^1_{x:\overline{2}|})^2 \\
0{,}1771 &= q_x + p_xq_{x+1} - [q_x + p_xq_{x+1}]^2 \\
0{,}1771 &= 0,5 + 0,5q_{x+1} - [0,5 + 0,5q_{x+1}]^2 \\
q_{x+1} &= 0{,}54
\end{aligned}
$$

    Jawab: E.