Pembahasan Soal Ujian Profesi Aktuaris

Persatuan Aktuaris Indonesia

A70-Pemodelan dan Teori Risiko

Periode 2014-2018

Tim Penyusun:

Danang Teguh Qoyyimi

Wawan Hafid Syaifudin

Maria Anestasia

Felivia Kusnadi

READI

Risk Management, Economic Sustainability and Actuarial Science Development in Indonesia

2018

Daftar Isi

1 Periode Mei 2018

1. Kumpulan agregate klaim telah dimodelkan melalui distribusi negatif binomial dengan parameter $r = 15$ dan $\beta = 15$. Jumlah besaran klaim tersebut diketahui berdistribusi seragam/*uniform* pada interval (0,10). Menggunakan pendekatan normal, tentukan premi sehingga peluang dimana klaim melebihi premium ialah 0,05

   A. 485

   B. 554

   C. 420

   D. 590

   E. 750

   Pembahasan: Diketahui

	Distribusi	Ekspektasi	Variansi
Banyaknya klaim	$NB(15,15)$	$(15)(15) = 225$	$(15)(15)(15+1) = 3600$
Besaran klaim	$U(0,10)$	$\frac{10+0}{2} = 5$	$\frac{(10-0)^2}{12} = 8,33$
Aggregate klaim		$(225)(5) = 1125$	$(225)(8,33) + (3600)(5^2)$ $= 91875$

   $$\begin{aligned} \text{Premi} &= \mathbb{E}(S) + 1,645 \times \sqrt{Var(S)} \\ &= 1125 + 1,645(\sqrt{9857}) \\ &= 1288,32 \end{aligned}$$

   1,645 adalah percentile dari *standard normal distribution*.
   Jawab: ANULIR

2. Seorang aktuaris diminta pendapatnya oleh seorang ahli tata kota untuk menganalisa pola konsumsi rokok di suatu gedung. Diketahui distribusi pola konsumsi rokok pada hari kerja adalah sebagai berikut:

	Pria	**Wanita**
Rataan	6	3
Variansi	64	31

Banyaknya jumlah karyawan laki-laki di suatu gedung perkantoran yang terdiri dari N karyawan diketahui memiliki distribusi normal dengan parameter N dan $p = 0,4$. Tentukan rata-rata ditambah simpangan baku dari banyaknya jumlah rokok yang dikonsumsi pada sutau hari kerja di suatu kantor yang terpilih secara acak dengan 8 orang karyawan.

A. 53

B. 59

C. 63

D. 49

E. 73

Pembahasan:
Misalkan M adalah jumlah dari karyawan laki-laki dan C adalah jumlah dari rokok yang dikonsumsi. Dengan menggunakan *law of total probability*, kita peroleh:

$$E[C] = E[E[C|M]] = E[6M + 3(8 - M)] = 3E[M] + 24$$

Selain itu, diketahui bahwa M berdistribusi binomial dengan rataan $E[M] = n \times p = 8 \times 0,4 = 3,2$. Substitusikan nilai ini ke dalam persamaan di atas, maka kita peroleh $E[C] = 33,6$. Untuk variansi dari C, kita akan gunakan *law of total variance*.

$$\begin{aligned}
Var[C] &= E[Var[C|M]] + Var[E[C|M]] \\
&= E[64M + 31(8 - M)] + Var[3M + 24] \\
&= 33E[M] + 248 + 9Var[M] \\
&= 33 \times 3,2 + 248 + 9 \times 8 \times 0,4 \times 0,6 = 370,88
\end{aligned}$$

Simpangan baku dari C adalah $\sqrt{(Var[C])} = \sqrt{370,88} = 19,26$. Jadi, rata-rata ditambah simpangan bakunya adalah $33,6 + 19,26 = 52,86 \approx 53$ Jawab: A.
komentar: di kunci jawaban ditulis sebagai "ANULIR", kenapa?

3. Satu grup asuransi indemnity ("liability insurance") kesehatan memberikan benefit rawat inap pada tingkat kontinyu sebesar 100 per hari untuk periode rawat inap maksimal 30 hari. Manfaat untuk jumlah hari perawatan secara parsial dihitung pro-rata. Diketahui lamanya hari rawat inap, T, mempunyai fungsi survival sebagai berikut untuk $0 \leq t \leq 30$:

$$Pr(T \geq t) = \begin{cases} 1 - 0,04t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0,95 - 0,035t, & 10 < t \leq 20 \\ 0,65 - 0,02t, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$$

Untuk satu periode polis, peluang setiap anggota polis asuransi masuk rumah sakit satu kali ialah 0,1 dan lebih dari satu kali ialah 0. Tentukan premi murni per anggota asuransi dengan mengabaikan nilai waktu uang

A. 135

B. 122

C. 105

D. 115

E. 145

Pembahasan: Diketahui $\mathbb{E}(N) = 0,1$, dan

$$\mathbb{P}(T < t) = F(t) = \begin{cases} 0,04t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0,05 + 0,035t, & 10 < t \leq 20 \\ 0,35 + 0,02t, & 20 < t \leq 30 \end{cases}$$

sehingga $\mathbb{P}(T > 30) = 1 - \mathbb{P}(T < 30) = 1 - (0,35 + 0,02(30)) = 0,05$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{30} 100t \cdot f(t)dt + (30)(100)\mathbb{P}(T > 30) \\ &= \int_0^{10} 100t(0,04)dt + \int_{10}^{20} 100t(0,035)dt + \int_{20}^{30} 100t(0,02)dt + 3.000(0,05) \\ &= 200 + 525 + 500 + 150 = 1.350 \\ \mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X) = (0,1)(1.350) = 135 \end{aligned}$$

Jawab: A.

4. Klaim asuransi kesehatan dan gigi diasumsikan saling bebas dan mengikuti distribusi *compound Poisson* dengan informasi sebagai berikut:

Tipe Klaim	**Distribusi Besaran Klaim**	λ
Klaim asuransi kesehatan	Seragam (0,1.000)	2
Klaim asuransi gigi	Seragam (0, 200)	3

Misalkan X ialah besar klaim yang diberikan pada suatu polis asuransi yang memberikan proteksi baik asuransi kesehatan dan gigi. Tentukan $\mathbb{E}[(X-100)_+]$, besar ekspetasi biaya klaim dengan *excess* sebesar 100 dari suatu klaim

A. 207

B. 197

C. 147

D. 127

E. 177

Pembahasan: Jumlah klaim mengikuti distribusi *compound Poisson* dengan $\lambda = 2+3 = 5$ dan distribusi untuk besar klaim, X, adalah:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{2}{5}f_1(x) + \frac{3}{5}f_2(x) \\ &= \begin{cases} 0,4(0,001) + 0,6(0,005) = 0,0034, & 0 < x \leq 200, \\ 0,4(0,001) + 0,6(0) = 0,0004, & 200 < x \leq 1000 \end{cases} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X-100)_+] &= \int_{100}^{\infty} (x-100) f_X(x) dx \\ &= \int_{100}^{200} (x-100)(0,0034) dx + \int_{200}^{\infty} (x-100)(0,0004) dx \\ &= 177. \end{aligned}$$

Jawab: E.

5. Untuk suatu grup asuransi disabilitas, banyaknya jumlah orang disable per tahun ialah 1 dari 100 orang yang diberikan perlindungan. Fungsi keberlanjutan atau *survival function* untuk kelangsungan disabilitas dalam jumlah hari, Y ialah

$$Pr(Y > y) = 1 - \frac{y}{10}, \qquad y = 0, 1, 2, \cdots, 10$$

Benefit asuransi ialah 20 per hari mengikuti periode tunggu selama 5 hari. Menggunakan distribusi *compound Poisson*, tentukan variansi dari kumpulan klaim dari suatu grup yang terdiri dari 1.500 orang saling bebas

A. 35.000

B. 13.000

C. 23.000

D. 33.000

E. 43.000

Pembahasan: Untuk 1.500 orang, maka distribusi *compound* Poisson memiliki $\lambda = 0,01(1.500) = 15$. Dalam satuan unit 20, distribusi besarnya klaim adalah $\mathbb{P}(X = 0) = 0,5$ dan $\mathbb{P}(X = x) = 0,1$ untuk $x = 1, 2, 3, 4, 5$. Maka

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 0,5(0^2) + 0,1(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 5,5 \\ Var(S) &= 15(5,5) = 82,5\end{aligned}$$

Dengan besarnya klaim adalah dalam satuan unit 20, maka variansinya adalah $20^2(82,5) = 33.000$.
Jawab: D.

6. Diberikan dua estimator saling bebas untuk suatu parameter θ. Untuk estimator A, $\mathbb{E}(\widehat{\theta_A}) = 1.000$ dan $Var(\widehat{\theta_A}) = 160.000$, sedangkan estimator B, $\mathbb{E}(\widehat{\theta_B}) = 1.200$ dan $Var(\widehat{\theta_B}) = 40.000$. Estimator C ialah rata-rata tertimbang dari fungsi sebagai berikut:

$$\widehat{\theta_C} = w\widehat{\theta_A} + (1 - w)\widehat{\theta_B}$$

Tentukan nilai w untuk menimimalkan $Var(\widehat{\theta_C})$

A. 0,5

B. 0,6

C. 0,2

D. 1,2

E. 2,2

Pembahasan:

$$\begin{aligned}Var(\widehat{\theta_C}) &= Var[w\widehat{\theta_A} + (1 - w)\widehat{\theta_B}] \\ &= w^2(160.000) + (1 - w)^2(40.000), \quad \text{karena A dan B saling bebas} \\ &= 200.000w^2 - 80.000w + 40.000\end{aligned}$$

Turunannya adalah $400.000w - 80.000$ dan bernilai nol jika $w = 0,2$.
Jawab: C.

7. Suatu sampel dari 2.000 polis asuransi didapatkan 1.600 polis tanpa klaim dan 400 polis dengan sedikitnya 1 kali klaim. Dengan menggunakan pendekatan distribusi normal, tentukan *symmetric* 95% selang kepercayaan untuk peluang bahwa satu polis mempunyai sedikitnya 1 klaim

   A. 0,2175

   B. 0,1175

   C. 0,0008

   D. 0,3185

   E. 0,2575

   Pembahasan: Estimasi peluang terjadi sedikitnya 1 klaim adalah $400/2.000 = 0,2$. Karena sampel ini berdistribusi binomial, maka variansi dari estimasinya adalah $0,2(0,8)/2.000 = 0,00008$.
   Batas atas untuk selang kepercayaan ini adalah $0,2 + 1,96\sqrt{0,00008} = 0,21753$, dan batas bawahnya adalah $0,2 - 1,96\sqrt{0,00008} = 0,18247$.
   Jawab: A.
   Komentar: sebetulnya soal kurang jelas, seharusnya disebutkan bahwa yang ditanyakan adalah batas atas dari selang kepercayaan.

8. Terdapat 30 klaim tercatat dalam suatu sampel acak dari kumpulan klaim. Terdapat 2 klaim dengan jumlah masing-masing 2.000, 6 klaim dengan jumlah masing-masing 4.000, dan 10 klaim dengan jumlah masing-masing 8.000. Tentukan koefisien *skewness* secara empirik

   Hitunglah variansi dari klaim aggregat! (Pilihlah jawaban yang paling mendekati).

   A. -0,559

   B. -0,449

   C. -0,515

   D. -0,959

   E. -0,459

   Pembahasan: Pada distribusi empirik setiap observasi diberikan bobot peluang yang sama, yaitu $\frac{1}{30}$, sehingga kita peroleh:

Besaran Klaim	Probability
0	$\frac{2}{30} = 0,4$
2.000	$\frac{2}{30} = 0,067$
4.000	$\frac{6}{30} = 0,2$
8.000	$\frac{10}{30} = 0,333$

$$\begin{aligned}
\mu &= 0,4(0) + 0,067(2.000) + 0,2(4.000) + 0,333(8.000) = 3600 \\
\mu_2' &= 0,4(0^2) + 0,067(2.000^2) + 0,2(4.000^2) + 0,333(8.000^2) = 24,8 \times 10^6 \\
\sigma^2 &= \mu_2' - (\mu)^2 = 11,84 \times 10^6 \\
\mu_3' &= 0,4(0^3) + 0,067(2.000^3) + 0,2(4.000^3) + 0,333(8.000^3) = 1,84 \times 10^{11}
\end{aligned}$$

Sehingga koefisien *skewness* secara empirik adalah

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3' - 3\mu_2'\mu + 2\mu^3}{\sigma^3} = 0,2325$$

Jawab: ANULIR.

9. Suatu sampel terdiri 2,000 klaim terdiri dari sebagai berikut:
   - 1.700 observasi yang tidak lebih besar dari 6.000
   - 30 observasi diantara 6.000 dan 7.000
   - 270 observasi yang lebih besar dari 7.000

   Diketahui bahwa total jumlah klaim dari 30 observasi diantara 6.000 dan 7.000 ialah 200.000. Nilai dari $\mathbb{E}(X \wedge 6.000)$ untuk distribusi empirikal yang berasosiasi dengan 2.000 observasi ini ialah 1.810. Hitung distribusi empirical dari $\mathbb{E}(X \wedge 7.000)$

   A. 1.755

   B. 1.855

   C. 1.955

   D. 2.055

   E. 2.555

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \wedge 7.000) =& \frac{1}{2000}\left(\sum_{x_j \leq 7.000} x_j + \sum_{x_j > 7.000} 7.000\right)\\
=& \frac{1}{2000}\left(\sum_{x_j \leq 6.000} x_j + \sum_{x_j > 6.000} 6.000\right.\\
&\left. + \sum_{6.000 < x_j \leq 7.000} (x_j - 6.000) + \sum_{x_j > 7.000} 1.000\right)\\
=& \mathbb{E}(X \wedge 6.000) + [200.000 - 30(6.000) + 270(1.000)]/2.000\\
=& 1.955
\end{aligned}$$

Jawab: C.

10. Pada suatu studi mortalitas dengan sensor disebelah kanan (*right censored data*), diberikan informasi pada tabel di bawah. Hitunglah nilai estimasi dari fungsi survival pada waktu 12 dengan menggunakan estimasi Nelson-Aalen

Time (t_j)	**Banyaknya jumlah kematian (s_j)**	**Banyaknya risiko (r_j)**
5	2	15
7	1	12
10	2	10
12	2	6

A. 0,522

B. 0,422

C. 0,222

D. 0,822

E. 0,459

Pembahasan: Estimasi Nelson-Aalen untuk $\hat{H}(12)$ adalah

$$\hat{H}(12) = \frac{2}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{2}{6} = 0,65$$

Sehingga, $\hat{S}(12) = e^{-0,65} = 0,5220$
Jawab: A.

11. Diperoleh informasi sebagai berikut :
    - Pada suatu interval dari tahun ke-0 ke satu tahun, banyaknya eksposur risiko (r) ialah 15, banyaknya jumlah kematian (s) ialah 3.
    - Pada suatu interval satu tahun ke dua tahun, banyaknya eksposur risiko (r) ialah 80, banyaknya jumlah kematian (s) ialah 24.
    - Pada suatu interval dari dua tahun ke tiga tahun, eksposur risiko (r) ialah 25, banyaknya jumlah kematian (s) ialah 5.
    - Pada suatu interval dari tiga tahun ke empat tahun, eksposur risiko (r) ialah 60, banyaknya jumlah kematian (s) ialah 6.
    - Pada suatu interval dari empat tahun ke lima tahun, eksposur risiko (r) ialah 10, banyaknya jumlah kematian (s) ialah 3.

    Tentukan aproksimasi Greenwood untuk variansi dari $\hat{S}(4)$

    A. 0,00851

    B. 0,00151

    C. 0,00515

    D. 0,00551

    E. 0,00451

    Pembahasan:

$$\begin{aligned} S_n(4) &= \left(\frac{15-3}{15}\right)\left(\frac{80-24}{80}\right)\left(\frac{25-5}{25}\right)\left(\frac{60-6}{60}\right) \\ &= (0,8)(0,7)(0,8)(0,9) = 0,4032 \\ \widehat{Var}\,(S_n(4)) &= S_n(4)^2 \sum_{y_j \le 4} \frac{s_j}{r_j(r_j - s_j)} \\ &= (0,4032)^2 \left(\frac{3}{(15)(12)} + \frac{24}{(80)(56)} + \frac{5}{(25)(20)} + \frac{6}{(60)(54)}\right) \\ &= 0,005507 \approx 0,00551 \end{aligned}$$

    Jawab: D.

12. Dari suatu sampel acak persentil ke-20 ialah 18,25 dan persentil ke-80 ialah 35,8. Hitung estimasi dari parameter suatu distribusi log-normal menggunakan metode *persentile-matching* dan gunakan estimasi tersebut untuk menghitung peluang mengamati suatu nilai melebihi 30.

    A. 0,2176

    B. 0,1174

C. 0,0008

D. 0,3446

E. 0,2572

Pembahasan: Kita perlu mencari parameter μ dan σ untuk distribusi log-normal. Dengan menggunakan persentil ke-20 dan ke-80 dari *standard normal distribution* maka ada 2 persamaan:

$$
\begin{aligned}
0,2 = F(18,25) = \Phi\left(\frac{\ln 18,25 - \mu}{\sigma}\right) &\Longrightarrow -0,842 = \frac{2,904 - \mu}{\sigma} \\
0,8 = F(35,8) = \Phi\left(\frac{\ln 35,8 - \mu}{\sigma}\right) &\Longrightarrow 0,842 = \frac{3,578 - \mu}{\sigma}
\end{aligned}
$$

Persamaan pertama dibagi persamaan kedua menghasilkan:

$$-1 = \frac{2,904 - \mu}{3,578 - \mu}$$

Sehingga $\hat{\mu} = 3,241$ dan $\hat{\sigma} = 0,4$. Peluang mengamati suatu nilai melebihi 30 adalah

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 30) &= 1 - F(30) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln 30 - 3,241}{0,4}\right) \\
&= 1 - \Phi(0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446
\end{aligned}
$$

Jawab: D.

13. 20 klaim asuransi kendaraan bermotor eksklusif (dalam ratusan juta rupiah) tercatat selama periode satu tahun:

1	1	1	1	1	2	2	3	3	4
6	6	8	10	13	14	15	18	22	25

Tentukan nilai sampel persentil ke-75 menggunakan metode *smoothed empirical estimate*

A. 13,75

B. 12,25

C. 11,75

D. 15,55

E. 18,25

Pembahasan: $0,75(20+1) = 15,75$. Jadi, kita interpolasi data ke-15 dan ke-16:

$$0,25(13) + 0,75(14) = 13,75$$

Jawab: A.

14. Random acak sebanyak 5 klaim dari suatu distribusi log-normal diberikan sebagai berikut :

500	1.000	1.500	2.500	4.500

Hitung estimasi parameter $\hat{\mu}$ menggunakan metode momen

A. 7,398

B. 2,458

C. 3,984

D. 3,832

E. 7,148

Pembahasan: Parameter dari distribusi log-normal adalah μ dan σ dengan:

- Momen pertama:

$$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} = \frac{500 + 1.000 + 1.500 + 2.500 + 4.500}{5} = 2.000$$

- Momen kedua:

$$e^{2\mu+4\frac{\sigma^2}{2}} = \frac{500^2 + 1.000^2 + 1.500^2 + 2.500^2 + 4.500^2}{5} = 6.000.000$$

Sehingga diperoleh dua persamaan:

$$\ln 2.000 = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$
$$\ln 6.000.000 = 2\mu + 4\frac{\sigma^2}{2}$$

Solusinya adalah $\hat{\mu} = 7,39817$ dan $\hat{\sigma} = 0,636761$.

Jawab: A.

15. Dari soal nomor 14, estimasi peluang bahwa sebuah kerugian akan melebihi 4.500

A. 0,016

B. 0,015

C. 0,085

D. 0,031

E. 0,056

Pembahasan: Dari soal no 14 telah kita peroleh nilai estimasi untuk parameter $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}$. Sehingga,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 4.500) &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln 4.500 - 7,39817}{0,636761}\right) \\ &= 1 - \Phi(1,5919) = 0,056.\end{aligned}$$

Jawab: E

16. 500 buah klaim kerugian asuransi kargo teramati. 5 kerugian yang teramati tersebut sebesar

1.100	3.200	3.300	3.500	3.900

Semua informasi yang diketahui mengenai 495 klaim sisanya ialah bahwa mereka masing-masing lebih dari 4.000. Tentukan parameter mean dari distribusi eksponensial menggunakan metode *maximum likelihood estimate*

A. 933.000

B. 233.000

C. 333.000

D. 999.000

E. 399.000

Pembahasan:

$$\begin{aligned}L &= f(1.100)f(3.200)f(3.300)f(3.500)f(3.900)[S(4.000)]^{495} \\ &= \theta^{-5}\exp\left[\frac{-(1.100+3.200+3.300+3.500+3.900)}{\theta}\right]\left(\exp\left(\frac{-4.000}{\theta}\right)\right)^{495} \\ &= \theta^{-5}e^{-1.995.000/\theta}, \\ \ln L &= -5\ln\theta - \frac{1.995.000}{\theta}, \\ \frac{d\ln L}{d\theta} &= -\frac{5}{\theta} + \frac{1.995.000}{\theta^2} = 0,\end{aligned}$$

dan solusinya adalah $\hat{\theta} = 1.995.000/5 = 399.000$.
Jawab: E.

17. Seorang aktuaris mengamati lima buah besaran klaim : 11,0; 15,2; 18,0; 21,0; dan 25,8. Tentukan parameter μ dari fungsi kepadatan dibawah ini:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left[-\frac{1}{2x}(x-\mu)^2\right], \qquad x, \mu > 0$$

A. 12,64

B. 17,64

C. 14,54

D. 12,85

E. 16,74

Pembahasan: Karena koefisien $(2\pi x)^{-1/2}$ tidak memuat μ, maka bisa kita abaikan. Logaritma dari fungsi likelihoodnya diberikan oleh:

$$\begin{aligned} l(\mu) =& -\frac{1}{2(11)}(11-\mu)^2 - \frac{1}{2(15,2)}(15,2-\mu)^2 - \frac{1}{2(18)}(18-\mu)^2 \\ & -\frac{1}{2(21)}(21-\mu)^2 - \frac{1}{2(25,8)}(25,8-\mu)^2 \end{aligned}$$

Dan turunanya adalah

$$\begin{aligned} l(\mu) =& \frac{11-\mu}{11} + \frac{15,2-\mu}{15,2} + \frac{18-\mu}{18} + \frac{21-\mu}{21} + \frac{25,8-\mu}{25,8} \\ =& 5 - 0,29863\mu. \end{aligned}$$

Turunan sama dengan nol menghasilkan $\hat{\mu} = 16,74$.
Jawab: E.

18. Pada suatu sampel berukuran 10 dari suatu distribusi Poisson mengandung nilai-nilai berikut : 10, 2, 4, 0, 6, 2, 4, 5, 4, dan 2. Hitung estimasi dari nilai koefisien variansi untuk parameter distribusi Poisson, λ, menggunakan metode *maximum likelihood estimate* (MLE)

A. 0,1601

B. 0,1305

C. 0,0008

D. 0,3185

E. 0,1256

Pembahasan: Karena estimatornya *unbiased* maka rataannya adalah λ. Variansi dari rataan sampel adalah variansi dibagi ukuran sampel, yaitu λ/n. Koefisien variansinya adalah $\sqrt{\lambda/n}/\lambda = 1/\sqrt{n\lambda}$.
Maximum likelihood estimate dari λ adalah rataan sampel, yaitu $3,9$, sehingga estimasi dari nilai koefisien variansinya adalah $1/\sqrt{10(3,9)} = 0,1601$.

Jawab: A.

19. Diberikan β, sebuah kerugian X mempunyai fungsi kepadatan peluang eksponensial $f(x) = \beta^{-1}e^{-x/\beta},\ x > 0$. Distribusi prior ialah $\pi(\beta) = 100\beta^{-3}e^{-10/\beta},\ \beta > 0$, yang merupakan distribusi inverse gamma. Suatu kerugian dari x diamati. Dari mean distribusi posterior sebagai fungsi dari x, tentukan nilai parameter θ

    A. $10 + x$

    B. $10 - x$

    C. $12 + x$

    D. $10/x$

    E. $8 + x$

    Pembahasan:

    $$\pi(\beta|x) \propto f(x|\beta)\pi(\beta) = \beta^{-1}e^{-x/\beta} \cdot 100\beta^{-3}e^{-10/\beta} \propto \beta^{-4}e^{-(10+x)/\beta}$$

    Fungsi ini merupakan distribusi inverse gamma dengan $\alpha = 3$ dan $\theta = 10 + x$.
    Jawab: A.

20. Banyaknya klaim pada satu tahun, Y, mempunyai distribusi Poisson dengan parameter θ. Distribusi prior mengikuti distribusi gamma dengan fungsi kepadatan peluang $\pi(\theta) = \theta e^{-\theta}$. Terdapat satu klaim pada satu tahun. Berdasarkan fungsi kepadatan peluang posterior dari θ, tentukan tipe distribusi yang sesuai

    A. Gamma dengan parameter 3 dan 0,5

    B. Gamma dengan parameter 5 dan 0,25

    C. Gamma dengan parameter 1 dan 0,5

    D. Beta dengan parameter 3 dan 0,5

    E. Beta dengan parameter 3 dan 0,25

Pembahasan: Fungsi kepadatan peluang untuk distribusi posterior proporsional dengan

$$\frac{e^{-\theta}\theta^1}{1!}\theta e^{-\theta} = \theta^2 e^{-2\theta}.$$

Fungsi ini merupakan fungsi untuk distribusi gamma dengan parameter 3 dan 0,5.
Jawab: A.

21. Total banyaknya klaim untuk suatu grup pemegang polis mengikuti distribusi Poisson dengan rataan λ. Tentukan nilai dari λ sehingga banyaknya klaim yang diobservasi akan bernilai kurang lebih $\pm 3\%$ dari λ dengan peluang sebesar 0,95 menggunakan pendekatan normal. Pilih jawaban paling dekat

    A. 5.283

    B. 5.583

    C. 4.268

    D. 5.223

    E. 5.958

    Pembahasan: $y_{0,95}$ adalah persentil ke $(1 + 0,95)/2 = 0,975$ dari distribusi *standard normal*. Maka, banyaknya klaim adalah:

    $$\lambda_0 = \left(\frac{1,96}{0,03}\right)^2 = 4.268,44$$

    Jawab: C.

22. Rataan besar klaim untuk suatu grup pemegang polis ialah 1.500 dan simpangan baku 7.500. Asumsikan bahwa banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson. Tentukan ekspetasi banyaknya klaim sedemikian hingga jumlah total kerugian akan kurang lebih $\pm 6\%$ dari ekspetasi total kerugian dengan peluang 0,90

    A. 22.544

    B. 11.244

    C. 18.244

    D. 19.544

    E. 16.544

    Pembahasan:
    $$\left(\frac{1,645}{0,06}\right)^2 \left(1 + \frac{7.500^2}{1.500^2}\right) = 19.543,51 \approx 19.544$$

Jawab: D.

23. Suatu grup pemegang polis mempunyai klaim sebanyak 6.000 dan total kerugian sebesar 15.600.000. Estimasi awal ("prior") dari total kerugian ialah sebesar 16.500.000. Tentukan *the limited fluctuation credibility estimate* dari total kerugian untuk grup tersebut. Gunakan standar untuk kredibilitas penuh ("standard full credibility") dari soal di nomor 22. Pilih jawaban paling dekat

    A. 16.001.328

    B. 14.800.128

    C. 12.100.324

    D. 18.125.128

    E. 15.001.322

    Pembahasan: $Z = \sqrt{6.000/19.543,51} = 0,55408$. Maka estimasi dari kredibilitasnya adalah

    $$0,55408(15.600.000) + (1 - 0,55408)(16.500.000) = 16.001.328.$$

    Jawab: A.

24. Standar kredibilitas penuh dari 1.000 klaim telah ditentukan sedemikian hingga biaya premi murni akan berada kurang lebih 10% dari biaya ekspetasi premi murni dengan ketepatan 95% setiap waktunya. Banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson. Tentukan koefisien variansi dari distribusi besaran klaimnya

    A. 1,6681

    B. 1,4566

    C. 1,2661

    D. 1,0531

    E. 1,3246

    Pembahasan:

    $$1.000 = \left(\frac{1,96}{0,1}\right)^2 (1 + c^2).$$

    Solusi untuk koefisien variansi c adalah $1,2661$.

    Jawab: C.

25. Banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson. Koefisien variansi dari distribusi besar klaim ialah 2. Standar dari kredibilitas penuh dalam mengestimasi total klaim sebesar 3.415. Dengan standard tersebut, premi murni yang teramati akan kurang lebih $100k\%$ dari eskpetasi premi murni dengan ketepatan 95% setiap waktunya. Tentukan nilai k

    A. 5,5%

    B. 4,5%

    C. 8,5%

    D. 7,5%

    E. 9,5%

    Pembahasan:

    $$3,415 = \left(\frac{1,96}{k}\right)^2 (1+4) \Longrightarrow k = 0,075, \quad \text{atau} 7,5\%$$

    Jawab: D.

Soal di bawah merupakan pertanyaan untuk soal 26 sampai dengan soal 30

Terdapat dua tipe grup pemegang polis: tipe A dan tipe B. Dua pertiga dari total banyaknya pemegang polis ialah tipe A dan sisanya ialah tipe B. Untuk setiap tipe pemegang polis, diberikan informasi banyaknya klaim tahunan dan besar klaim pada tabel berikut:

		Tipe A	**Tipe B**
Banyaknya klaim	Mean	0,2	0,7
	Variance	0,2	0,3
Besar klaim	Mean	200	100
	Variance	4.000	1.500

26. Tentukan nilai $\mathbb{E}(S|\theta_A)$

    A. 40

    B. 50

    C. 20

    D. 80

    E. 30

Pembahasan:

$$\mathbb{E}(S|\theta_A) = \mathbb{E}(N|\theta_A)\mathbb{E}(X|\theta_A) = 0,2(200) = 40$$

Jawab: A.

27. Tentukan nilai $\mathbb{E}(S|\theta_B)$

    A. 70

    B. 20

    C. 80

    D. 60

    E. 10

Pembahasan:

$$\mathbb{E}(S|\theta_B) = \mathbb{E}(N|\theta_B)\mathbb{E}(X|\theta_B) = 0,7(100) = 70$$

Jawab: A.

28. Tentukan nilai rata-rata besar klaim pada grup tersebut atau μ_S

    A. 30

    B. 20

    C. 50

    D. 60

    E. 15

Pembahasan:

$$\mu_S = \frac{2}{3}(40) + \frac{1}{3}(70) = 50$$

Jawab: C.

29. Tentukan nilai kredibilitas faktor Z

    A. 0,20

    B. 0,05

    C. 0,25

    D. 0,10

    E. 0,15

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
Var(S|\theta_A) &= \mathbb{E}(N|\theta_A)Var(X|\theta_A) + Var(N|\theta_A)[\mathbb{E}(X|\theta_A)]^2 \\
&= 0,2(4.000) + 0,2(200^2) = 8.800 \\
Var(S|\theta_B) &= \mathbb{E}(N|\theta_B)Var(X|\theta_B) + Var(N|\theta_B)[\mathbb{E}(X|\theta_B)]^2 \\
&= 0,7(1.500) + 0,3(100^2) = 4.050 \\
v_S &= \frac{2}{3}(8.800) + \frac{1}{3}(4.050) = 7.216,67 \\
a_S &= Var[\mu(\theta)] = \frac{2}{3}(40^2) + \frac{1}{3}(70^2) - 50^2 = 200, \\
k &= \frac{v_S}{a_S} = 36,083
\end{aligned}$$

Untuk menghitung nilai kredibilitas faktor Z, kita membutuhkan informasi tentang n. Asumsi nilai n yang dipakai adalah seperti di soal no 30, maka

$$Z = \frac{4}{4 + 36,083} = 0,10$$

Jawab: D.

30. Seorang pemegang polis mempunyai total kerugian sebesar 500 dalam empat tahun terakhir. Tentukan besaran nilai kredibilitas premi di tahun depan untuk pemegang polis ini

   A. 65,50

   B. 50,55

   C. 57,50

   D. 60,00

   E. 65,00

Pembahasan:

$$P_c = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu = 0,10\left(\frac{500}{4}\right) + (1 - 0,10)(50) = 57,50$$

Jawab: C.

2 Periode November 2017

1. Sebuah manfaat perawatan gigi dirancang dengan deductible sebesar 100 untuk klaim perawatan gigi tahunan. Penggantian pembayaran (reimbursement) ke tertanggung adalah sebesar 80% dari klaim perawatan gigi setelah deductible dan maksimum penggantian pembayaran tahunan adalah 1.000. Diberikan data sebagai berikut:

   i. Klaim perawatan gigi tahunan untuk setiap tertanggung berdistribusi exponensial dengan rata – rata 1.000.

   ii. Gunakan bilangan acak uniform (0,1) berikut dan gunakan metode inversi untuk menghasilkan empat nilai klaim perawatan gigi tahunan.

   0,30   0,92   0,70   0,08

   Hitunglah rata-rata penggantian pembayaran tahunan untuk simulasi ini.

   A. 522

   B. 696

   C. 757

   D. 947

   E. 1.042

   Pembahasan: Fungsi distribusi dari *ground-up loss* X adalah

   $$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{1}{1000}x},$$

   dan fungsi kuantilnya adalah:

   $$F_X^{-1}(y) = -1000 \ln(1 - y).$$

   Nilai dari *ground-up loss* x dari masing-masing bilangan acak tersebut adalah,

   $$x_1 = F_X^{-1}(y_1) = F_X^{-1}(0,30) = -1000 \ln(1 - 0,3) = 356,6749,$$

   $$x_2 = F_X^{-1}(y_2) = F_X^{-1}(0,92) = -1000 \ln(1 - 0,92) = 2525,7286,$$

$$x_3 = F_X^{-1}(y_3) = F_X^{-1}(0,70) = -1000\ln(1-0,70) = 1203,9728,$$
$$x_4 = F_X^{-1}(y_4) = F_X^{-1}(0,08) = -1000\ln(1-0,08) = 83,3816.$$

Jadi, rata-rata penggantian pembayaran tahunan

$$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} y_j^P = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} \min(0,80(x_j-100)_+, 1000)$$
$$= \frac{1}{4}(205,3399 + 1000 + 883,1782 + 0) = 522,1295.$$

Jawab: A

2. Diberikan data pengalaman polis asuransi kendaraan sebagai berikut:

	Perusahaan	**Tahun 1**	**Tahun 2**	**Tahun 3**
Kerugian	A	50.000	50.000	?
Jumlah kendaraan		100	200	?
Kerugian	B	?	150.000	150.000
Jumlah kendaraan		?	500	300
Kerugian	C	150.000	?	150.000
Jumlah kendaraan		50	?	150

Hitunglah the *nonparametric empirical Bayes credibility factor*, Z, untuk perusahaan C.

A. kurang dari 0,2

B. paling sedikit 0,2 akan tetapi kurang dari 0,4

C. paling sedikit 0,4 akan tetapi kurang dari 0,6

D. paling sedikit 0,6 akan tetapi kurang dari 0,8

E. paling sedikit 0,8

Pembahasan: Rata-rata untuk masing-masing perusahaan dan tahun adalah sebagai berikut:

Perusahaan	Tahun 1	Tahun 2	Tahun 3	Total
A	500	200		333,33
B		300	500	375
C	3000		1000	1500

$$\hat{\mu} = \frac{50.000 + 50.000 + 150.000 + 150.000 + 150.000 + 150.000}{100 + 200 + 500 + 300 + 50 + 150} = 538,4615.$$

Pembilang untuk $\hat{v}$:

$$100(500-333,33)^2+200(250-333,33)^2+500(300-375)^2+300(500-375)^2+$$
$$+50(3000-1500)^2+150(1000-1500)^2=161.666.666,7,$$

sehingga

$$\begin{aligned}\hat{v}&=\frac{161.666.666,7}{(2-1)+(2-1)+(2-1)}\\&=5.388.888,89\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{a}&=\frac{300(333,33-538,4615)^2+800(375-538,4615)^2+200(1500-538,4615)^2}{1300-\frac{1}{1300}(300^2+800^2+200^2)}\\&=157.035,0242\end{aligned}$$

Faktor kredibilitas Bayes empirik nonparametrik untuk perusahaan C adalah

$$Z_C=\frac{200}{200+\frac{5.388.888,89}{157.035,0242}}=0,368212389.$$

Jawab: B

Gunakan informasi berikut untuk soal nomor 3 dan 4.
Waktu hingga terjadi sebuah kecelakaan (*the time to an accident*) mengikuti distribusi eksponensial. Rata-rata waktu hingga terjadi sebuah kecelakaan dari sebuah sampel acak berukuran dua adalah 6. Misalkan Y adalah rata-rata dari sampel baru berukuran dua.

3. Hitunglah taksiran maksimum likelihood dari $\mathbb{P}(Y>10)$

   A. 0,04

   B. 0,17

   C. 0,11

   D. 0,15

   E. 0,19

Pembahasan: Diketahui $\hat{\theta}=6$. Misalkan sampel baru tersebut Z_1 dan Z_2 dan $Z=Z_1+Z_2$, maka $Y = Z/2$. Karena diketahui $Z_1, Z_2 \sim Exp(\theta)$ maka pdf dari Z adalah

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^z f(z_1) f(z - z_1) dz_1 \\ &= \int_0^z \frac{1}{\theta} e^{-z_1/\theta} \frac{1}{\theta} e^{-(z-z_1)/\theta} dz_1 \\ &= \frac{1}{\theta^2} z e^{-z/\theta} \end{aligned}$$

Sehingga $\mathbb{P}(Y > 10)$ sama artinya dengan $\mathbb{P}(Z > 20)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > 20) &= \int_{20}^{\infty} \frac{1}{\theta^2} z e^{-z/\theta} dz \\ &= \frac{1}{\theta^2} \big[-z\theta e^{-z/\theta} - \theta^2 e^{-z/\theta} \big]_{20}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-20/\theta} (20 + \theta) \\ &= \frac{1}{6} e^{20/6} (20 + 6) \\ &= 0,1546. \end{aligned}$$

Jawab: D

4. Gunakan metode delta untuk melakukan approksimasi terhadap variansi dari taksiran maksimum likelihood dari $F_Y(10)$.

   A. 0,08

   B. 0,12

   C. 0,16

   D. 0,19

   E. 0,22

Pembahasan: Menggunakan jawaban dari soal no. 3 diketahui $F_Y(10) = 1 - \mathbb{P}(Y > 10) = 1 - \frac{1}{\theta} e^{-20/\theta}(20 + \theta)$. Untuk mencari variansi menggunakan delta method diperlukan $Var(\hat{\theta})$ dan $F'_Y(10)$.

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{n}.$$

$$F'_Y(10) = \frac{d}{d\theta} F_Y(10) = -\frac{400}{\theta^3} e^{-20/\theta}.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} Var(F_Y(10)) &= Var(\hat{\theta})\Big(F_Y'(10)\Big)^2 \\ &= \frac{\hat{\theta}^2}{n}\Big(-\frac{400}{\hat{\theta}^3}e^{-20/\hat{\theta}}\Big) \\ &= 0,0786. \end{aligned}$$

Jawab: A

5. Diberikan data berikut:
   - Kerugian mengikuti sebuah distribusi Weibull dengan parameter $\theta = 20$ dan $\tau = 1$.
   - Pertanggungan asuransi memiliki *deductible* sebesar 10.

   Jika diketahui bahwa perusahaan asuransi melakukan sebuah pembayaran, tentukan probabilitas pembayaran yang dilakukan sebesar kurang dari atau sama dengan 25.

   A. kurang dari 0,65

   B. paling sedikit 0,65 akan tetapi kurang dari 0,70

   C. paling sedikit 0,70 akan tetapi kurang dari 0,75

   D. paling sedikit 0,75 akan tetapi kurang dari 0,80

   E. paling sedikit 0,80

   Pembahasan: Fungsi distribusi kumulatif dari *ground-up loss* X adalah

   $$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} = 1 - e^{-\frac{x}{20}}.$$

   Probabilitas yang ditanyakan adalah

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y^P \le 25) &= \mathbb{P}(X - 10 \le 25 | X > 10) \\ &= \frac{F_X(35) - F_X(10)}{1 - F_X(10)} \\ &= \frac{e^{-10/20} - e^{-35/20}}{e^{-10/20}} \\ &= 0,7135. \end{aligned}$$

   Jawab: C

Gunakan informasi berikut untuk soal nomor 6 dan 7.

Diberikan data berikut:

- Kerugian mengikuti sebuah distribusi lognormal dengan parameter $\mu = 7$ dan $\sigma = 2$.
- Terdapat deductible sebesar 2.000.
- Sebanyak 10 kerugian diharapkan terjadi pada setiap tahun.
- Banyaknya klaim kerugian dan besarnya kerugian individu adalah saling bebas (*independent*)

6. Hitunglah *Loss Elimination Ratio* terhadap penggunaan *deductible* tersebut

   A. kurang dari 0,10

   B. paling sedikit 0,10 akan tetapi kurang dari 0,15

   C. paling sedikit 0,15 akan tetapi kurang dari 0,20

   D. paling sedikit 0,20 akan tetapi kurang dari 0,25

   E. paling sedikit 0,25

   Pembahasan:

$$\mathbb{E}(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2) = \exp(7 + 2^2/2) = 8103,0839.$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X \wedge 2.000) &= \exp(\mu + \sigma^2/2)\Phi\Big(\frac{\ln 2.000 - \mu - \sigma^2}{\sigma}\Big) + 2.000(1 - F(2.000)) \\
&= \exp(7 + 2^2/2)\Phi\Big(\frac{\ln 2.000 - 7 - 2^2}{\sigma}\Big) + 2.000\Big(1 - \Phi\Big(\frac{\ln 2.000 - 7}{2}\Big)\Big) \\
&= 361,3975 + 764,2 = 1.125,5975.
\end{aligned}$$

$$LER = \frac{\mathbb{E}(X \wedge 2.000)}{\mathbb{E}(X)} = 0,1389.$$

   Jawab: B

7. Tentukan ekspektasi banyaknya klaim kerugian tahunan yang melebihi nilai deductible jika setiap kerugian nilainya mengalami kenaikan secara uniform sebesar 20%, namun deductible tidak mengalami perubahan.

   A. kurang dari 4

   B. paling sedikit 4 akan tetapi kurang dari 5

   C. paling sedikit 5 akan tetapi kurang dari 6

   D. paling sedikit 6 akan tetapi kurang dari 7

E. paling sedikit 7

Pembahasan: Jika dinotasikan kerugian setelah kenaikan adalah Y, maka

$$Y = 1,2X.$$

Fungsi distribusi kumulatif sampai *deductible* menjadi

$$\begin{aligned} F_Y(2000) &= \mathbb{P}(Y \leq 2000) = \mathbb{P}(1,2X \leq 2000) = \mathbb{P}(X \leq 1666,67) \\ &= \Phi\Big(\frac{\ln 1666,67 - 7}{2}\Big) = \Phi(0,2093) \\ &= 0,5832. \end{aligned}$$

Jadi, peluang kerugian setelah kenaikan melebihi *deductible*

$$v = S_Y(2000) = 0,4168.$$

Jadi, ekspektasi banyaknya klaim kerugian tahunan yang melebihi nilai deductible jika setiap kerugian nilainya mengalami kenaikan secara uniform sebesar 20%, namun deductible tidak mengalami perubahan menjadi

$$10 \times v = 4,168.$$

Jawab: B

8. Diberikan waktu kematian sebagai berikut pada sebuah studi mortalitas terhadap sekelompok orang yang berusia 65 tahun.

$$10 \quad 17 \quad 22 \quad 25 \quad 25$$

Sebuah distribusi dari waktu hingga kematian (*time to death*) dikonstruksikan menggunakan metode kepadatan kernel. Sebuah kernel seragam digunakan dengan *bandwith* 10. Hitunglah probabilitas kematian sebelum waktu 20 dengan menggunakan distribusi yang dihasilkan.

A. 0,47

B. 0,49

C. 0,50

D. 0,51

E. 0,53

Pembahasan: Dengan menggunakan metode kepadatan kernel dan kernel seragam dengan bandwith 10, fungsi distribusi dapat diestimasi dengan

$$\hat{F}(x) = \sum_{j=1}^{4} p(y_j) K_{y_j}(x),$$

dengan

$$K_{y_j}(x) = \begin{cases} 0, & x < y_j - 10 \\ \frac{x - y_j + 10}{20}, & y_j - 10 \leq x \leq y + 10 \\ 1, & x > y + 10 \end{cases}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \hat{F}(20) &= \frac{1}{5}\Big(\frac{20 - 10 + 10}{20}\Big) + \frac{1}{5}\Big(\frac{20 - 17 + 10}{20}\Big) + \frac{1}{5}\Big(\frac{20 - 22 + 10}{20}\Big) \\ &\quad + \frac{2}{5}\Big(\frac{20 - 25 + 10}{20}\Big) \\ &= 0,51. \end{aligned}$$

Jawab: D

9. Pada sebuah pertanggungan asuransi, besarnya klaim mengikuti sebuah distribusi Pareto dengan parameter $\alpha = 4$ dan θ. Sedangkan θ bervariasi pada setiap tertanggung dan mengikuti sebuah distribusi normal dengan $\mu = 3$ dan $\sigma = 1$.

   Hitunglah kredibilitas Buhlmann yang diberikan pada sebuah klaim tunggal (*a single claim*)

   A. 0,05

   B. 0,07

   C. 0,10

   D. 0,14

   E. 0,18

Pembahasan:

$$\mu(\theta) = \mathbb{E}(X|\theta) = \frac{\theta\Gamma(2)\Gamma(4-1)}{\Gamma(4)} = \frac{\theta}{3}$$

$$v(\theta) = Var(X|\theta) = \frac{\theta}{3} - \Big(\frac{\theta}{3}\Big)^2 = \frac{2}{9}\theta^2$$

$$\mu = \mathbb{E}(\mu(\Theta)) = \mathbb{E}(\Theta/3) = \frac{1}{3}\mu = 1.$$

$$v = \mathbb{E}(v(\Theta)) = \mathbb{E}\Big(\frac{2}{9}\Theta^2\Big) = \frac{2}{9}(\sigma^2 + \mu^2) = \frac{20}{9},$$

$$a = Var(\mu(\Theta)) = Var(\Theta/3) = \frac{1}{9}Var(\Theta) = \frac{1}{9},$$

$$Z = \frac{n}{n+\frac{v}{a}} = \frac{1}{21} = 0,0476$$

Jawab: A

10. Pada sebuah pertanggungan asuransi, hanya satu klaim per tahun yang dapat diajukan. Anda diberikan data pengalaman berikut atas pertanggungan asuransi ini.

Tahun	Jumlah Tertanggung	Jumlah Klaim
2005	200	8
2006	250	15
2007	150	15
2008	200	18

Anda mengestimasi probabilitas dari sebuah klaim dalam satu tahun menggunakan maksimum likelihood dan uji kecocokan dengan menggunakan uji *Chi-Square*. Hitunglah nilai statistik chi-square.

A. 6,00

B. 6,15

C. 6,30

D. 6,45

E. 6,60

Pembahasan: Estimasi parameter menggunakan MLE,

$$\hat{\lambda} = \frac{8+15+15+18}{200+250+150+200} = 0,07.$$

Statistik Chi-square,

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \sum_{j=1}^{4} \frac{n(\hat{p}_j - p_{n_j})^2}{\hat{p}_j} \\
&= \frac{(8-14)^2}{13,02} + \frac{(15-17,5)^2}{16,2760} + \frac{(15-10,5)^2}{9,765} + \frac{(18-14)^2}{13,02} \\
&= 6,45.
\end{aligned}$$

Jawab: D

11. Pada sebuah studi mortalitas, y_1 adalah waktu pertama kali terjadinya kematian. Selang kepercayaan linear 95% dari $S(y_1)$, dengan menggunakan taksiran Kaplan-Meier dan aproksimasi Greenwood dari variansi adalah (0,8241 , 0,9759). Hitunglah banyaknya kematian yang terjadi pada saat y_1.

    A. 2

    B. 3

    C. 4

    D. 5

    E. 6

    Pembahasan: Misal $x = \hat{S}_n(y_1)$ dan $y = \sqrt{\frac{s_1}{r_1(r_1-s_1)}}$, selang kepercayaan 95% dari $S(y_1)$ adalah

$$(x - 1,96xy, x + 1,96xy).$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{array}{rcl} x + 1,96xy & = & 0{,}9759 \\ x - 1,96xy & = & 0{,}8241 \\ \hline x & = & 0{,}9 \\ y & = & \frac{0{,}9759-0{,}9}{1{,}96\times 0{,}9} = 0,0431 = 0 \end{array}$$

$$\hat{S}(y_1) = \frac{r_1 - s_1}{r_1} = 0,9$$
$$s_1 = 0,1r_1.$$

$$y = \sqrt{\frac{s_1}{r_1(r_1 - s_1)}} = 0,0430$$
$$r_1 = 60,0166.$$

Jawab: E

12. Sebuah peubah acak diskrit X berdistribusi binomial dengan parameter $m = 2$ dan q. Tentukan rentang (*range*) dari q sedemikian sehingga percentile ke-70 dari X bernilai 1.

    A. $[0,10, 0,45]$

    B. $[0,16, 0,55]$

C. $[0,28, 0,66]$

D. $[0,34, 0,72]$

E. $[0,45, 0,84]$

Pembahasan: Fungsi peluang dari X,

$$f(x) = \binom{2}{x} q^x (1-q)^{2-x}, x = 0, 1, 2.$$

Agar persentil ke 70 dari X bernilai 1 maka haruslah $f(0) < 0,70$ dan $0,7 \leq f(0) + f(1) < 1$.

Untuk yang pertama dipunyai,

$$f(0) = (1-q)^2 = 1 - 2q + q^2 < 0,7$$

sehingga diperoleh interval untuk q

$$0,163 < q < 1,8367. \tag{2.1}$$

Diketahui

$$f(0) + f(1) = (1-q)^2 + 2q(1-q) = (1-q)(1-q+2q) = 1 - q^2.$$

Sehingga syarat yang kedua menjadi

$$0,7 \leq 1 - q^2 < 1,$$

yaitu $1 - q^2 < 1$ atau $q^2 > 0$ yang selalu benar dan

$$\begin{aligned} 1 - q^2 &\geq 0,7 \\ 0,3 - q^2 &\geq 0 \\ -\sqrt{0,3} \leq q &\leq \sqrt{0,3} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Irisan dari (2.1) dan (2.2) diperoleh solusi dari problem ini, yaitu interval

$$(0,163, 0,5477).$$

Jawab: B

13. Pada sebuah studi mortalitas, diberikan sampel dari waktu bertahan hidup (*survival times*) sebagai berikut

    125 132 135 135 147 147 160 160

    Distribusi dari *survival times* diestimasi dengan menggunakan dua metode:

    (I.) Menggunakan distribusi empiris

    (II.) Menggunakan taksiran *Nelson-Åalen*

    Hitunglah selisih absolut dari rata-rata survival time sampai 160, $\mathbb{E}[X \wedge 160]$, antara dua metode ini.

    A. 0,75

    B. 1,00

    C. 1,25

    D. 1,50

    E. 1,75

Pembahasan: Menggunakan distribusi empirik, estimasi dari $\mathbb{E}[X \wedge 160]$ adalah

$$\frac{125 + 132 + 135 + 135 + 147 + 147 + 160 + 160}{8} = \frac{1141}{8} = 142,6250.$$

Menggunakan taksiran *Nelson-Åalen*:

y_j	s_j	r_j	$\hat{H}(y_j)$	$\hat{S}(y_j) = e^{-\hat{H}(y_j)}$	$\hat{f}(y_j)$
125	1	8	$\frac{1}{8} = 0,125$	0,8829	0,1171
132	1	7	$0,125 + \frac{1}{7} = 0,2679$	0,7650	0,1179
135	2	6	$0,2679 + \frac{2}{6} = 0,6012$	0,5482	0,2168
147	2	4	$0,6012 + \frac{2}{4} = 1,1012$	0,3325	0,2157
160	2	2	$1,1012 + \frac{2}{2} = 2,1012$	0,1223	0,2102
160+					0,1223

Estimasi $\mathbb{E}(X \wedge 160)$ menjadi

$$\begin{aligned} 125(0,1171) + 132(0,1179) + 135(0,2168) + 147(0,3325) + \\ 160(0,2102 + 0,1223) = 1,7512. \end{aligned}$$

Jawab: E

14. Diberikan pengalaman dari tiga kelompok pemegang polis sebagai berikut: Hitunglah faktor

Kelompok		Tahun 1	Tahun 2
A	Jumlah Polis	10	15
	Rata-rata kerugian	5	10
B	Jumlah Polis	-	30
	Rata-rata kerugian	-	12
C	Jumlah Polis	-	20
	Rata-rata kerugian	-	5

kredibilitas Z untuk pemegang polis C dengan menggunakan metode *empirical Bayes non-parametric*.

A. kurang dari 0,47

B. paling sedikit 0,47 akan tetapi kurang dari 0,49

C. paling sedikit 0,49 akan tetapi kurang dari 0,51

D. paling sedikit 0,51 akan tetapi kurang dari 0,53

E. paling sedikit 0,53

Pembahasan: Rata-rata kelompok A dan rata-rata total μ adalah

$$\bar{X}_A = \frac{50+150}{25} = 8,$$

$$\mu = \frac{660}{75} = 8,8.$$

$$v = \frac{10(5-8)^2 + 15(10-8)^2}{(2-1)+(1-1)+(1-1)} = 150,$$

$$a = \frac{25(8-8,8)^2 + 30(12-8,8)^2 + 20(5-8,8)^2 - 150 \times 2}{75 - \frac{1}{75}(25^2+30^2+20^2)}$$
$$= 6,3243,$$

Jadi faktor kredibilitas Z untuk pemegang polis C adalah

$$Z = \frac{n}{n+\frac{v}{a}} = \frac{20}{20+23,7179} = 0,4575.$$

Jawab: A

15. Banyaknya klaim pertahun dari seorang tertanggung mengikuti sebuah distribusi Poisson dengan rata-rata λ. λ bervariasi berdasarkan sebuah distribusi gamma dengan $\sigma = 20$ dan $\theta = 0,01$. Berikut adalah informasi mengenai banyaknya klaim pertahun yang terjadi pada seorang tertanggung selama enam tahun terakhir.
    0, 0, 1, 0, 0, 1
    Hitunglah *the posterior variance* dari banyaknya klaim pertahun untuk tertanggung ini pada tahun depan.

    A. kurang dari 0,18
    B. paling sedikit 0,18 akan tetapi kurang dari 0,19
    C. paling sedikit 0,19 akan tetapi kurang dari 0,20
    D. paling sedikit 0,20 akan tetapi kurang dari 0,21
    E. paling sedikit 0,21

Pembahasan: Distribusi posterior untuk permasalahan ini adalah

$$\pi_{\Lambda|\mathbf{X}}(\lambda|\mathbf{x}) \propto e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{j=1}^{n} X_j}\frac{(\lambda/\theta)^{\alpha}e^{-\lambda/\theta}}{\lambda\Gamma(\alpha)}$$
$$\propto e^{-n\lambda-\lambda/\theta}\lambda^{\sum_{j=1}^{n} X_j+\alpha-1}$$
$$= e^{-106\lambda}\lambda^{2+19}.$$

Jadi $\Lambda|\mathbf{X} \sim Gamma(\alpha^*, \theta^*)$ dengan $\alpha^* - 1 = 2 + 19 = 21$ atau $\alpha^* = 22$ dan $\theta^* = \frac{1}{106}$. Posterior variance dari banyaknya klaim per tahun untuk tertanggung menjadi

$$\begin{aligned} Var(\Lambda) &= \frac{\theta^*\Gamma(\alpha^*+2)}{\Gamma(\alpha^*)} - \left(\frac{\theta^*\Gamma(\alpha^*+1)}{\Gamma(\alpha^*)}\right)^2 \\ &= \theta^*\left(\frac{\Gamma(24)}{\Gamma(22)} - \left(\frac{\Gamma(23)}{\Gamma(22)}\right)^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{106}\right)^2 (22 \times 23 - 22 \times 22) \\ &= \frac{22}{106^2} = 0,0020. \end{aligned}$$

Jawab: A

16. Banyaknya klaim pada sebuah pertanggungan asuransi mengikuti sebuah distribusi Poisson. Diberikan pengalaman selama satu tahun dari 137 polis sebagai berikut:

Jumlah Klaim	Jumlah Polis
0	70
1	35
2	20
3	8
4	4
5+	0

Dengan menggunakan metode *empirical Bayes semi-parametric*, hitunglah prediksi banyaknya klaim yang terjadi tahun depan untuk sesorang yang memiliki tiga klaim.

A. 1,4

B. 1,7

C. 2,1

D. 2,4

E. 2,7

Pembahasan: Rata-rata jumlah klaim berdasarkan data,

$$\bar{X} = \frac{0 \times 70 + 1 \times 35 + 2 \times 20 + 3 \times 8 + 4 \times 4}{137} = 0,8394.$$

dan variansinya

$$\begin{aligned} \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{137} &= \frac{49,3234 + 0,9026 + 26,9391 + 37,345 + 39,9572}{137} \\ &= \frac{154,4673}{137} = 1,1275. \end{aligned}$$

Selanjutnya dapat dihitung prediksi banyaknya klaim menggunakan metode empirik Bayes semi-parametrik:

$$\hat{a} = 1,1275 - 0,8394 = 0,2881,$$

$$k = \frac{0,8394}{0,2881} = 2,9136.$$

dan

$$Z = \frac{1}{1 + 2,9136} = 0,2555.$$

$$CP = 0,2555 \times 3 + (1 - 0,2555) \times 0,8394 = 1,3914.$$

Jawab: A

17. Sebuah kerugian mengikuti distribusi Pareto dengan satu parameter dengan parameter $\alpha = 1$ dan $\theta = 1.000$. Hitunglah simpangan baku dari rata-rata pembayaran perkerugian pada sebuah pertanggungan dengan batas polis (*policy limit*) sebesar 10.000.

    A. kurang dari 2.500

    B. paling sedikit 2.500 akan tetapi kurang dari 2.600

    C. paling sedikit 2.600 akan tetapi kurang dari 2.700

    D. paling sedikit 2.700 akan tetapi kurang dari 2.800

    E. paling sedikit 2.800

    Pembahasan: Diketahui $X \sim Pareto(\alpha = 1, \theta = 1000)$. Menurut tabel untuk $k \neq \alpha$,

$$\mathbb{E}[(X \wedge d)^k] = \frac{\alpha\theta^k}{\alpha - k} - \frac{k\theta^\alpha}{(\alpha - k)d^{\alpha - k}}.$$

    Sehingga untuk permasalahan ini diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X \wedge 10.000)^2] &= \frac{1 \times 1000^2}{1 - 2} - \frac{2 \times 1000^1}{(1-2)1000^{1-2}} \\ &= -1000^2 + 2 \times 1000 \times 10.000 = 19.000.000,\end{aligned}$$

    dan karena $\alpha = 1$ maka

$$\mathbb{E}[(X \wedge 10.000)] = -\theta \ln\left(\frac{\theta}{1000 + \theta}\right) = -1000 \ln\left(\frac{1000}{10.000 + 1000}\right) = 2.397,8953.$$

    Variansinya dapat dihitung

$$Var(X \wedge 10.000) = 19.000.000 - (2.397,8953)^2 = 13.250.098,26,$$

    atau dengan kata lain

$$sd(X) = 3.640,0684.$$

    Jawab: E

18. Diberikan informasi sebagai berikut:

    a) Kerugian pada sebuah pertanggungan asuransi mengikuti sebuah distribusi lognormal dengan parameter $\mu = \Theta$ dan $\sigma = 2$.

    b) Θ bervariasi antar pemegang polis sesuai dengan distribusi normal dengan ratarata 5 dan variansi 3.

c) Seorang pemegang polis melakukan klaim kerugian sebanyak 20 kali. Rata-rata klaim sebesar 10.000.

Tentukan prediksi *Buhlmann* terhadap besarnya klaim untuk klaim berikutnya dari pemegang polis tersebut.

A. 6.200

B. 7.100

C. 7.500

D. 7.900

E. 8.700

Pembahasan: Diketahui $X|\Theta \sim LN(\mu = \Theta, \sigma^2 = 2^2)$, sehingga

$$\begin{aligned}\mu(\theta) &= \mathbb{E}(X|\theta) \\ &= \exp(\theta + \sigma^2/2) = \exp(\theta + 2)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}v(\theta) &= Var(X|\theta) \\ &= [\exp(\sigma^2) - 1]\exp(2\theta + \sigma^2) \\ &= [e^4 - 1]\exp(2\theta + 4) = e^{2\theta}[e^8 - e^4].\end{aligned}$$

Dari kedua nilai tersebut diperoleh

$$\begin{aligned}\mu &= \mathbb{E}(\mu(\Theta)) = \mathbb{E}(e^{\Theta+2}) = e^2\mathbb{E}(e^{\Theta}) = e^2 M_\Theta(1) \\ &= e^2 e^{2.1+\frac{1}{2}3^2 1^2} = e^{8,5} = 4.914,7688,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v &= \mathbb{E}(v(\Theta)) = \mathbb{E}(e^{2\Theta}(e^8 - e^4)) = (e^8 - e^4)M_\Theta(2) \\ &= e^{22}(e^8 - e^4) = e^{26}(e^4 - 1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= Var(\mu(\Theta)) = Var(e^{\Theta+2}) = e^4 Var(e^{\Theta}) \\ &= e^4(M_\Theta(2) - (M_\Theta(1))^2) \\ &= e^{17}(e^9 - 1),\end{aligned}$$

$$k = \frac{v}{a} = \frac{e^{26}(e^4 - 1)}{e^{17}(e^9 - 1)} = 53,6048,$$

$$Z = \frac{20}{20 + 53,60458} = 0,2717,$$

Prediksi Bühlmann terhadap besarnya klaim untuk klaim berikutnya:

$$BP = 0,2717 \times 10.000 + (1 - 0,2717) \times 4.914,7688 = 6.296,6411.$$

Jawab: A

19. Untuk sebuah pertanggungan asuransi,besarnya klaim berdistribusi Pareto dengan parameter $\alpha = 4$ dan Θ. Parameter Θ bervariasi untuk setiap tertanggung dan mengikuti distibusi gamma sebagai berikut

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\Gamma(10)2^{10}}\theta^9 e^{-\theta/2}$$

Hitunglah kredibilitas Buhlmann yang diberikan kepada satu observasi.

A. kurang dari 0,040

B. paling sedikit 0,040 akan tetapi kurang dari 0,042

C. paling sedikit 0,042 akan tetapi kurang dari 0,044

D. paling sedikit 0,044 akan tetapi kurang dari 0,046

E. paling sedikit 0,046

Pembahasan: Dari soal dikeahui distribusi prior dari Θ adalah $Gamma(\alpha = 10, \beta = 2)$. Dan karena $X|\Theta$ berdistribusi Pareto dengan parameter $\alpha = 4$ dan Θ maka

$$\mu(\theta) = 1\mathbb{E}(X|\theta) = \frac{\theta\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(4)} = \frac{\theta \times 1 \times 2!}{3!} = \frac{\theta}{3}$$

dan

$$v(\theta) = Var(X|\theta) = \frac{\theta^2\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}\theta.$$

Sehingga diperoleh nilai-nilai untuk kredibilitas sebagai berikut ini,

$$\mu = \mathbb{E}(\mu(\Theta)) = \frac{1}{3}\mathbb{E}(\Theta) = \frac{1}{3} \times 10 \times 2 = \frac{20}{3}.$$

$$v = \mathbb{E}(v(\Theta)) = \frac{2}{9}\mathbb{E}(\Theta^2) = \frac{2}{9}2^2 \times (10 + 1) \times 10,$$

$$a = Var(\mu(\Theta)) = \frac{1}{9}Var(\Theta) = \frac{1}{9}\alpha\beta^2 = \frac{40}{9},$$

$$Z = \frac{1}{1 + \frac{(2\times4\times11\times10)/9}{40/9}} = \frac{1}{1+22} = 0,00435.$$

Jawab: C

20. Untuk sebuah kelompok manfaat perawatan gigi:

    a) Total kerugian (aggregate losses) pada setiap tertanggung memiliki rata-rata 400 dan variansi 200.000.

    b) Banyaknya klaim pada setiap tertanggung mengikuti sebuah distribusi binomial negatif dengan $r = 2$ dan $\beta = 1$.

    Anda menggunakan metode kredibilitas fluktuasi terbatas untuk mengevaluasi pengalaman kredibilitas dari kelompok ini. Kredibilitas standard adalah total kerugian harus berada dalam 5% dari ekspektasi dengan probabilitas sebesar 99%.

    Tentukan banyaknya ekspektasi klaim yang dibutuhkan (the number of expected claims needed) untuk kredibilitas 25%.

    A. 207

    B. 415

    C. 539

    D. 829

    E. 1.659

    Pembahasan: Diketahui $\mathbb{E}(X_i) = 400$, $Var(X_i) = 200.000$, $r = 5\%$, $p = 99\%$, dan $Z = 25\%$. Sehingga $y_p = 2,576$ dan

$$\lambda_0 = \Big(\frac{y_p}{r}\Big)^2 = \Big(\frac{2,576}{0,05}\Big)^2 = 2.654,3104.$$

Karena banyaknya klaim berdistribusi binomial negatif dengan $r = 2$ dan $\beta = 1$, maka $\mathbb{E}(N_i) = r\beta = 2 \times 1 = 2$. Standar kredibilitas penuh untuk permasalahan ini adalah

$$n_F = \lambda_0 \Big(\frac{\sqrt{Var(X_i)}}{\mathbb{E}(X_i)}\Big)^2 = 2.654,3104 \Big(\frac{\sqrt{200.000}}{400}\Big)^2 = 3.317,888.$$

Dengan kredibilitas (Z) 25%, banyaknya tertanggung yang diperlukan adalah

$$n = Z^2 n_F = 0,25^2 \times 3.317,88 = 207,368,$$

sehingga banyaknya ekspektasi klaim yang diperlukan adalah

$$n\mathbb{E}(N_i) = 207,368 \times 2 = 414,7360.$$

Jawab: B

21. Untuk sebuah pertanggungan asuransi, kerugian mengikuti sebuah distribusi eksponensial dengan median 500. Pertanggungan ini memiliki *a franchise deductible* sebesar 250. Hitunglah rata-rata pembayaran untuk setiap klaim yang dibayarkan.

    A. 500

    B. 597

    C. 721

    D. 750

    E. 971

Pembahasan: Fungsi distribusi kumulatif dari *ground-up loss* tersebut adalah

$$F_X(x) = 1 - e^{-x/\theta}.$$

Karena diketahui median dari kerugian 500, maka

$$\begin{aligned} 0,5 = F_X(500) &= 1 - e^{-500/\theta} \\ \theta &= 721,3475. \end{aligned}$$

Variabel random pembayaran dari polis adalah

$$Y^P = \begin{cases} 0, & X \leq 250, \\ X, & X > 250. \end{cases}$$

Sehingga nilai ekspektasinya dapat dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^P) &= \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge 250) + d(1 - F_X(d))}{1 - F_X(d)} \\ &= \frac{721,3475 - 721,3475(1 - e^{-250/721,3475})}{e^{-250/721,3475}} + 250 \\ &= 971,3475. \end{aligned}$$

Jawab: E

22. Sebanyak dua belas pemegang polis diamati dari saat polis asuransi berlaku sampai waktu pertama kali melakukan klaim asuransi. Data yang diamati adalah sebagai berikut:

    Dengan menggunakan taksiran Nelson-Åalen hitunglah selang kepercayaan linear 95% untuk fungsi *cumulative hazard rate* $H(4,5)$.

Waktu pertama kali melakukan klaim	1	2	3	4	5	6	7
Jumlah klaim	2	1	2	2	1	2	2

A. (0,189 , 1,361)

B. (0,206 , 1,545)

C. (0,248 , 1,402)

D. (0,283 , 1,266)

E. (0,314 , 1,437)

Pembahasan: Penghitungan taksiran Nelson-Åalen diberikan dalam tabel berikut

y_j	s_j	r_j
1	2	12
2	1	10
3	2	9
4	2	7
5	1	5
6	2	4
7	2	2

Estimasi dari $H(4,5)$ dan variansinya adalah

$$\hat{H}(4,5) = \frac{2}{12} + \frac{1}{10} + \frac{2}{9} + \frac{2}{7} = 0,7746,$$

$$Var(\hat{H}(4,5)) = \frac{2}{12^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{9^2} + \frac{2}{7^2} = 0,0894.$$

Sehingga kepercayaan linear 95% untuk $H(4,5)$ adalah

$$(0,7746 - 1,96\sqrt{0,0894}, 0,7746 + 1,96\sqrt{0,0894}) = (0,1886, 1,3606).$$

Jawab: A

23. Sebuah cohort dari pasien penyakit kritis diamati dari waktu $t = 0$ sampai semua meninggal pada $t = 5$. Diberikan informasi sebagai berikut:

    a)

    b) $\hat{Var}(S_n(1)) = \hat{Var}(S_n(3))$ berdasarkan data aktual.

    c) Rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan sampai $t = 3$ adalah $7/6$.

    Hitunglah banyaknya kematian yang terjadi saat $t = 4$.

Waktu t	Meninggal pada saat t
1	6
2	9
3	5
4	d_4
5	d_5

A. 1

B. 3

C. 5

D. 10

E. 15

Pembahasan:

Waktu t	r_t	S_t	$r_t - S_t$	$S_n(t)$
1	$20 + d_4 + d_5$	6	$14 + d_4 + d_5$	$\frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
2	$14 + d_4 + d_5$	9	$5 + d_4 + d_5$	$\frac{5 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
3	$5 + d_4 + d_5$	5	$d_4 + d_5$	$\frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
4	$d_4 + d_5$	d_4	d_5	$\frac{d_5}{20 + d_4 + d_5}$
5	d_5	d_5	0	0

Diketahui bahwa

$$\widehat{V}ar(S_n(1)) = \frac{S_n(1) - (1 - S_n(1))}{n} = \frac{S_n(3) - (1 - S_n(3))}{n} = \widehat{V}ar(S_n(3))$$

Dengan demikian kita peroleh

$$\frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\left(1 - \frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\right) = \frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\left(1 - \frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\right)$$

$$\frac{6(14 + d_4 + d_5)}{20 + d_4 + d_5} = \frac{20(d_4 + d_5)}{20 + d_4 + d_5}$$

$$6(14 + d_4 + d_5) = 20(d_4 + d_5)$$

$$84 = 14d_4 + 14d_5 \tag{2.3}$$

Pada akhir tahun ketiga terdapat $d_4 + d_5$ pasien yang masih hidup dengan peluang bahwa pasien tersebut akan hidup hingga tahun keempat adalah $\frac{d_5}{d_4+d_5}$. Diantara jumlah tersebut, sebanyak d_4 pasien akan meninggal di tahun keempat, dan d_5 pasien akan meninggal di tahun kelima. Oleh karena itu, rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan hidup pada $t = 3$ adalah

$$\frac{d_4 \times 1 + d_5 \times 2}{d_4 + d_5} = \frac{d_4 + 2d_5}{d_4 + d_5} = \frac{7}{6} \rightarrow d_4 = 5d_5$$

Selanjutnya, substitusikan $d_4 = 5d_5$ ke dalam persamaan (1), sehingga kita peroleh

$$84 = 14(5d_5) + 14d_5 \rightarrow d_5 = 1$$

Jadi, banyak pasien yang meninggal saat $t = 3$ adalah $d_4 = 5d_5 = 5$.

Jawab : C

24. Diberikan data sebagai berikut

Besaran klaim (X)	Jumlah Klaim
(0,25]	25
(25,50]	28
(50,100]	15
(100,200]	6

Diasumsikan besarnya klaim berdistribusi seragam pada setiap interval. Hitunglah $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[(X \wedge 150)^2]$

A. kurang dari 200

B. paling sedikit 200 akan tetapi kurang dari 300

C. paling sedikit 300 akan tetapi kurang dari 400

D. paling sedikit 400 akan tetapi kurang dari 500

E. paling sedikit 500

Pembahasan: Peluang empirik untuk permasalahan ini dapat dihitung dengan menggunakan formula,

$$f_n(x) = \frac{F_n(c_j) - F_n(c_{j-1})}{c_j - c_j}.$$

yang perhitungannya diberikan dalam table berikut

Karena nilai dari $\mathbb{E}(X^2)$ dan $\mathbb{E}((X \wedge 150)^2)$ hanya berbeda di suku terakhir yaitu ketika besar

Besaran klaim (X)	Jumlah Klaim	Jumlah klaim kumulatif	$f_{74}(x)$
(0,25]	25	25	$\frac{25/74-0}{25} = \frac{1}{74}$
(25,50]	28	53	$\frac{53/74-25/74}{25} = \frac{28}{74\times 25}$
(50,100]	15	68	$\frac{15}{74\times 50}$
(100,200]	6	74	$\frac{6}{74\times 100}$

klaim diantara 100 dan 200 maka dapat dihitung

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}((X \wedge 150)^2) &= \frac{6}{74 \times 100}\frac{1}{3}(200^3 - 100^3) \\
&\quad - \frac{6}{74 \times 100}\frac{1}{3}(150^3 - 100^3) + \frac{6}{74 \times 100}(150^2)50 \\
&= \frac{6}{74 \times 100}\frac{1}{3}(200^3 - 100^3 - (150^3 - 100^3 + 150^2 \times 50 \times 3)) \\
&= \frac{6}{74 \times 100}\frac{1}{3}(200^3 - 150^3 - 150^2 \times 50 \times 3)) \\
&= 337,8374.
\end{aligned}
$$

Jawab: C

25. Diberikan informasi sebagai berikut
    i. Sebuah sampel pembayaran klaim : 29 64 90 135 182
    ii. Besarnya klaim diasumsikan berdistribusi eksponensial
    iii. Rata-rata dari distribusi eksponensial diestimasi dengan menggunakan metode moment

    Hitunglah nilai statistik uji Kolmogorov-Smirnov.

    A. 0,14
    B. 0,16
    C. 0,19
    D. 0,25
    E. 0,27

Pembahasan: Statistik uji untuk Kolmogorov-Smirnov adalah

$$D = \max_{x_1 \leq x \leq x_n} |F_n(x) - F^*(x)|.$$

Jawab: E

x	$F^*(x)$	$F_n(x-)$	$F_n(x)$	$\max\|F_n(x) - F*(x)\|$
29	0,2517	0	0,2	0,2517
64	0,4727	0,2	0,4	0,2727
90	0,5934	0,4	0,6	0,1934
135	0,7408	0,6	0,8	0,1408
182	0,8380	0,8	1	0,1620
			max	0,2727

26. Diberikan informasi sebagai berikut:
    - Kerugian mengikuti sebuah distribusi Pareto dengan parameter θ (tidak diketahui) dan $\alpha = 3$.
    - Sebanyak 300 kerugian telah diamati.

    Tentukan variansi dari $\tilde{\theta}$ taksiran θ dengan menggunakan metode moment.

    A. $0,0025\theta^2$

    B. $0,0033\theta^2$

    C. $0,0050\theta^2$

    D. $0,0100\theta^2$

    E. $0,0133\theta^2$

Pembahasan: Karena kerugian berdistribusi Pareto maka

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{\theta^2\Gamma(2+1)\Gamma(3-2)}{\Gamma(3)} = \frac{\theta^2 2!1}{2!} - \left(\frac{\theta\Gamma(2)\Gamma(3-1)}{\Gamma(3)}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}\theta^2 \end{aligned}$$

Estimasi θ menggunakan metode moment adalah

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2} \\ \tilde{\theta} &= 2\bar{X}. \end{aligned}$$

Variansi dari $\tilde{\theta}$ dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\theta}) &= Var(2\bar{X}) = \frac{4}{n}Var(X_i) \\ &= \frac{4}{n}\frac{3}{4}\theta^2 = \frac{3}{300}\theta^2 = 0,01\theta^2 \end{aligned}$$

Jawab: D

27. Anda telah mencocokkan (*fitted*) sebuah sampel klaim berukuran 30 ke distribusi berikut dengan menggunakan maksimum likelihood.

Distribusi	Jumlah Parameter	Negatif likelihood
Eksponensial	1	123,2
Inverse Gaussian	2	121,4
Generalized Pareto	3	120,4
Transformed Beta	4	x

Dengan menggunakan kriteria *Schwarz Bayesian*, tentukan batas atas terkecil dari nilai x sedemikian sehingga terpilih distribusi dengan 4 parameter.

A. 118,0

B. 118,1

C. 118,4

D. 118,5

E. 118,7

Pembahasan: Schwarz Bayesian Criterion (SBC) didefinisikan sebagai

$$SBC = \ln L(\hat{\theta}) - \frac{r}{2}\ln n.$$

Sehingga SBC untuk masing-masing model adalah

Distribusi	Jumlah Parameter	Negatif likelihood	SBC
Eksponensial	1	123,2	-124,9006
Inverse Gaussian	2	121,4	-124,8012
Generalized Pareto	3	120,4	-125,5018
Transformed Beta	4	x	

Agar terpilih distribusi dengan 4 parameter, yang dalam hal ini adalah Transformed Beta, maka SBC untuk Transformed Beta harus lebih besar dari -124.8012

$$-x - \frac{4}{2}\ln 30 > -124,8012$$
$$x < 124,8012 - \frac{4}{2}\ln 30 = 117,9988.$$

Jawab: A.

28. Rata-rata pembayaran pada setiap kerugian untuk sebuah pertanggungan asuransi dengan deductible 100 diestimasi dengan menggunakan tiga observasi berikut:
200 400 600

Hasil estimasi adalah 300.

Hitunglah approksimasi bootstrap dari mean square error untuk estimasi ini.

A. 20.000/3

B. 80.000/9

C. 40.000/3

D. 20.000

E. 80.000/3

Pembahasan: Taksiran Bootstrap dari MSE untuk estimasi tersebut adalah

$$\frac{\frac{1}{3}(200^2 + 200^2)}{3} = \frac{80.000}{9}.$$

Jawab: B

29. X mengikuti sebuah distribusi inverse eksponensial dengan $\theta = 50$.

Simulasikan X menggunakan angka acak seragam [0,1) berikut ini dan metode inversi.
0,4 0,6 0,9 Hitunglah nilai simulasi dari $\mathbb{E}[X \wedge 100]$.

A. 57

B. 62

C. 67

D. 76

E. 84

Pembahasan: Fungsi distribusi kumulatif dari X adalah

$$F_X(x) = e^{-\theta/x},$$

sehingga diperoleh fungsi kuantilnya

$$F_X^{-1}(y) = -\frac{\theta}{\ln y}.$$

Nilai kerugian dari masing-masing hasil simulasi diberikan dalam tabel berikut

y	$x = F_X^{-1}(y)$	$(x \wedge 100)$
0,4	54,5678	54,678
0,6	97,8808	97,8808
0,9	474,5611	100

sehingga estimasi dari $\mathbb{E}(X \wedge 150)$ menjadi

$$\frac{54,5678 + 97,8808 + 100}{3} = 84,1495.$$

Jawab: E

30. Sebuah kelumpok beranggotakan 100 individu. Setiap individu pada kelompok ini memiliki tingkat kematian $q_x = 0,01$. Kematian antar individu adalah saling bebas (*independent*).

    Anda akan melakukan simulasi pengalaman mortalitas selama tiga tahun untuk kelompok ini dengan menggunakan metode inversi. Gunakan tiga angka berikut dari distribusi seragam [0,1): 0,12 0,35 0,68.

    Hitunglah jumlah kematian yang disimulasikan selama tiga tahun

    A. 0

    B. 1

    C. 2

    D. 3

    E. 4

    Pembahasan: Fungsi masa peluang untuk banyaknya kematian adala

    $$p(x) = \binom{100}{x} 0,01^x (0.99)^{100-x}$$

    Dari sini diperoleh fungsi distribusi di 0 dan 1 adalah sebagai berikut

    $$F(0) = p(0) = 0,99^{100} = 0,3660,$$

    $$F(1) = F(0) + p(1) = 0,3660 + 0,3697 = 0,7357.$$

    Dari informasi tersebut diketahui jika angka random yang muncul kurang dari 0,3660 maka nilai simulasi banyaknya kematian adalah 0, sedangkan jika angka random yang muncul adalah 0,3660 atau diantara 0,3660 dan 0,7357 maka nilai simulasi banyaknya kematian adalah 1. Dari keterangan tersebut diperoleh nilai simulasi banyaknya kematian adalah: 0, 0, dan 1.

    Jawab: B

3 Periode Mei 2017

1. Anda adalah seorang produser sebuah acara kuis di televisi yang menyediakan hadiah berupa uang tunai. Banyaknya hadiah, N, dan nilai hadiah, X, berdistribusi sebagai berikut:

n	$\Pr(N = n)$
1	0,8
2	0,2

x	$\Pr(X = x)$
0	0,2
100	0,7
1.000	0,1

Besarnya anggaran yang disediakan sebagai hadiah adalah sebesar ekspektasi hadiah yang diperoleh ditambah simpangan bakunya. Hitunglah besarnya anggaran tersebut.

A. 306

B. 318

C. 416

D. 506

E. 518

Pembahasan: Jika S menunjukkan total nominal hadiah yang dikeluarkan oleh acara kuis tersebut, maka

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Pertama, akan dihitung nilai harapan dari S, yaitu $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(N) = 1 \times 0,8 + 2 \times 0,2 = 1,2,$$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0,2 + 100 \times 0,7 + 1000 \times 0,1 = 170,$$

sehingga

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) = 1,2 \times 170 = 204.$$

Untuk menghitung variansi dari S terlebih dahulu dihitung Var(N) dan Var(X)

$$Var(N) = 1^2 \times 0,8 + 2^2 \times 0,2 - (1.2^2) = 0,16,$$

$$Var(X) = 0^2 \times 0,2 + 100^2 \times 0,7 + 1.000^2 \times 0,1 - (170^2) = 78.100.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} Var(S) &= \mathbb{E}(Var(S|N)) + Var(E(S|N)) \\ &= Var(X)\mathbb{E}(N) + (\mathbb{E}(X))^2 Var(N) = 98.344 \end{aligned}$$

atau dengan kata lain

$$sd(S) = \sqrt{98.344} = 313,5985.$$

Jadi besarnya anggaran tersebut adalah

$$\mathbb{E}(S) + sd(S) = 517,5985.$$

Jawab: E

2. Kerugian yang dialami sebuah perusahaan diketahui berdistribusi frekuensi Poisson dengan rata-rata (*mean*) sebesar 2 per tahun dan besaran dari sebuah kerugian adalah 1,2 atau 3 dengan probabilitas masing-masing adalah 1/3.

   Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*). Sebuah polis asuransi akan memberikan pertanggungan terhadap semua kerugian yang dialami selama satu tahun dengan *annual aggregate deductible* sebesar 2.

   Hitunglah ekspektasi pembayaran klaim dari polis asuransi tersebut.

   A. 2,00

   B. 2,36

   C. 2,45

   D. 2,81

   E. 2,96

   Pembahasan: Karena besar klaim kelipatan 1 maka untuk menghitung ekspektasi dari stop loss dengan deductible 2 diperlukan $g_0 = \mathbb{P}(S = 0), g_1$

$$g_0 = \mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-2} = 0,1353,$$

$$g_1 = \mathbb{P}(S=1) = \mathbb{P}(S=1|N=1)\mathbb{P}(N=1) = \frac{1}{3}\frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0,0902.$$

Dari kedua nilai ini diperoleh

$$\mathbb{P}(S \geq 2) = 1 - g_0 - g_1 = 0,7744.$$

Nilai ekspektasi

$$\mathbb{E}(S \wedge 2) = \sum_{j=0}^{1} jg_j + 2\mathbb{P}(S \geq 2) = 0 \times g_0 + 1 \times 0,0902 + 2 \times 0,7744 = 1,6391.$$

Di lain pihak, mean dari S

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(N) = \frac{1+2+3}{3} \times 2 = 4$$

sehingga

$$\mathbb{E}(S-2)_+ = \mathbb{E}(S) - \mathbb{E}(S \wedge 2) = 4 - 1,6391 = 2,3609.$$

Jawab: B

3. Sebuah kerugian berdistribusi Pareto dengan parameter α dan $\theta = 1.000$. *The Loss Elimination Ratio* (LER) pada 600 adalah 0,4.

   Tentukan nilai α

   A. kurang dari 1,9

   B. paling sedikit 1,9 akan tetapi kurang dari 2,0

   C. paling sedikit 2,0 akan tetapi kurang dari 2,1

   D. paling sedikit 2,1 akan tetapi kurang dari 2,2

   E. paling sedikit 2,2

   Pembahasan: Karena diketahui $X \sim Pareto(\alpha, \theta = 1.000)$ maka

$$\begin{aligned} LER &= \frac{\mathbb{E}(X \wedge d)}{\mathbb{E}(X)} \\ &= \frac{\frac{\theta}{\alpha-1}\left[1 - \left(\frac{\theta}{d+\theta}\right)^{\alpha-1}\right]}{\frac{\theta}{\alpha-1}} \\ 0,4 &= 1 - \left(\frac{1000}{600+1000}\right)^{\alpha-1} \\ \alpha &= 2,0869. \end{aligned}$$

Jawab: C

4. Diberikan data tentang besaran kerugian dalam sebuah pertanggungan asuransi. Data dico-

Range	Banyaknya kerugian
0-1.000	25
1.000 - 2.000	15
2.000+	10

cokkan (*fitted*) terhadap distribusi Weibull menggunakan metode *maximum likelihood*.

Tentukan nilai estimasi dari τ.

A. 0,8

B. 1,0

C. 1,2

D. 1,4

E. 1,6

Pembahasan: Fungsi distribusi Weibull adalah

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\theta)^{\tau}}.$$

Akan dikerjakan dengan menggunakan *obersved frequency* untuk mengestimasi parameter dengan metode MLE. Total observasi dari soal tersebut adalah 25+15+10=50. Sehingga diperoleh *fitted distribution* $F(1000) = 25/50 = 0,5$, $F(2000) = 40/50 = 0,8$, dengan kata lain

$$e^{-(1000/\theta)^{\tau}} = 1 - 0,5 = 0,5 \tag{3.1}$$

atau

$$\left(\frac{1000}{\tau}\right)^{\tau} = \ln 2$$

dan

$$e^{-(2000/\theta)^{\tau}} = 1 - 0,8 = 1/5. \tag{3.2}$$

atau

$$\begin{aligned}\left(\frac{2000}{\theta}\right)^{\tau} &= \ln 5\\ 2^{\tau}\ln 2 &= \ln 5\\ \tau &= \frac{\ln\left(\frac{\ln 5}{\ln 2}\right)}{\ln 2} = 1,2153.\end{aligned}$$

Jawab: C

5. Diberikan data sebagai berikut:
   (i) Sebuah portfolio terdiri dari 100 risiko berdistribusi identik dan saling bebas (iid).
   (ii) Banyaknya klaim pada setiap risiko berdistribusi Poisson dengan rata-rata (*mean*) adalah λ.
   (iii) The prior distribution dari λ adalah:

$$\pi(\lambda) = \frac{(50\lambda)^4 e^{-50\lambda}}{6\lambda}; \lambda > 0$$

Selama tahun pertama, pengalaman kerugian yang diamati adalah sebagai berikut: Tentukan

Banyaknya klaim	Banyaknya risiko
0	90
1	7
2	2
3	1
Total	100

ekspektasi Bayesian dari banyaknya klaim pada tahun kedua untuk portfolio ini.

A. 8

B. 10

C. 11

D. 12

E. 14

Pembahasan: Dari soal diperoleh

$$\sum X_i = 0 \times 90 + 1 \times 7 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 14.$$

Karena diketahui banyaknya klaim setiap risiko berdistribusi Poisson, maka distribusi model untuk banyaknya klaim

$$f_{\mathbf{X}|\lambda}(\mathbf{x}|\lambda) \propto e^{-n\lambda} \lambda^{\sum X_i} = e^{-100\lambda} \lambda^1 4.$$

Distribusi posterior dari permasalahan tersebut adalah

$$\begin{aligned} \pi_{\Lambda|\mathbf{X}}(\lambda|\mathbf{x}) &\propto e^{-100\lambda} \lambda^1 4 \frac{(50\lambda)^4 e^{-50\lambda}}{6\lambda} \\ &\propto e^{-150\lambda} \lambda^1 7 \end{aligned}$$

Jadi distribusi posteriornya adalah Gamma dengan $\alpha^* = 17 + 1 = 18$ dan $\beta^* = \frac{1}{150}$. Ekspektasi Bayesian banyaknya klaim masing-masing risiko adalah

$$\alpha^* \beta^* = \frac{18}{150},$$

sehingga ekspektasi Bayesian dari banyaknya klaim untuk portofolio adalah

$$100 \times \frac{18}{150} = 12.$$

Jawab: D.

6. Sebuah lini bisnis memiliki 3 (tiga) jenis klaim. Probabilitas historis dan banyaknya klaim untuk setiap jenis klaim pada tahun berjalan (current year) adalah :

Jenis Klaim	Probabilitas historis	Banyaknya klaim pada tahun berjalan
A	0,2744	112
B	0,3512	180
C	0,3744	138

Anda melakukan pengujian dengan hipotesis nol (null hypothesis) bahwa probabilitas setiap jenis klaim pada tahun berjalan sama dengan probabilitas historis.

Hitunglah nilai statistik uji *Chi-square goodness of fit*.

A. kurang dari 9

B. paling sedikit 9 akan tetapi kurang dari 10

C. paling sedikit 10 akan tetapi kurang dari 11

D. paling sedikit 11 akan tetapi kurang dari 12

E. paling sedikit 12

Pembahasan: Dari data diperoleh informasi berikut ini

Jenis Klaim	E_j	O_j
A	117,9920	112
B	157,0160	180
C	160,9920	138

Statistik dengan menggunakan uji *Chi-square goodness of fit* adalah

$$
\begin{aligned}
\chi^2 &= \sum_{j=1}^{3} \frac{(E_j - O_j)^2}{E_j} \\
&= \frac{(117,9920 - 112)^2}{117,9920} + \frac{(157,0160 - 180)^2}{157,0160} + \frac{(160,9920 - 138)^2}{160,9920} \\
&= 9,1507.
\end{aligned}
$$

Jawab: B.

7. Diberikan data sebagai berikut:

   a) Banyaknya klaim tahunan untuk seorang tertanggung memiliki fungsi probabilitas:

   $$\begin{pmatrix} p(x) = 3 \\ xq^x(1-q)^{3-x}, x = 0,1,2,3 \end{pmatrix}$$

   b) *The prior density* adalah $\pi(q) = 2q, 0 < q < 1$.

   Seorang tertanggung yang dipilih secara acak diketahui tidak melakukan klaim (zero claim) pada tahun pertama. Untuk tertanggung yang terpilih tersebut, hitunglah estimasi banyaknya klaim pada tahun kedua dengan menggunakan metode kredibilitas Bühlmann.

   A. 0,33

   B. 0,50

   C. 1,00

   D. 1,33

   E. 1,50

Pembahasan: Pertama, akan dicari mean dan variansi dari distribusi prior

$$\mathbb{E}(Q) = \int_0^1 q.2qdq = \frac{2}{3},$$

$$Var(Q) = \int_0^1 q^2.2qdq - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}.$$

Dari soal diketahui $X|q \sim Bin(3,q)$ sehingga

$$\mu(q) = \mathbb{E}(X|q) = 3q,$$

$$v(q) = Var(X|q) = 3q(1-q)$$

$$\mu = \mathbb{E}(\mu(Q)) = \mathbb{E}(3Q) = 3\mathbb{E}(Q) = 3 \times \frac{2}{3} = 2,$$
$$v = \mathbb{E}(v(Q)) = \mathbb{E}(3Q - 3Q^2) = 3 \times \frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$a = Var(\mu(Q)) = Var(3Q) = 9 \times \frac{1}{18} = \frac{1}{2}.$$

$$Z = \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Sehingga kredibilitas Bühlmann-nya adalah

$$CP = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Jawab: C

8. Sebuah kerugian memiliki fungsi distribusi:

$$F(x) = \begin{cases} (x/100)^2, & 0 \leq x \leq 100 \\ 1, & 100 < x \end{cases}$$

Sebuah perusahaan asuransi akan membayarkan 80% dari nilai kerugian setelah dikurangi ordinary deductible sebesar 20, dengan maksimum pembayaran sebesar 60 untuk setiap kerugian.

Hitunglah ekspektasi bersyarat pembayaran klaim (*the conditional expected claim payment*), jika diketahui bahwa sebuah pembayaran telah dilakukan

A. 37

B. 39

C. 43

D. 47

E. 49

Pembahasan: Kerugian maksimal, u, yang dicover perusahaan adalah

$$0,8(u - 20) = 60$$
$$u = 20 + \frac{60}{0,8} = 95$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^L) &= 0.8\Big[\mathbb{E}(X \wedge 95) - \mathbb{E}(X \wedge 20)\Big] \\
&= 0.8\Big[\int_0^{95} S(x)dx - \int_0^{20} S(x)dx\Big] \\
&= 0.8\Big[\int_0^{95} \Big[1 - (\frac{x}{100})^2\Big]dx - \int_0^{20} \Big[1 - (\frac{x}{100})^2\Big]dx\Big] \\
&= 0.8 \int_{20}^{95} \Big[1 - \Big(\frac{x}{100}\Big)^2\Big]dx = 37,35.
\end{aligned}$$

Ekspektasi biaya per pembayaran

$$\mathbb{E}(Y^P) = \frac{\mathbb{E}(Y^L)}{1 - F(20)} = \frac{37.35}{1 - 0,04} = 38,91.$$

Jawab: B

9. Diberikan data sebagai berikut:

   a) Sampel kerugian berukuran 15 adalah sbb:

11	22	22	22	36
51	69	69	69	92
92	120	161	161	230

   b) $\hat{H}_1(x)$ adalah taksiran empiris Nelson Åalen dari fungsi kumulatif *hazard rate*.

   c) $\hat{H}_2(x)$ adalah taksiran maksimum likelihood dari fungsi kumulatif *hazard rate* dengan asumsi sampel diambil dari sebuah distribusi exponensial.

   Hitunglah $|\hat{H}_2(75) - \hat{H}_1(75)|$.

   A. 0,11

   B. 0,22

   C. 0,33

   D. 0,44

   E. 0,55

Pembahasan: Taksiran empiris Nelson Åalen dari fungsi kumulatif *hazard rate* di 75 adalah

$$\hat{H}_1(75) = \frac{1}{15} + \frac{3}{14} + \frac{1}{11} + \frac{1}{10} + \frac{3}{9} = 0,8052,$$

sedangkan menggunakan maximum likelihood dengan diketahui X berdistribusi eksponensial diperoleh estimasi parameter

$$\hat{\theta} = \bar{X} = \frac{1227}{15} = 81,8,$$

sehingga fungsi kumulatif *hazard rate* dengan menggunakan delta method adalah

$$\hat{H}_2(75) = -\ln e^{-\frac{75}{81,8}} = \frac{75}{81,8} = 0,9169.$$

Jadi,

$$|\hat{H}_2(75) - \hat{H}_1(75)| = 0,1117.$$

Jawab: A

10. Diberikan 4(empat) grup tertanggung, masing-masing tertanggung mempunyai kemungkinan memiliki jumlah klaim sama dengan nol atau satu, dengan probabilitas sebagai berikut

Grup	Jumlah klaim	
	0	1
I	0,9	0,1
II	0,8	0,2
III	0,5	0,5
IV	0,1	0,9

Sebuah grup dipilih secara acak(dengan probabilitas = 1/4) dan sebanyak 4(empat) orang tertanggung dipilih secara acak dari grup tersebut, diperoleh bahwa total jumlah klaim adalah 2(dua).

Jika 5(lima) tertanggung dipilih secara acak dari grup yang sama, tentukan estimasi jumlah klaim dengan menggunakan metode Buhlmann-Straub Credibility.

A. 1,8

B. 2,0

C. 2,2

D. 2,4

E. 2,6

Pembahasan: Dihitung *hypothetical mean* dan nilai kuadratnya untuk mendapatkan variansi dari *hypothetical mean*

$$\mathbb{E}(\mu(\Theta)) = \frac{0,1 + 0,2 + 0,5 + 0,9}{4} = 0,425$$

$$\mathbb{E}(\mu(\Theta)^2) = \frac{0,01 + 0,04 + 0,25 + 0,81}{4} = 0,2775$$

$$a = Var(\mu(\Theta)) = 0,2775 - 0,425^2 = 0,096875.$$

Masing-masing grup berdistribusi Bernoulli, sehingga variansi

$$v = \frac{(0,9)(0,1) + (0,8)(0,2) + (0,5)(0,5) + (0,1)(0,9)}{4} = 0,1475.$$

Faktor kredibilitas untuk permasalahan ini menjadi

$$Z = \frac{4}{4 + v/a} = \frac{4}{4 + 0,1475/0,096875} = 0,7243,$$

dan estimasi jumlah klaim adalah

$$5(0,425 + 0,7243(0,5 - 0,425)) = 2,3966.$$

Jawab: C.

11. Sebuah perusahaan asuransi mempunyai 2(dua) jenis klaim asuransi. Untuk setiap jenis klaim tersebut, banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson dan besarnya klaim berdistribusi secara seragam (uniform) sebagai berikut:

Jenis Klaim	Parameter Poisson λ untuk jumlah klaim	Range dari masing-masing besaran klaim
I	12	(0, 1)
II	4	(0, 5)

Banyaknya klaim dari dua jenis pertanggungan saling bebas *(independent)* serta besarnya klaim dan banyaknya klaim saling bebas.

Hitunglah probabilitas nilai total klaim melebihi 18 dengan menggunakan aproksimasi normal.

A. 0,37

B. 0,39

C. 0,41

D. 0,43

E. 0,45

Pembahasan: Untuk masing-masing jenis klaim diperoleh

$$\mathbb{E}(X_I) = \frac{1}{2}, Var(X_I) = \frac{1}{12}$$

$$\mathbb{E}(X_{II}) = \frac{5}{2}, Var(X_{II}) = \frac{25}{12}$$

Sehingga masing-masing mean dan variansi dari agregatnya adalah

$$\mathbb{E}(S_I) = 12\frac{1}{2} = 6,$$

$$Var(S_I) = \mathbb{E}(Var(S_I|N)) + Var(\mathbb{E}(S_I|N)) = \frac{1}{d12}12 + \frac{1}{4}12 = 4$$

$$\mathbb{E}(S_{II}) = 4\frac{5}{2} = 10,$$

$$Var(S_{II}) = \mathbb{E}(Var(S_{II}|N)) + Var(\mathbb{E}(S_{II}|N)) = \frac{25}{12}4 + \frac{25}{4}4 = \frac{100}{3}$$

Diketahui total klaim $S = S_I + S_{II}$ sehingga

$$\mathbb{E}(S) = 16$$

dan

$$Var(S) = \frac{112}{3}.$$

Taksiran normal untuk nilai peluang tersebut adalah

$$\mathbb{P}(S > 18) = 1 - \Phi\Big(\frac{18-16}{\sqrt{112/3}}\Big) = 1 - \Phi(0,33) = 1- =,6293 = 0,3707.$$

Jawab: A

12. Kerugian pada tahun 2015 berdistribusi Pareto dengan dua parameter $\theta = 5$ dan $\alpha = 2$. Kerugian pada tahun 2016 diketahui 20% lebih tinggi secara seragam (*uniformly*) dari kerugian pada tahun 2015. Sebuah asuransi memberikan pertanggungan dengan *ordinary deductible* sebesar 10. Hitunglah *Loss Elimination Ratio (LER)* pada tahun 2016.

    A. 5/9

    B. 5/8

    C. 2/3

    D. 3/4

    E. 4/5

Pembahasan:

$$\begin{aligned} LER_{2016} &= \frac{\mathbb{E}(X_{2016} \wedge 10)}{\mathbb{E}(X_{2016})} \\ &= \frac{(1+20\%)\mathbb{E}\left(X_{2015} \wedge \frac{10}{1+20\%}\right)}{(1+20\%)\mathbb{E}(X_{2015})} \\ &= \left[1 - \left(\frac{5}{\frac{10}{1+20\%}+5}\right)^{2-1}\right] \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Jawab: B

13. Sebanyak 15 orang penderita kanker diamati sejak tanggal diagnosa sampai mana yang terjadi lebih dahulu antara tanggal kematian atau 36 bulan setelah tanggal diagnosa.

Kematian yang terjadi selama masa pengamatan adalah sebagai berikut.

Waktu sejak tanggal diagnosa (dinyatakan dalam bulan)	Banyaknya kematian yang terjadi
15	2
20	3
24	2
30	d
34	2
36	1

Taksiran *Nelson-Åalen* $\hat{H}(35)$ adalah 1,5641. Hitunglah taksiran *Nelson-Aalen* untuk variansi dari $\hat{H}(35)$.

A. kurang dari 0,10

B. paling sedikit 0,10 akan tetapi kurang dari 0,15

C. paling sedikit 0,15 akan tetapi kurang dari 0,20

D. paling sedikit 0,20 akan tetapi kurang dari 0,25

E. paling sedikit 0,25

Pembahasan: Data yang diberikan adalah

y_i	s_i	r_i
15	2	15
20	3	13
24	2	10
30	d	8
34	2	$8-d$
36	1	$6-d$

Taksiran Nelson-Åalen

$$\begin{aligned}\hat{H}(35) &= \frac{2}{15}+\frac{3}{13}+\frac{2}{10}+\frac{d}{8}+\frac{2}{8-d}\\ 1,5641 &= 0,5641+\frac{d}{8}+\frac{2}{8-d}\\ d(8-d)+16 &= 64-8d\\ d^2-16d+48 &= 0\\ (d-12)(d-4) &= 0\\ d &= 12 \text{ atau } d=4\end{aligned}$$

Karena $r=8$ pada saat $y=30$ jadi haruslah $d\le 8$. Jadi, $d=4$. Sehingga dapat dihitung variansi dari $\hat{H}(35)$ sebgai berikut

$$Var(\hat{H}(35)) = \frac{2}{15^2}+\frac{3}{13^2}+\frac{2}{10^2}+\frac{4}{8^2}+\frac{2}{4^2} = 0,2341.$$

Jawab: D

14. Interval (0,357 ; 0,700) adalah selang kepercayaan *log-transformed* 95% untuk fungsi kumulatif *hazard rate* pada waktu t, dimana fungsi kumulatif *hazard rate* diestimasi dengan menggunakan taksiran *Nelson-Aalen*.

    Hitunglah nilai taksiran *Nelson-Aalen* dari $S(t)$.

    A. 0,50

    B. 0,53

    C. 0,56

    D. 0,59

    E. 0,61

Pembahasan: Selang kepercayaan *log-transformed* 95% untuk $H(t)$ adalah

$$\left(\frac{\hat{H}(t)}{u}, \hat{H}(t)u\right).$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\hat{H}u}{\hat{H}(t)/u} &= \frac{0,7}{0,357}\\ u &= 1,4003\\ \hat{H}(t) &= 0,4999.\end{aligned}$$

Jadi

$$\hat{S}(t) = e^{-\hat{H}(t)} = e^{-0,4999} = 0,6066.$$

Jawab: E

15. Diberikan sebuah himpunan dari 5 (lima) hasil observasi yaitu $\{1,2,5,6,10\}$. Fungsi distribusi diestimasi dengan teknik kepadatan *kernel-smoothed* pada distribusi empiris menggunakan *triangular kernel* dengan *bandwidth* 4.

    Hitunglah $\mathbb{E}[X \wedge 10]$ untuk distribusi *kernel-smoothed*.

    A. 4

    B. $4\frac{1}{3}$

    C. $4\frac{1}{2}$

    D. $4\frac{2}{3}$

    E. 5

Pembahasan: Karena semua hasil observasi berbeda, maka $p(y_j) = \frac{1}{5}$ untuk semua $y_j = 1, 2, 5, 6, 10$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \wedge 10) &= \int_{-\infty}^{1} 0xf(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} f(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{10} x\sum_{j=1}^{5} p(y_j)k_{y_j}(x)dx + \int_{10}^{\infty} 10\sum_{j=1}^{5} p(y_j)k_{y_j}(x)dx\\ &= \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + \frac{10}{5}\sum_{j=1}^{5}\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\\ &= \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5}\left(\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\right)\end{aligned}$$

Dalam hal ini k menggunakan kernel triangular dengan bandwith 4, yaitu:

$$k_{y_j}(x) = \begin{cases} 0, & x < y_j - 4 \\ \frac{x-y_j+4}{16}, & y_j - 4 \le x < y_j \\ \frac{y_j+4-x}{16}, & y_j \le x < y_j + 4 \\ 0, & x > y_j + 4. \end{cases}$$

Untuk $j = 1$, $y_j = 1$, nilai dari integral

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\right) &= \int_{-3}^{1} x\Big(\frac{x+3}{16}\Big)dx + \int_{1}^{5} x\Big(\frac{5-x}{16}\Big)dx \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{7}{6} = 1.\end{aligned}$$

Untuk $j = 2$, $y_j = 2$, nilai dari integral

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\right) &= \int_{-2}^{2} x\Big(\frac{x+2}{16}\Big)dx + \int_{2}^{6} x\Big(\frac{6-x}{16}\Big)dx \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.\end{aligned}$$

Untuk $j = 3$, $y_j = 5$, nilai dari integral

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\right) &= \int_{1}^{5} x\Big(\frac{x-1}{16}\Big)dx + \int_{5}^{9} x\Big(\frac{9-x}{16}\Big)dx \\ &= -\frac{11}{6} + \frac{19}{6} = 5.\end{aligned}$$

Untuk $j = 4$, $y_j = 6$, nilai dari integral

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\right) &= \int_{2}^{6} x\Big(\frac{x-2}{16}\Big)dx + \int_{6}^{10} x\Big(\frac{10-x}{16}\Big)dx \\ &= -\frac{7}{3} + \frac{11}{3} = 6.\end{aligned}$$

Untuk $j = 5$, $y_j = 10$, nilai dari integral

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{10} xk_{y_j}(x)dx + 10\int_{10}^{\infty} k_{y_j}(x)dx\right) &= \int_{6}^{10} x\Big(\frac{x-6}{16}\Big)dx + 10\int_{10}^{14} \Big(\frac{14-x}{16}\Big)dx \\ &= -\frac{13}{3} + 5 = 9\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X \wedge 10) = \frac{1}{5}(1 + 2 + 5 + 6 + 9\frac{1}{3}) = 4\frac{2}{3}$$

Jawab: D

16. Dalam suatu studi mortalitas, pada awal pengamatan diketahui terdapat 200 individu. Tidak ada penambahan individu selama masa pengamatan. Waktu kematian yang diamati adalah sebagai berikut:

Waktu (t)	Banyaknya kematian yang terjadi saat t
2	1
5	2
10	1
15	2
20	3

Satu-satunya waktu dimana individu meninggalkan studi ini selain karna disebabkan oleh kematian adalah pada saat $t = 7$. Taksiran produk limit Kaplan-Meier dari $S(20)$ adalah 0,953564.

Tentukan banyaknya individu yang meninggalkan studi ini pada saat $t = 7$.

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

E. 13

Pembahasan: Misalkan banyaknya individu yang hidup pada $t = 10$ adalah x maka dipunyai tabel berikut,

t_i	s_i	r_i
2	1	200
5	2	199
10	1	x
15	2	$x-1$
20	3	$x-3$

Taksiran Kaplan-Meier dari $S(20)$ adalah

$$\begin{aligned}
\hat{S}(20) &= \left(1-\frac{1}{200}\right)\left(1-\frac{2}{199}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x-1}\right)\left(1-\frac{3}{x-3}\right)\\
\frac{0,953564}{0,985} &= \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{x(x-1)(x-3)}\\
x &= 188.
\end{aligned}$$

Sehingga banyaknya kematian sebelumnya, yaitu saat $t = 5$, adalah 2 dan jika l banyaknya individu yang meninggalkan studi pada saat $t = 7$ maka dipunyai hubungan

$$188 + l + 2 = 199.$$

Atau dengan kata lain

$$l = 199 - 188 - 2 = 9.$$

Jawab: A

17. Sebuah studi dilakukan terhadap pasien penyakit kritis dimulai saat $t = 0$ sampai semuanya meninggal saat $t = 5$. Diberikan data sebagai berikut:

i. .

Waktu (t)	Banyaknya kematian yang terjadi saat t
1	6
2	9
3	5
4	d_4
5	d_5

ii. $\hat{Var}(S_n(1)) = \hat{Var}(S_n(3))$ berdasarkan data aktual.

iii. Rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan hidup sampai $t = 3$ adalah 7/6.

Hitunglah banyaknya pasien yang meninggal pada saat $t = 4$.

A. 1

B. 3

C. 5

D. 10

E. 15

Pembahasan:

Waktu t	r_t	S_t	$r_t - S_t$	$S_n(t)$
1	$20 + d_4 + d_5$	6	$14 + d_4 + d_5$	$\dfrac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
2	$14 + d_4 + d_5$	9	$5 + d_4 + d_5$	$\dfrac{5 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
3	$5 + d_4 + d_5$	5	$d_4 + d_5$	$\dfrac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
4	$d_4 + d_5$	d_4	d_5	$\dfrac{d_5}{20 + d_4 + d_5}$
5	d_5	d_5	0	0

Diketahui bahwa

$$\widehat{V}ar(S_n(1)) = \frac{S_n(1) - (1 - S_n(1))}{n} = \frac{S_n(3) - (1 - S_n(3))}{n} = \widehat{V}ar(S_n(3))$$

Dengan demikian kita peroleh

$$\frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\left(1 - \frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\right) = \frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\left(1 - \frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\right)$$

$$\frac{6(14 + d_4 + d_5)}{20 + d_4 + d_5} = \frac{20(d_4 + d_5)}{20 + d_4 + d_5}$$

$$6(14 + d_4 + d_5) = 20(d_4 + d_5)$$

$$84 = 14d_4 + 14d_5 \tag{3.3}$$

Pada akhir tahun ketiga terdapat $d_4 + d_5$ pasien yang masih hidup dengan peluang bahwa pasien tersebut akan hidup hingga tahun keempat adalah $\frac{d_5}{d_4+d_5}$. Diantara jumlah tersebut, sebanyak d_4 pasien akan meninggal di tahun keempat, dan d_5 pasien akan meninggal di tahun kelima. Oleh karena itu, rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan hidup pada $t = 3$ adalah

$$\frac{d_4 \times 1 + d_5 \times 2}{d_4 + d_5} = \frac{d_4 + 2d_5}{d_4 + d_5} = \frac{7}{6} \rightarrow d_4 = 5d_5$$

Selanjutnya, substitusikan $d_4 = 5d_5$ ke dalam persamaan (1), sehingga kita peroleh

$$84 = 14(5d_5) + 14d_5 \rightarrow d_5 = 1$$

Jadi, banyak pasien yang meninggal saat $t = 3$ adalah $d_4 = 5d_5 = 5$.

Jawab : C

18. Diberikan hasil observasi sebagai berikut

    10 25 50 100

Data tersebut akan disesuaikan dengan sebuah distribusi lognormal dengan metode pecocokan (*matching*) rata-rata dan median.

Hitunglah *fitted probability* dari sebuah observasi yang bernilai lebih besar dari 40.

A. 34%

B. 38%

C. 42%

D. 46%

E. 50%

Pembahasan: Rata-rata dan median dari data adalah

$$\bar{X} = 46,25,$$

$$Median = \frac{25+50}{2} = 37,5.$$

Dengan menggunakan metode *mean and median matching* diperoleh,

$$\mathbb{E}(X) = \exp(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) = 46,25 \tag{3.4}$$

dan

$$\begin{aligned} F(x_{med}) = \Phi\Big(\frac{\ln x_{med} - \mu}{\sigma}\Big) &= \frac{1}{2} \\ \ln x_{med} - \mu &= 0 \\ 37,5 &= e^{\mu} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dari (3.4) dan (3.5) diperoleh

$$\sigma^2 = 0,4194$$

dan

$$\mu = \ln 37,5 = 3,6213.$$

Sehingga peluang sebuah observasi bernilai lebih besar dari 40 adalah

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > 40) = 1 - F(40) &= 1 - \Phi\Big(\frac{\ln 40 - 3,6243}{\sqrt{0,4194}}\Big) \\ &= 1 - \Phi(0,0997) = 0,4603. \end{aligned}$$

Jawab: D

19. Diberikan informasi sebagai berikut:

    i. Asuransi kecelakaan mobil tersedia dalam 2(dua) jenis pertanggungan yaitu *deductible* 1 dan *deductible* 3.

    ii. Besarnya kerugian (*Loss Sizes*) sebelum *deductible* pada pertanggungan dengan *deductible* 1 berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = k$ dan $\alpha = 2$

    iii. Besarnya kerugian (*Loss Sizes*) sebelum *deductible* pada pertanggungan dengan *deductible* 3 berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = 2k$ dan $\alpha = 2$

    iv. Hasil observasi beberapa klaim (setelah *deductible*) pada pertanggungan ini adalah:

    Deductible 1 : 3, 6, 8, 9, 10, 14
    Deductible 3 : 10, 30

    Estimasi k dengan menggunakan metode moment.

    A. 7,80

    B. 8,75

    C. 8,80

    D. 9,00

    E. 9,75

Pembahasan: Untuk X yang berdistribusi Pareto $(\theta, \alpha = 2)$ dengan deductible d, diketahui nilai-nilai berikut ini

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{\alpha - 1} = \theta$$

$$\mathbb{E}(X \wedge d) = \frac{\theta}{\alpha - 1}\Big[1 - \Big(\frac{\theta}{d + \theta}\Big)^{\alpha - 1}\Big] = \theta\Big[1 - \frac{\theta}{d + \theta}\Big]$$

dan dipunyai juga fungsi survival di d adalah

$$S_X(d) = \Big(\frac{\theta}{d + \theta}\Big)^{\alpha} = \Big(\frac{\theta}{d + \theta}\Big)^{2}.$$

Sehingga diperoleh mean excess loss function untuk X adalah

$$\begin{aligned} e(d) &= \frac{\mathbb{E}(X - d)_+}{S_X(d)} = \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge d)}{S_X(d)} \\ &= \frac{\frac{\theta}{d+\theta}}{\left(\frac{\theta}{d+\theta}\right)^2} = d + \theta. \end{aligned}$$

Karena terdapat 6 data dari deductible 1 dan 2 data dari deductible 3 maka proporsi untuk deductible 1 adalah $\frac{6}{6+2} = 0,75$, sedangkan proporsi untuk deductible 1 adalah $\frac{2}{6+2} = 0,25$.

Dengan menggunakan rataan terboboti pada methode moment diperoleh

$$\begin{aligned} 0,75(1+k)+0,25(3+2k) &= 0,75\frac{50}{6}+0,25\times 20 \\ k &= 7,80. \end{aligned}$$

Jawab: A

20. Diberikan pengalaman kerugian dari 2 (dua) tertanggung selama suatu periode 3 tahun sebagai berikut.

Tetanggung	Tahun ke-1	Tahun ke-2	Tahun ke-3
A	10	12	14
B	$10 - x$	$12 - x$	$14 - x$

Metode empiris bayes nonparametrik digunakan untuk menentukan kredibilitas pengalaman ini. Hitunglah rentang (range) nilai dari x dimana faktor kredibilitas dengan menggunakan metode empiris bayes nonparametrik bernilai lebih besar dari 0 (nol).

A. $x > 1,33$

B. $x > 1,63$

C. $x > 2,00$

D. $x > 2,67$

E. $x > 4,00$

Pembahasan: Dari soal diperoleh nilai-nilai berikut ini:

$$\bar{X}_A = \frac{10 + 12 + 14}{3} = 12,$$

$$\bar{X}_B = 12 - x,$$

dan

$$\mu = \frac{12 + 12 - x}{2} = 12 - \frac{1}{2}x.$$

$$v = \frac{2^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2}{(3-1) + (3-1)} = 4,$$

$$a = \frac{3(12 - (12 - \frac{1}{2}x))^2 + 3((12 - x) - (12 - \frac{1}{2}x))^2 - 4}{6 - \frac{1}{6}(3^2 + 3^2)} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}.$$

Sehingga agar faktor kredibilitasnya lebih besar 0 dipunyai

$$Z = \frac{3}{3 + \frac{4}{\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}}} > 0$$

$$\frac{3\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\right)}{3\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}\right) + 4} > 0$$

$$\frac{3x^2 - 8}{3x^2 + 16} > 0$$

Jadi haruslah $x < -\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)} = -1,6330$ atau $x > \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)} = 1,6330.$

Jawab: B

21. Kumpulan suatu klaim berdistribusi eksponensial dengan rata-rata θ, diberikan $\Theta = \theta$.

Diketahui fungsi kepadatan peluang dari Θ adalah sebagai berikut:

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(1500/\theta)^4 e^{-1500/\theta}}{6\theta}; \theta > 0$$

Seorang tertanggung dipilih secara acak, dan perusahaan asuransi mendapatkan catatan klaim sebagai berikut:
600 800 200 500 1200 600

Hitunglah ekspektasi besaran klaim posterior (*the posterior expected claim size*) untuk tertanggung tersebut.

A. 375

B. 390

C. 500

D. 540

E. 600

Pembahasan: Distribusi prior dari Θ tersebut adalah Inverse Gamma dengan parameter $\beta =$ 1500 dan $\alpha = 4$. Distribusi model dari **X** adalah

$$f_{\mathbf{X}|\Theta}(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j|\Theta}(x_j|\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum X_j}{\theta}\right).$$

Sehingga distribusi posterior untuk Θ adalah

$$\begin{aligned}\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x}) &\propto \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \exp\left(-\frac{\sum X_j}{\theta}\right)\frac{(1500/\theta)^4\exp(-1500/\theta)}{6\theta}\\ &\propto \theta^{-n-5}\exp\left(-\frac{\sum X_i + 1500}{\theta}\right)\end{aligned}$$

Jadi $\Theta|\mathbf{x}$ berdistribusi Inverse Gamma dengan parameter α^* dan β^*, dimana

$$-\alpha^* - 1 = -n - 5$$

atau dengan kata lain $\alpha^* = n + 4$ dan

$$\beta^* = \sum X_i + 1500.$$

Dari sini dapat dihitung ekspektasi besaran klaim posterior

$$\mathbb{E}(\Theta|\mathbf{X}) = \frac{\beta^*}{\alpha^* - 1} = \frac{5400}{9} = 600.$$

Jawab: E

22. Dengan menggunakan metode inversi anda melakukan simulasi terhadap sebuah peubah acak dengan fungsi kepadatan peluang:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Gunakan angka acak berikut ini yang berasal dari distribusi seragam [0,1]
0,2 0,4 0,3 0,7

Hitunglah rata-rata dari hasil simulasi tersebut.

A. -0,7634

B. -0,6160

C. -0,2000

D. 0,6160

E. 0,7634

Pembahasan: Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak dengan pdf sebagaimana tersebut di atas adalah

$$F(x) = \int_{-1}^{x} -2t dt = 1 - x^2.$$

Fungsi kuantil, yaitu fungsi invers dari $F(x)$, adalah sebagai berikut

$$F^{-1}(y) = -\sqrt{1-y}.$$

Sehingga diperoleh

$$x_1 = F^{-1}(0,2) = -\sqrt{1-0,2} = -0,8944,$$

Sehingga diperoleh

$$x_2 = F^{-1}(0,4) = -\sqrt{1-0,4} = -0,7746,$$

Sehingga diperoleh

$$x_3 = F^{-1}(0,3) = -\sqrt{1-0,3} = -0,8367,$$

dan

$$x_4 = F^{-1}(0,7) = -\sqrt{1-0,7} = -0,5477.$$

Jadi diperoleh

$$\bar{X} = \frac{-0,8944 - 0,7746 - 0,8367 - 0,5477}{4} = -0,7634.$$

Jawab: A

23. Anda melakukan simulasi terhadap sebuah peubah acak Poisson dengan $\lambda = 4$ menggunalan proses stokastik. Gunakan angka acak seragam berikut ini sesuai urutan.

    0,72 0,23 0,50 0,18 0,89 0,33

    Tentukan banyaknya angka yang dihasilkan (*the number generated*).

    A. 1

    B. 2

    C. 3

    D. 4

    E. 5

    Pembahasan:

$$t_0 = -\ln(1-u_0)/\lambda = -\ln(1-0,72)/4 = 0,3182,$$

$$s_1 = -\ln(1-0,23)/4 = 0,0653 \Rightarrow t_1 = 0,3182 + 0,0653 = 0,3836,$$

$$s_2 = -\ln(1-0,5)/4 = 0,1733 \Rightarrow t_2 = 0,5569,$$

$$s_3 = -\ln(1-0,18)/4 = 0,0496 \Rightarrow t_3 = 0,6065,$$

$$s_4 = -\ln(1-0,89)/4 = 0,5518 \Rightarrow t_4 = 1,1583.$$

Jawab: D

24. Fungsi *hazard rate* dari *survival time* adalah

$$h(x) = 0,001(1,05^x)$$

Survival time disimulasikan dengan menggunakan metode inversi.

Gunakan bilangan acak uniform berikut untuk simulasi ini:
0,128 0,482 0,800

Hitunglah rata-rata survival time berdasalkan simulasi ini

A. 62
B. 64
C. 66
D. 68
E. 70

Pembahasan: Fungsi hazard kumulatif dari waktu survival tersebut adalah

$$H(x) = \int_0^x 0,001(1,05^t)dt = \frac{0,001}{\ln 1,05}(1,05^x - 1).$$

Jadi, fungsi distribusi dan fungsi kuantilnya adalah

$$F(x) = 1 - \exp(-H(x)) = 1 - \exp\Big(-\frac{0,001}{\ln 1,05}(1,05^x - 1)\Big),$$

$$F^{-1}(y) = \frac{\ln(1 - 1000 \ln 1,05 \ln(1-y))}{\ln 1,05}.$$

Dengan menggunakan metode inversi waktu survival dari masing-masing angka random hasil simulasi adalah

$$y_1 = 0,128 \Rightarrow x_1 = F^{-1}(0,128) = \frac{\ln(1 - 1000 \ln 1,05 \ln(1-0,128))}{\ln 1,05} = 41,7903,$$

$$y_2 = 0,482 \Rightarrow x_2 = 71,7220,$$

dan

$$y_3 = 0,8 \Rightarrow x_3 = 89,6916.$$

Nilai rata-rata dari ketiga waktu tersebut adalah

$$\bar{x} = 67,7346.$$

Jawab: D

25. Diberikan data sebagai berikut untuk sebuah asuransi kesehatan kumpulan.
    i. X_i adalah banyaknya klaim yang disubmit oleh sebuah grup pada tahun i.
    ii. $Var(X_i) = 28$
    iii. $Cov(X_i, X_j) = 12$

    Hitunglah kredibilitas Buhlmann yang diberikan pada pengalaman 2 tahunan untuk grup ini.

    A. 0,43
    B. 0,50
    C. 0,60
    D. 0,70
    E. 0,86

    Pembahasan: *Unbiased equation* untuk permasalahan tersebut adalah

    $$\alpha_0 + \mu(\alpha_1 + \alpha_2) = \mu,$$

    atau dengan kata lain

    $$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu}.$$

    Karena untuk $i = 1, 2$, $Cov(X_i, X_3) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j Cov(X_i, X_j)$ maka diperoleh

    $$12 = \alpha_1 \times 28 + \alpha_2 \times 12,$$

    dan

    $$12 = \alpha_1 \times 12 + \alpha_2 \times 28.$$

atau dengan kata lain untuk setiap i,

$$\begin{aligned}
12 &= \sum_{j\neq i} 28\alpha_j + 12\alpha_i = 28\sum \alpha_j - 16\alpha_i \\
&= 28\left(1 - \frac{\alpha_0}{\mu}\right) - 16\alpha_i \\
\alpha_i &= 1 - \frac{7}{4}\frac{\alpha_0}{\mu} \\
\sum \alpha_i &= 2 - \frac{7}{2}\frac{\alpha_0}{\mu} \\
1 - \frac{\alpha_0}{\mu} &= 2 - \frac{7}{2}\frac{\alpha_0}{\mu} \\
\alpha_0 &= \frac{2}{5}\mu.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\alpha_i = 1 - \frac{7}{4}\frac{2/5\mu}{\mu} = \frac{3}{10}.$$

Sehingga dalam hal ini

$$\alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X = \frac{2}{5}\mu + \frac{3}{5}\frac{\sum X_i}{2} = \frac{2}{5}\mu + \frac{3}{5}\bar{x}.$$

Jadi kredibilitas Bühlmann pada pengalaman 2 tahunan tersebut adalah $3/5$.

Jawab: C

26. Banyaknya klaim dari seorang pengemudi selama setahun diassumsikan berdistribusi Poisson dengan rata-rata yang tidak diketahui dan bervariasi antar pengemudi. Data dari 100 pengemudi adalah sebagai berikut:

Banyaknya klaim selama setahun	Banyaknya pengemudi
0	54
1	33
2	10
3	2
4	1

Hitunglah kedibilitas dari satu tahun pengamatan untuk seorang pengemudi dengan menggunakan metode estimasi empiris bayes semiparametrik.

A. 0,046

B. 0,055

C. 0,061

D. 0,068

E. 0,073

Pembahasan: Dari data diperoleh

$$\bar{x} = \frac{33 + 2 \times 10 + 3 \times 2 + 4 \times 1}{100} = 0,63,$$

$$\frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{100} = 0,6731.$$

$$a = 0,6731 - 0,63 = 0,0431.$$

$$k = \frac{0,63}{0,0431} = 14,6172,$$

sehingga faktor kredibilitas dari permasalahan ini adalah

$$Z = \frac{1}{1 + \hat{k}} = \frac{1}{1 + 14,6172} = 0,064$$

Jawab: -

27. Diberikan informasi sebagai berikut:

    i. $X_{partial}$ = premi murni yang dihitung dari partially credible data.

    ii. $\mu = \mathbb{E}[X_{partial}]$

    iii. Fluktuasi dibatasi sampai $\pm k\mu$ dari rata-rata dengan probabilitas P.

    iv. Z = Faktor kredibilitas

    Manakah dari berikut ini yang sama dengan P?

    A. $\Pr(\mu - k\mu \leq X_{partial} \leq \mu + k\mu)$

    B. $\Pr(Z\mu - k\mu \leq ZX_{partial} \leq Z\mu + k)$

    C. $\Pr(Z\mu - \mu \leq ZX_{partial} \leq Z\mu + \mu)$

    D. $\Pr(1 - k \leq ZX_{partial} + (1 - Z)\mu \leq 1 + k)$

    E. $\Pr(\mu - k\mu \leq ZX_{partial} + (1 - Z)\mu \leq \mu + k\mu)$

    Pembahasan: Diberikan premi kredibilitas sebagai berikut

$$P_c = ZX_{partial} + (1 - Z)\mathbb{E}(X_i).$$

Karena diketahui $\mathbb{E}(X_{partial}) = \mu$, maka $\mathbb{E}(X_{partial}) = \mathbb{E}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \mathbb{E}(X_i) = \mu$. Jadi $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, sehingga

$$P_c = ZX_{partial} + (1-Z)\mu.$$

Mean dari P_c adalah

$$\mathbb{E}(P_c) = \mathbb{E}(ZX_{partial} + (1-Z)\mu) = \mu.$$

Menggunakan informasi (iii) diketahui

$$\mathbb{P}(|P_c - \mathbb{E}(P_c)| \leq k\mu) = P$$

yang ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|ZX_{partial} + (1-Z)\mu - \mu| \leq k\mu) = P\\ \mathbb{P}(\mu - k\mu \leq ZX_{partial} + (1-Z)\mu \leq \mu + k\mu) = P\end{aligned}$$

Jawab: E

28. Distribusi dari sebuah kecelakaan untuk 84 polis yang dipilih secara acak adalah sebagai berikut:

Jumlah Kecelakaan	Jumlah polis
0	32
1	26
2	12
3	7
4	4
5	2
6	1
Total	84

Model manakah yang paling baik merepresentasikan data ini?

A. Binomial negatif

B. Discrete Uniform

C. Poisson

D. Binomial

E. Binomial atau Poisson

Pembahasan: Akan diselidiki menggunakan sifat-sifat dari distribusi di $(a, b, 0)$, yaitu dihitung estimasi dari p_k/p_{k-1} dan dilihat patter untuk k vs $kp_k/p_{k-1} = a + bk$, jenis distribusi dapat diidentikasi dari estimasi nilai a dan b dan sifat-sifat distribusi di $(a, b, 0)$.

Untuk kepentingan analisa tersebut dihitung nilai-nilai berikut ini:

k	Jumlah polis	$\hat{p}_k/\hat{p}_{k-1}$	$k\hat{p}_k/\hat{p}_{k-1}$
0	32		
1	26	$\frac{26}{32} = 0,8125$	0,8125
2	12	0,4615	0,9230
3	7	0,5833	1,7499
4	4	0,5714	2,2856
5	2	0,5	2,8570
6	1	0,5	3

Dari hasil tersebut diperoleh $\hat{a} > 0$ dan slope $\hat{b} > 0$ juga, sehingga distribusi yang mungkin adalah Binomial negatif.

Jawab: A

29. Dari sebuah studi laboratorium yang terdiri dari 9 (sembilan) individu diberikan data sebagai berikut:

i. Waktu kematian : 1, 2, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 9

ii. Dihipotesiskan bahwa distribusi yang mendasarinya (*underlying distribution*) adalah *uniform* dengan $\omega = 11$.

Hitunglah statistik Kolmogorov-Smirnov untuk hipotesis ini.

A. 12/99

B. 14/99

C. 18/99

D. 24/99

E. 25/99

Pembahasan: Statistik uji untuk Kolmogorov-Smirnov adalah

$$D = \max_{x_1 \le x \le x_n} |F_n(x) - F^*(x)|.$$

x	$F_n(x)$	$F_n(x-)$	$F^*(x)$	$\max \lvert F_n(x) - F^*(x)$
1	$\frac{1}{9} = \frac{11}{99}$	0	$\frac{1}{11} = \frac{9}{99}$	$\frac{1}{11}$
2	$\frac{2}{9} = \frac{22}{99}$	$\frac{1}{9} = \frac{11}{99}$	$\frac{2}{11} = \frac{18}{99}$	$\frac{18-11}{99} = \frac{7}{99}$
4	$\frac{3}{9} = \frac{33}{99}$	$\frac{2}{9} = \frac{22}{99}$	$\frac{4}{11} = \frac{36}{99}$	$\frac{36-22}{99} = \frac{14}{99}$
5	$\frac{5}{9} = \frac{55}{99}$	$\frac{4}{9} = \frac{33}{99}$	$\frac{5}{11} = \frac{45}{99}$	$\frac{12}{99}$
7	$\frac{6}{9} = \frac{66}{99}$	$\frac{5}{9} = \frac{55}{99}$	$\frac{7}{11} = \frac{63}{99}$	$\frac{8}{99}$
8	$\frac{7}{9} = \frac{77}{99}$	$\frac{6}{9} = \frac{66}{99}$	$\frac{7}{11} = \frac{63}{99}$	$\frac{6}{99}$
9	$1 = \frac{99}{99}$	$\frac{7}{9} = \frac{77}{99}$	$\frac{9}{11} = \frac{81}{99}$	$\frac{18}{99}$
max				$\frac{18}{99}$

Statistik kolmogorov smirnov untuk hipotesis ini adalah nilai terbesar dari max diff yaitu 18/99.

Jawab: C

30. Untuk sebuah sampel berukuran 2(dua) disesuaikan dengan distribusi berikut:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{\alpha}$$

Diberikan data berikut:

i. Taksiran α dengan menggunakan metode moment adalah 16/15

ii. Taksiran α dengan menggunakan maksimum likelihood adalah 0,3675

Angka manakah dari berikut ini yang merupakan salah satu dari sampel tersebut?

A. 9

B. 10

C. 12

D. 14

E. 15

Pembahasan: X berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = 1$ dan α, mean dari X (berdasar tabel) adalah $\frac{1}{\alpha-1}$. Dengan menggunakan moment matching diperoleh estimasi dari α sebagai berikut

$$\bar{x} = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\alpha - 1} = 15. \tag{3.6}$$

Berikutnya akan dicari estimator melalui MLE. Fungsi likelihood dan log-likelihood dari **X** adalah

$$L = \prod_{i=1}^{2} \alpha (1 + X_i)^{-\alpha-1} = \alpha^2 \prod (1 + X_i)^{-\alpha-1}$$
$$\ell = n \ln \alpha - (\alpha + 1) \sum \ln(1 + X_i)$$

Syarat perlu untuk estimator α

$$\frac{d\ell}{d\alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum \ln(1 + X_i)\Big|_{\alpha=\hat{\alpha}} = 0$$

atau dengan kata lain diperoleh

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\ln(1 + X_1) + \ln(1 + X_2)}.$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (3.6) ke dalam persamaan ini maka diperoleh persamaan kuadrat

$$X_1^2 - 30X_1 + 200 = 0$$
$$(X_1 - 20)(X_1 - 10) = 0$$

$X_1 = 20$ atau $X_1 = 10$.

Jawab: B

4 Periode November 2016

1. Dalam sebuah asuransi kendaraan bermotor diketahui bahwa banyaknya klaim tahunan berdistribusi binomial negatif dengan rata-rata (*mean*) 0,2 dan variansi 0,3. Besarnya klaim berdistribusi Pareto dengan dua parameter $\alpha = 3$ dan $\theta = 10$.
   Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*).
   Hitunglah variansi dari total biaya klaim tahunan (annual aggregate claim cost)

   A. 22,5

   B. 25,0

   C. 27,5

   D. 32,5

   E. 35,0

   Pembahasan:
   Misalkan S menyatakan total biaya klaim tahunan, maka nilai dari variansi S adalah

   $$Var(S) = E[N^L]Var[Y^L] + Var[N^L](E[Y^L])^2$$

   dimana N^L berdistribusi negatif binomial dengan rataan 0,2 dan variansi 0,3, sedangkan Y^L berdistribusi Pareto dengan parameter $\alpha = 3$ dan $\theta = 10$. Dengan demikian, kita peroleh

   $$\begin{aligned} E[Y^L] &= \frac{\theta}{\alpha - 1} = \frac{10}{2} = 5 \\ E[(Y^L)^2] &= \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{200}{2} = 100 \\ Var[Y^L] &= 100 - 5^2 = 75 \end{aligned}$$

   Jadi, variansi dari S adalah $Var(S) = (0,2)(75) + (0,3)(5^2) = 22,5$

   Jawab : A

2. Diberikan pengalaman dari dua grup pemegang polis sebagai berikut:

Grup		Tahun pertama	Tahun ke-2	Tahun ke-3	Total
A	Jumlah Anggota	15	20	25	60
	Total Kerugian	150	100	170	420
B	Jumlah Anggota		5	15	20
	Total Kerugian		50	200	250

Dengan menggunakan *non-parametric empirical Bayes credibility method*, hitunglah kredibilitas untuk pengalaman dari grup A.

A. 0,86

B. 0,88

C. 0,90

D. 0,92

E. 0,94

Pembahasan:
Misalkan m_{ij} menunjukkan jumlah dari *exposure* untuk tertanggung ke-i pada tahun ke-j, dan X_{ij} menunjukkan rata-rata klaim tiap unit dari tertanggung ke-i pada tahun ke-j

Berdasarkan data yang kita miliki dari tabel, maka kita peroleh

$$m_{A1} = 15, m_{A2} = 20, \text{ dan } m_{A3} = 25$$
$$m_{B1} = 5 \text{ dan } m_{B2} = 15$$

$$X_{A1} = 10, X_{A2} = 5 \text{ dan } X_{A3} = 6,8$$

$$X_{B1} = 10 \text{ dan } X_{B2} = \frac{40}{3}$$

$m_A = 60; \bar{X}_A = 7; m_B = 20; \bar{X}_B = 12,5$
$\hat{\mu} = \bar{X} = \dfrac{670}{80} = 8,375$

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \frac{15(10-7)^2 + 20(5-7)^2 + 25(6,8-7)^2 + 5(10-12,5)^2 + 15\left(\frac{40}{3} - 12,5\right)^2}{3} \\
&= 85,889 \\
\hat{a} &= \frac{60(7-8,375)^2 + 20(12,5-8,375)^2 - 85,889}{80 - \frac{1}{80}(60^2+20^2)} = 12,262 \\
k &= \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{85,889}{12,262} = 7,0045 \\
\hat{Z}_A &= \frac{60}{60+7,0045} = 0,8955 \approx 0,90
\end{aligned}$$

Jadi, kredibilitas untuk pengalaman dari grup A adalah 0,90

Jawab : C

3. Kerugian dari sebuah pertanggungan asuransi berdistribusi dengan fungsi kepadatan *(density function)* sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{3}{100^3}(100-x)^2 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 100$$

Kerugian memiliki *ordinary deductible* sebesar 15.
Hitunglah *Loss Elimination Ratio* (gunakan pembulatan terdekat!)

A. 0,46

B. 0,48

C. 0,50

D. 0,52

E. 0,54

Pembahasan:

$$S(x) = \int_x^{100} f(t)dt = \int_x^{100} \frac{3}{(100)^3}(100-t)^2 dt = \frac{1}{(100)^3}(100-x)^3$$

$$E[X \wedge d] = \int_0^d S(x)dx = \int_0^d \frac{1}{(100)^3}(100-x)^3 dx = \frac{1}{(4)(100)^3}(100^4 - (100-d)^4)$$

$$E[X \wedge 15] = \frac{1}{(4)(100)^3}(100^4 - 85^4) = 11,95$$

$$E[X] = E[X \wedge 100] = \frac{1}{(4)(100)^3}(100^4) = 25$$

Jadi, nilai dari *Loss Elimination Ratio* adalah

$$Loss \ \ Elimination \ \ Ratio = \frac{E[X \wedge 15]}{E[X]} = \frac{11,95}{25} = 0,478 \approx 0,48$$

Jawab : B

4. Sebuah asuransi memberikan pertanggungan terhadap dua jenis pertanggungan yaitu A dan B. Jumlah tertanggung pada setiap jenis pertanggungan adalah sama. Besarnya klaim pada setiap jenis pertanggungan memiliki distribusi Pareto. Banyaknya klaim dan besarnya klaim untuk tertanggung pada setiap jenis pertanggungan mempunyai distribusi sebagai berikut:

Jumlah Klaim	Besarnya Klaim (Parameter Pareto)

	A	B
0	0,9	0,8
1	0,1	0,2

	A	B
α	3	3
θ	50	60

Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*) pada setiap jenis pertanggungan. Hitunglah kredibiltas Buhlmann untuk pengalaman selama 2 tahun. (Gunakan pembulatan terdekat!).

A. 0,01

B. 0,02

C. 0,03

D. 0,04

E. 0,05

Pembahasan:
Misalkan μ_A dan v_A masing-masing adalah *hypothetical mean* dan *process variance* untuk A, sedangkan μ_B dan v_B masing-masing adalah *hypothetical mean* dan *process variance* untuk B. Untuk menghitung *process variance* kita akan menggunakan rumus *compound variance*. Pada tertanggung A (dengan N dan X masing-masing adalah banyak klaim dan besar klaim), kita peroleh
$E[N] = 0,1; Var[N] = (0,1)(0,9) = 0,09$
$E[X] = \dfrac{\theta}{(\alpha-1)} = \dfrac{50}{2} = 25; E[X^2] = \dfrac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \dfrac{2(50^2)}{(2)(1)} = 2500$

Jadi, $Var[X] = 2500 - 625 = 1875$. Dengan cara yang sama, untuk tertanggung B kita peroleh
$E[N] = 0,2; Var[N] = (0,2)(0,8) = 0,16$
$E[X] = \dfrac{\theta}{(\alpha-1)} = \dfrac{60}{2} = 30; E[X^2] = \dfrac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \dfrac{2(60^2)}{(2)(1)} = 3600$
Jadi, $Var[X] = 3600 - 900 = 2700$. Dengan menggunakan rumus *compound variance* kita dapatkan

$$\mu_A = 0,1(25) = 2,5 \text{ dan } \mu_B = 0,2(30) = 6$$
$$a = (6-2,5)^2(0,25) = 3,0625$$
$$v_A = 0,1(2500-625) + 0,09(25^2) = 243,75$$
$$v_B = 0,2(3600-900) + 0,16(30^2) = 684$$
$$v = \frac{1}{2}(243,75+684) = 463,875$$

Kredibilitas Buhlmann untuk pengalaman selama 2 tahun adalah

$$Z = \frac{na}{na+v} = \frac{(2)(3,0625)}{(2)(3,0625)+463,875} = 0,013032 \approx 0,01$$

Jawab : A

5. Diberikan 5(lima) sampel klaim sebagai berikut:

$$2, 3, 4, x_1, x_2 \quad ; dengan \qquad x_2 > x_1$$

Sampel ini disesuaikan (*fitted*) dengan distribusi Pareto dengan menggunakan metode moment. Hasil estimasi parameternya adalah $\hat{\alpha} = 47,71$ dan $\hat{\theta} = 373,71$
Hitunglah x_1

A. 6,0

B. 6,6

C. 7,0

D. 7,6

E. 8,0

Pembahasan:

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{\theta}{\alpha-1} = \frac{373,71}{46,71} = \frac{1}{5}(2+3+4+x_1+x_2) = \frac{1}{5}(9+x_1+x_2) \rightarrow x_1+x_2 = 31 \\ E[(X)^2] &= \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{2(373,71^2)}{(46,71)(45,71)} = \frac{1}{5}(2^2+3^2+4^2+x_1^2+x_2^2) \end{aligned}$$

Dari persamaan 2 kita dapat sederhanakan menjadi $x_1^2 + x_2^2 = 625$. Selesaikan kedua persamaan tersebut, sehingga kita bisa dapatkan nilai $x_1 = 7$ dan $x_2 = 24$ Jadi, $x_1 = 7$
Jawab : C

6. Total kerugian pada tahun $k, k = 1, 2, 3, ..., n$ memiliki distribusi dengan fungsi kepadatan (*density function*) sebagai berikut:

$$f(x;k) = \frac{k^k x^{k-1} e^{-kx/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k} \quad , \quad x > 0$$

Misalkan X_k adalah total kerugian yang diamati pada tahun k. Ada mengamati $X_1 = 7.000$, $X_2 = 7.500$, $X_3 = 8.000$, $X_4 = 8.500$, $X_5 = 9.000$
Tentukan estimasi *maximum likelihood* untuk θ.

A. 7.667

B. 7.833

C. 8.000

D. 8.167

E. 8.333

Pembahasan:
Pertama, kita akan menghitung nilai dari $f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)$ dan $f(x_5)$

$f(x_1) = \dfrac{e^{(-\frac{7000}{\theta})}}{\theta}$

$f(x_2) = 30.000\dfrac{e^{(-\frac{15000}{\theta})}}{\theta^2}$

$f(x_3) = 864 \times 10^6 \dfrac{e^{(-\frac{24000}{\theta})}}{\theta^3}$

$f(x_4) = 1,6376 \times 10^{12} \dfrac{e^{(-\frac{34000}{\theta})}}{\theta^4}$

$f(x_5) = 6,834375 \times 10^{15} \dfrac{e^{(-\frac{45000}{\theta})}}{\theta^5}$

$$l = \ln L \approx -\frac{7000}{\theta} - \ln(\theta) - \frac{15000}{\theta} - \ln(\theta^2) - \frac{24000}{\theta} - \ln(\theta^3) - \frac{34000}{\theta} - \ln(\theta^4) - \frac{45000}{\theta} - \ln(\theta^5)$$

$$l' = \frac{7000}{\theta^2} - \frac{1}{\theta} + \frac{15000}{\theta^2} - \frac{2\theta}{\theta^2} + \frac{24000}{\theta^2} - \frac{3\theta^2}{\theta^3} + \frac{34000}{\theta^2} - \frac{4\theta^3}{\theta^4} + \frac{45000}{\theta^2} - \frac{5\theta^4}{\theta^5} = 0$$

Sederhanakan persamaan di atas, maka kita akan memperoleh

$$\frac{125000}{\theta^2} - \frac{15}{\theta} = 0 \rightarrow \theta = \frac{125000}{15} = 8.333,33 \approx 8.333$$

Jadi estimasi *maximum likelihood* untuk θ adalah 8.333
Jawab : E

7. Banyaknya kejadian klaim diassumsikan berdistribusi Poisson dengan rata-rata (*mean*) adalah λ. Dengan menggunakan metode *limited fluctuation credibility*, banyaknya eksposur yang dibutuhkan untuk *full credibility* dari banyaknya klaim adalah n.
Assumsi distribusi dari banyaknya klaim diubah menjadi distribusi binomial negatif dengan parameter r dan β. Standard untuk *full credibility* tidak diubah.
Berapakah banyak eksposur yang dibutuhkan untuk *full credibility* dari banyaknya klaim dengan adanya perubahan assumsi tersebut?

A. $n\lambda(1+\beta)$ B. $\dfrac{n(1+\beta)}{\beta}$ C. $\dfrac{n(1+\beta)}{r\beta}$ D. $\dfrac{n\lambda(1+\beta)}{\beta}$ E. $\dfrac{n\lambda(1+\beta)}{r\beta}$

Pembahasan:
Gunakan rumus standard untuk *full credibility*

$$e_F = n_0 \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2$$

Untuk distribusi Poisson, $\sigma^2 = \mu = \lambda$, sehingga $n = e_F = \frac{n_0}{\lambda} \to n_0 = n\lambda$. Sedangkan untuk distribusi negatif binomial, $\sigma^2 = r\beta(1+\beta)$ dan $\mu = r\beta$, sehingga $e_F = n_0 \frac{(1+\beta)}{r\beta}$. Selanjutnya, substitusikan $n_0 = n\lambda$ pada persamaan terkahir dari e_F, sehingga kita peroleh

$$e_F = n\lambda \frac{(1+\beta)}{r\beta}$$

Jadi, banyak eksposur yang dibutuhkan untuk *full credibility* dari banyaknya klaim dengan adanya perubahan asumsi tersebut adalah $n\lambda \frac{(1+\beta)}{r\beta}$
Jawab : E

8. Diberikan data sebagai berikut:
   - Banyaknya klaim berdistribusi binomial dengan $m = 3$, $q = 0,2$
   - Besarnya klaim memiliki distribusi sebagai berikut:

Jumlah klaim	**Probabilitas terjadinya klaim**
0	0,2
1	0,5
2	0,2
3	0,1

   - S adalah peubah acak total kerugian

   Hitunglah $E[S \wedge 2,4]$.

   A. 0,625

   B. 0,637

   C. 0,650

   D. 0,664

   E. 0,683

Pembahasan:
Pertama, kita akan menghitung peluang aggregate untuk jumlah klaim 0, 1, dan 2 yaitu g_0,g_1, dan g_2 dengan menggunakan rumus rekursif. Untuk distribusi binomial, $a = \frac{-q}{1-q} = -0,25$

dan $b = \frac{(m+1)q}{1-q} = 1$.

$g_0 = P(f_0) = P(0,2) = (1 + q(-0,8))^m = 0,84^3 = 0,592704$
$g_1 = \dfrac{1}{1 + 0,25(0,2)}(-0,25 + 1)(0,5)(0,592704) = 0,21168$
$g_2 = \dfrac{1}{1,05}((-0,25 + 0,5)(0,5)(0,21168) + (-0,25 + 1)(0,2)(0,592704)) = 0,109872$
Selanjutnya, kita akan menghitung *survival function*

$S(0) = 1 - 0,592704 = 0,407296$
$S(1) = 0,407296 - 0,21168 = 0,195616$
$S(2) = 0,195616 - 0,109872 = 0,085744$

$$E[S \wedge 2,4] = 0,407296 + 0,195616 + 0,4(0,085744) = 0,6372096 \approx 0,637$$

Jawab : B

9. Diberikan data sebagai berikut untuk sebuah pertangungan asuransi:
   i. Banyaknya klaim berdistribusi geometric dengan rata-rata (*mean*) 2.
   ii. Besarnya klaim berdistribusi eksponensial dengan rata-rata (*mean*) 1.500.
   iii. Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*)

   Tentukan median dari total kerugian (*median aggregate loss*).

   A. 432
   B. 1.040
   C. 1.295
   D. 1.825
   E. 3.119

   Pembahasan:
   Distribusi dari total kerugian bernilai 0 dengan probabilitas $\dfrac{1}{1+\beta} = \dfrac{1}{3}$, dan total kerugian juga berdistribusi eksponensial dengan rataan $\theta(1+\beta) = 1500(1+2) = 4500$ dengan probabilitas $\dfrac{2}{3}$. Jadi, median dari total kerugian adalah x sedemikian hingga $Pr(S > x) = 0,5$, atau $Pr(S > x) = Pr(S > x|S > 0)Pr(S > 0) = 0,5$. Dari penjelasan sebelumnya kita ketahui bahwa $Pr(S > 0) = \dfrac{2}{3}$, maka $Pr(S > x|S > 0) = \dfrac{3}{4}$.

   $$Pr(S > x|S > 0) = e^{-\frac{x}{4500}} = \frac{3}{4} \rightarrow x = -4500\ln(0,75) = 1.294,57 \approx 1.295$$

   Jadi, median dari total kerugian adalah 1.295
   Jawab : C

10. Untuk sebuah pertanggungan asuransi, banyaknya klaim berdistribusi Poisson untuk setiap pemegang polis. Diberikan pengalaman dari dua perusahaan sebagai berikut:

Perusahaan A	Jumlah Karyawan	5	6	7
	Banyaknya Klaim	1	2	0
Perusahaan B	Jumlah Karyawan	-	4	6
	Banyaknya Klaim	-	7	4

Hitunglah *empirical Bayes semiparametric estimate* dari kredibilitas untuk perusahaan A.

A. kurang dari 0,90

B. paling sedikit 0,90, akan tetapi kurang dari 0,92

C. paling sedikit 0,92, akan tetapi kurang dari 0,94

D. paling sedikit 0,94, akan tetapi kurang dari 0,96

E. lebih dari 0,96

Pembahasan:

$\bar{X}_1 = \dfrac{1}{6}$ dan $\bar{X}_2 = 1,1$

$\hat{\mu} = \hat{v} = \bar{X} = \dfrac{1+2+0+7+4}{5+6+7+4+6} = 0,5$

$\hat{a} = \dfrac{18(\frac{1}{6} - 0,5)^2 + 10(1,1-0,5)^2 - 0,5}{28 - \frac{1}{28}(18^2 + 10^2)} = 0,396667$

$k = \dfrac{\hat{v}}{\hat{a}} = \dfrac{0,5}{0,396667} = 1,260503$

$\hat{Z}_A = \dfrac{18}{18 + 1,260503} = 0,9346$

Jadi, *empirical Bayes semiparametric estimate* dari kredibilitas untuk perusahaan A adalah 0,9346

Jawab : C

11. Diberikan kumpulan data observasi sebagai berikut:

5 7 10 11 11 12 14 19 25 40

Metode kepadatan kernel (*kernel density method*) digunakan untuk *smooth the empirical distribution*. Sebuah kernel seragam (*uniform kernel*) dengan *bandwidth* 4 digunakan. Tentukan median dari distribusi yang dihasilkan.

A. 11,6

B. 11,8

C. 12,0

D. 12,2

E. 12,4

Pembahasan:
Median dari distribusi tersebut adalah m sedemikian hingga $\hat{F}(m) = 0,5$. *Probability density function* (pdf) dari sebuah kernel yang berdistribusi seragam merupakan fungsi sepotong-sepotong yang konstan, sehingga fungsi distribusinya pun merupakan fungsi linier yang sepotong-sepotong. Seperti kita ketahui bahwa seluruh data observasi dan badwith yang kita gunakan adalah bilangan bulat, maka distribusinya akan linier antara bilangan bulat. Untuk mendapatkan median dari distribusi yang dihasilkan, kita akan mencari nilai k sedemikian hingga $F(k) < 0,5$ dan $F(k+1) > 0,5$. Selanjutnya kita akan melakukan interpolasi linier untuk memperoleh hasil yang diinginkan.
Untuk memperoleh median dari distribusi tersebut, maka kita akan memulai perhitungan dari bagian tengah data observasi yang telah diurutkan, yaitu pada data observasi yang bernilai 11. Kernel seragam merupakan fungsi linier yang turun dengan rate $\frac{1}{8}$. Jadi pada data observasi 7, nilainya adalah 1, pada data observasi 10 nilainya adalah $\frac{5}{8}$, pada data observasi 11 nilainya adalah $\frac{4}{8}$, dan seterusnya.

Pada data observasi 11, kita peroleh

$$\hat{F}(11) = 0,1(1+1+0,625+0,5+0,5+0,375+0,125) = 0,4125$$

Pada data observasi 12, kita peroleh

$$\hat{F}(12) = 0,1(1+1+0,75+0,625+0,625+0,5+0,25) = 0,475$$

Pada data observasi 13, kita peroleh

$$\hat{F}(13) = 0,1(1+1+0,875+0,75+0,75+0,625+0,375) = 0,5375$$

Dari hasil di atas kita bisa ketahui bahwa nilai $\hat{F}(m) = 0,5$ berada di antara $\hat{F}(12)$ dan $\hat{F}(13)$, sehingga median dari distribusi yang dihasilkan adalah

$$m = 12 + \frac{0,5 - 0,475}{0,5375 - 0,475} = 12,4$$

Jawab : E

12. Kerugian diasumsikan memiliki sebuah distribusi dengan fungsi distribusi kumulatif :

$$F(x) = 1 - 0.5e^{-x/\theta} - 0,5e^{-x/2\theta}$$

Sebuah sampel observasi memiliki median sebesar 12.
Hitunglah θ dengan menggunakan metode pencocokan median (*matching median*).

A. 6,7

B. 8,0

C. 9,2

D. 10,8

E. 12,5

Pembahasan:
Dengan menggunakan metode pencocokan median kita dapatkan

$$0,5 = 1 - 0,5e^{\frac{-12}{\theta}} - 0,5e^{\frac{-12}{2\theta}}$$

$$1 = e^{\frac{-12}{\theta}} + e^{\frac{-12}{2\theta}}$$

$$e^{\frac{-12}{\theta}} + e^{\frac{-12}{2\theta}} - 1 = 0$$

Misalkan $x = e^{\frac{-12}{2\theta}}$, maka kita bisa tuliskan persamaan di atas menjadi $x^2 + x - 1 = 0$. Akar-positif dari persamaan kuadrat tersebut adalah 0,618, sehingga kita peroleh

$$x = e^{\frac{-12}{2\theta}} = 0,618 \to \theta = \frac{-6}{\ln(0,618)} = 12,467 \approx 12,5$$

Jadi, nilai θ yang kita dapatkan dengan menggunakan metode pencocokan median adalah 12,5.
Jawab : E

13. Sebuah pertanggungan asuransi memiliki deductible sebesar 5. Besarnya kerugian (termasuk *deductible*) yang diamati adalah sebagai berikut:

10 12 15 15 18 32

Data disesuaikan (*fitted*) dengan sebuah *inverse exponential* dengan parameter $\theta = 10$.
Hitunglah nilai dari statistik Kolmogorov-Smirnov untuk pencocokan ini (*for the fit*).

A. 0,268

B. 0,269

C. 0,310

D. 0,326

E. 0,368

Pembahasan:
Dengan mempertimbangkan *dedcutible*, kita peroleh

$$F^*(x) = \frac{F(x) - F(5)}{1 - F(5)} = \frac{e^{\frac{-10}{x}} - e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

Selanjutnya, kita akan menghitung nilai $F^*(x)$ dan nilai dari statistik Kolmogorov-Smirnov untuk kelima nilai kerugian yang diamati.

x	$F^*(x)$	$F_n(x^-)$	$F_n(x)$	Beda Maksimum
10	0,2689	0	0,1667	0,2689
12	0,3461	0,1667	0,3333	0,1794
15	0,4373	0,3333	0,6667	0,2294
18	0,5070	0,6667	0,8333	0,3263
32	0,6896	0,8333	1	0,3104

Nilai beda maksimum yang terbesar adalah $0,3263 \approx 0,326$. Jadi nilai statistik Kolmogorov-Smirnov untuk pencocokan ini adalah 0,326.
Jawab : D

14. Banyaknya klaim memiliki distribusi sebagai berikut:

$$p_k = p_{k-1}\left(0,6 + \frac{0,3}{k}\right) \quad k \geq 1$$

- Besarnya klaim berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = 1.000$ dan $\alpha = 3$
- Banyaknya klaim dan besarnya klaim saling bebas (*independent*)

Hitunglah variansi dari total kerugian (*aggregate losses*).

A. kurang dari 3.500.000

B. paling sedikit 3.500.000, akan tetapi kurang dari 4.000.000

C. paling sedikit 4.000.000, akan tetapi kurang dari 4.500.000

D. paling sedikit 4.500.000, akan tetapi kurang dari 5.000.000

E. lebih dari 5.000.000

Pembahasan:
Distribusi dari banyaknya klaim (N) termasuk ke dalam kelas distribusi $(a, b, 0)$ dengan $a =$ 0,6 dan $b = 0,3$. Jadi banyaknya klaim berdistribusi binomial, di mana

$$a = \frac{\beta}{1+\beta} = 0,6 \rightarrow \beta = 1,5$$

dan

$$b = (r-1)a = 0,3 \rightarrow r = 1,5$$

Dengan demikian kita peroleh

$$E[N] = r\beta = (1,5)(1,5) = 2,25$$
$$Var[N] = r\beta(1+\beta) = (2,25)(2,5) = 5,625$$

Untuk besarnya klaim (X) yang berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = 1000$ dan $\alpha = 3$, kita peroleh

$$E[X] = \frac{\theta}{\alpha - 1} = \frac{1000}{2} = 500$$

$$Var[X] = \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{\theta}{(\alpha-1)}\right)^2 = \frac{2(1000)^2}{(2)(1)} - 500^2 = 750.000$$

Misalkan S menyatakan total kerugian, maka nilai dari $Var(S)$ adalah (gunakan rumus *compund variance*)

$$Var(S) = E[N]Var[X] + Var[N](E[X])^2 = 2,25(750,000) + 5,625(500^2) = 3.093.750$$

Jadi, variansi dari total kerugian adalah 3.093.750.

Jawab : A

15. Diberikan informasi sebagai berikut:

    i. Kerugian berdistribusi eksponensial dengan rata-rata yang konstan (bernilai sama) pada setiap tahunnya.

    ii. *The Loss Elimination Ratio (LER)* untuk tahun ini adalah 70%.

    iii. *The ordinary deductible* untuk tahun depan sebesar 4/3 dari *deductible* tahun ini.

    Hitunglah *Loss Elimination Ratio (LER)* untuk tahun depan.

    A. 70%

    B. 75%

    C. 80%

D. 85%

E. 90%

Pembahasan:
Untuk kerugian (X) yang berdistribusi eksponensial dengan parameter θ dan *deductible* d, kita dapatkan

$$E[X \wedge d] = \theta \left(1 - e^{\frac{-d}{\theta}}\right) \text{ dan } E[X] = \theta$$

Diberikan bahwa loss elimination ratio untuk tahun ini sebesar 70%, maka

$$\frac{E[X \wedge d]}{E[X]} = \frac{\theta \left(1 - e^{\frac{d}{\theta}}\right)}{\theta} = 0,7 \to \frac{d}{\theta} = -\ln(0,3)$$

Untuk tahun depan, ordinary deductible besarnya adalah $\frac{4}{3}$ dari deductible tahun ini, yaitu $\frac{4}{3}\frac{d}{\theta} = \frac{4}{3}(-\ln(0,3))$. Dengan demikian, loss elimination ratio untuk tahun depan diberikan sebagai berikut

$$\frac{E[X \wedge d]}{E[X]} = \frac{\theta(1 - e^{\frac{4}{3}(-\ln(0,3))})}{\theta} = 1 - 0,3^{\frac{4}{3}} = 0,799 \approx 0,8$$

Jadi, *loss elimination ratio* untuk tahun depan adalah 80%.
Jawab : C

16. Sebuah penelitian terhadap sekelompok pasien yang terdiagnosa mengidap penyakit kritis dilakukan dari waktu $t = 0$ sampai semuanya meninggal pada $t = 5$.

i.

Waktu *t*	**Meninggal pada saat *t***
1	6
2	9
3	5
4	d_4
5	d_5

ii. $\widehat{Var}(S_n(1)) = \widehat{Var}(S_n(3))$, berdasarkan data aktual.

iii. Rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang masih bertahan hidup pada $t = 3$ adalah $\frac{7}{6}$

Hitunglah banyaknya pasien yang meninggal pada saat $t = 4$

A. 1

B. 3

C. 5

D. 10

E. 15

Pembahasan:

Waktu t	r_t	S_t	$r_t - S_t$	$S_n(t)$
1	$20 + d_4 + d_5$	6	$14 + d_4 + d_5$	$\frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
2	$14 + d_4 + d_5$	9	$5 + d_4 + d_5$	$\frac{5 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
3	$5 + d_4 + d_5$	5	$d_4 + d_5$	$\frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}$
4	$d_4 + d_5$	d_4	d_5	$\frac{d_5}{20 + d_4 + d_5}$
5	d_5	d_5	0	0

Diketahui bahwa

$$\widehat{V}ar(S_n(1)) = \frac{S_n(1) - (1 - S_n(1))}{n} = \frac{S_n(3) - (1 - S_n(3))}{n} = \widehat{V}ar(S_n(3))$$

Dengan demikian kita peroleh

$$\begin{aligned}
\frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\left(1 - \frac{14 + d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\right) &= \frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\left(1 - \frac{d_4 + d_5}{20 + d_4 + d_5}\right) \\
\frac{6(14 + d_4 + d_5)}{20 + d_4 + d_5} &= \frac{20(d_4 + d_5)}{20 + d_4 + d_5} \\
6(14 + d_4 + d_5) &= 20(d_4 + d_5) \\
84 &= 14d_4 + 14d_5 \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Pada akhir tahun ketiga terdapat $d_4 + d_5$ pasien yang masih hidup dengan peluang bahwa pasien tersebut akan hidup hingga tahun keempat adalah $\frac{d_5}{d_4+d_5}$. Diantara jumlah tersebut, sebanyak d_4 pasien akan meninggal di tahun keempat, dan d_5 pasien akan meninggal di tahun kelima. Oleh karena itu, rata-rata sisa masa hidup untuk pasien yang bertahan hidup pada $t = 3$ adalah

$$\frac{d_4 \times 1 + d_5 \times 2}{d_4 + d_5} = \frac{d_4 + 2d_5}{d_4 + d_5} = \frac{7}{6} \to d_4 = 5d_5$$

Selanjutnya, substitusikan $d_4 = 5d_5$ ke dalam persamaan (1), sehingga kita peroleh

$$84 = 14(5d_5) + 14d_5 \to d_5 = 1$$

Jadi, banyak pasien yang meninggal saat $t = 3$ adalah $d_4 = 5d_5 = 5$.
Jawab : C

17. Untuk sebuah studi mortalitas dengan data tersensor kanan (*right-censored data*) , diberikan data sebagai berikut:

Waktu y_i	**Jumlah Kematian** s_i	**Jumlah yang beresiko** r_i
5	2	15
7	1	12
10	1	10
12	2	6

Hitunglah $\hat{S}(12)$ dengan menggunakan taksiran Nelson Aalen untuk $\hat{H}(12)$.

a. 0,48

b. 0,52

c. 0,60

d. 0,65

e. 0,67

Pembahasan:

$$\widehat{H}(12) = \sum_{j=1}^{4} \frac{s_j}{r_j} = \frac{2}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{2}{6} = 0,65$$

$$\widehat{S}(12) = e^{-\widehat{H}(12)} = e^{-0,65} = 0,52$$

Jawab : B

18. Diberikan taksiran *product limit* dari sebuah studi mortalitas sebagai berikut:

Waktu (y_t)	10	12	15
Jumlah Kematian	1	2	1
$S_n(y_t)$	0,72	0,60	0,50

Tidak ada kematian lainnya yang terjadi dan tidak ada penambahan peserta (*new entrants*) pada interval waktu antara 10 dan15.
Hitunglah jumlah peserta yang keluar (*withdrawal*) yang terjadi pada interval [12,15)

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

Pembahasan:

$$S_n(y_{12}) = 0,60 = S_n(y_{10})\frac{r_{12}-2}{r_{12}} = 0,72\left(\frac{r_{12}-2}{r_{12}}\right) \rightarrow r_{12} = 12$$

$$S_n(y_{15}) = 0,50 = S_n(y_{12})\frac{r_{15}-1}{r_{15}} = 0,60\left(\frac{r_{15}-1}{r_{15}}\right) \rightarrow r_{15} = 12$$

Dengan 2 kematian pada saat y_{12} dan $r_{12} - r_{15} = 6$, maka jumlah peserta yang keluar adalah 6-2=4 pada interval $[12, 15)$.

Jawab : E

19. Dalam sebuah studi mortalitas selama 3 tahun diberikan data sebagai berikut:

y_i	r_i	s_i
1	1000	20
2	1400	14
3	2000	10

$S(3)$ diestimasi dengan taksiran Kaplan-Meier.

Dengan menggunakan formula *Greenwood*, hitunglah variansi dari estimasi tersebut (*variance of the estimate*).

A. 0,000028

B. 0,000029

C. 0,000030

D. 0,000031

E. 0,000032

Pembahasan:

$$S(3) = \frac{980}{1000} \times \frac{1386}{1400} \times \frac{1990}{2000} = 0,965349$$

Dengan menggunakan formula Greenwood, variansi dari estimasi tersebut adalah

$$(0,965349)^2\left(\frac{20}{(1000)(980)} + \frac{14}{(1400)(1386)} + \frac{10}{(2000)(1990)}\right) = 0,000028$$

Jawab : A

20. Pemegang polis sebanyak 12 orang diamati dimulai dari awal pertanggungan sampai waktu pertama kali melakukan klaim. Data yang diamati sebagai berikut:

Time of first claim	1	2	3	4	5	6	7
Jumlah Klaim	2	1	2	2	1	2	2

Dengan menggunakan taksiran Nelson Aalen, hitunglah batas atas dari selang kepercayaan linear 95% dari fungsi kumulatif *hazard* $H(4,5)$.

A. 1,361

B. 1,545

C. 1,402

D. 1,266

E. 1,437

Pembahasan:

$$\widehat{H}(4,5) = \frac{2}{12} + \frac{1}{10} + \frac{2}{9} + \frac{2}{7} = \frac{244}{315}$$

$$Var[\widehat{H}(4,5)] = \frac{2}{12^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{2}{9^2} + \frac{2}{7^2} = 0,0893966$$

Selang kepercayaan linier 95% dari fungsi kumulatif *hazard* $\widehat{H}(4,5)$ adalah

$$\widehat{H}(4,5) \pm 1,96\sqrt{Var[\widehat{H}(4,5)]} = \frac{244}{135} \pm 1,96\sqrt{0,0893966} = (0,1886, 1,361)$$

Jadi, batas atas dari selang kepercayaan linier 95% dari fungsi kumulatif *hazard* $\widehat{H}(4,5)$ adalah 1,361.

Jawab : A

21. Diberikan data tentang besarnya klaim sebagai berikut:

100 200 500 800 1,000 1,300 2,000 2,000

Misalkan $p = \Pr(X < 1,000|X > 500)$. p diestimasi secara empiris.

Hitunglah variansi dari taksiran empiris dari p.

A. 0,01367

B. 0,03125

C. 0,032

D. 0,04

E. 0,048

Pembahasan:

$\hat{p} = \Pr(X < 100|X > 500) = \dfrac{1}{5}$

Varians dari taksiran empiris dari p diberikan sebagai berikut
$Var(\hat{p}) = \frac{1}{n} \times \hat{p} \times (1-\hat{p}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{125} = 0,032$
Jadi, variansi dari taksiran empiris dari p adalah 0,032.

Jawab : C

22. Diberikan data sebagai berikut:

- Hasil observasi terhadap banyaknya klaim dari sebuah kelompok yang terdiri dari 50 risiko adalah sebagai berikut:

Banyaknya Klaim	Jumlah Resiko
0	7
1	10
2	12
3	17
4	4

- H_0, hipotesis awal, adalah banyaknya klaim per risiko berdistribusi seragam pada 0,1,2,3 dan 4.
- Sebuah uji *chi square* dilakukan dengan menggunakan *statistic Pearson goodness-of-fit* dengan 5 kelas.

Dengan menggunakan tabel *chi square* dibawah ini, manakah pernyataan berikut yang **benar**?

Degree of Freedom	Tingkat Signifikansi			
	0,10	0,05	0,02	0,01
2	4,61	5,99	7,82	9,21
3	6,25	7,81	9,84	11,34
4	7,78	9,49	11,67	13,28
5	9,24	11,07	13,39	15,09

A. H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,01

B. H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,02 ; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,01.

C. H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,05 ; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,02.

D. H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,10 ; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,05.

E. H_0 akan diterima pada tingkat signifikansi 0,01

Pembahasan:

CDF dari model diberikan sebagai berikut

Banyaknya Klaim	Jumlah Resiko
0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{3}{5}$
3	$\frac{4}{5}$
4	1

$E_1 = n[F(1) - F(0)] = 50\left[\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right] = 10$
Karena klaim per risiko berdistribusi seragam, maka pada kasus ini, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 10$.
Tes statistik chi square diberikan sebagai berikut

$$Q = \sum_{j=1}^{5} \frac{(n_j - E_j)^2}{E_j} = \frac{(7-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(17-10)^2}{10} + \frac{(4-10)^2}{10}$$
$$= 9,8$$

Degree of freedom yang kita gunakan adalah $k - r - 1 = 5 - 1 - 1 = 3$ (karena untuk distribusi seragam hanya ada 1 parameter yang diestimasi)
Selanjutnya kita hanya perlu membandingkan nilai dari tes statistik tersebut dengan persentil dari distribusi *chi square* dengan *degree of freedom* = 3. Dari tabel terlihat bahwa nilai $Q = 9,8 > 7,81$. Dengan demikian kita akan menolak H_0 pada tingkat signifikansi 0,05. Sebaliknya, karena $Q = 9,8 < 9,84$, maka kita tidak dapat menolak H_0 pada tingkat signifikansi 0,02.

Jadi H_0 akan ditolak pada tingkat signifikansi 0,05; tetapi tidak ditolak pada tingkat signifikansi 0,02.

Jawab : C

23. Besarnya klaim yang diamati adalah 2, 5, 6, 9 dan 25. Data ini disesuaikan (*fitted*) dengan sebuah distribusi *lognormal* dengan menggunakan *maximum likelihood*.
Hitunglah rata-rata (*mean*) dari *fitted distribution*.
    A. 7,2
    B. 7,8
    C. 8,2
    D. 8,4
    E. 9,4

Pembahasan:

Maximum likelihood estimator (MLE) untuk distribusi lognormal dengan data tersebut adalah

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{k=1}^{5} \ln(X_k)}{5} = \frac{\ln(2) + \ln(5) + \ln(6) + \ln(9) + \ln(25)}{5} = 1,902089$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{5} (\ln(X_k) - \hat{\mu})^2}{5} &= \frac{(\ln(2) - 1,902089)^2 + ... + (\ln(25) - 1,902089)^2}{5} \\ &= 0,676078\end{aligned}$$

$$E[X] = e^{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2} = e^{1,902089 + \frac{1}{2}(0,676078)} = 9,3945 \approx 9,4$$

Jadi, rata-rata dari *fitted distribution* adalah 9,4

Jawab : E

24. Diberikan informasi sebagai berikut tentang sebuah model kredibilitas:

Observasi Pertama	***Unconditional Probability***	**Estimasi Bayesian dari observasi kedua**
1	1/3	1,50
2	1/3	1,50
3	1/3	3,0

Hitunglah estimasi *Buhlmann credibility* dari observasi kedua, jika diketahui observasi pertama adalah 1.

A. 0,75

B. 1,00

C. 1,25

D. 1,50

E. 1,75

Pembahasan:

Faktor kredibilitas Buhlmaan adalah $\hat{\beta}$, dengan $\hat{\beta}$ diperoleh dari regresi estimasi posterior Bayesian pada pembayaran klaim.

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)} \tag{4.2}$$

di mana X adalah observasi pertama dan Y adalah estimasi Bayesian dari estimasi kedua.

$$E[X] = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

Rata-rata dari posterior Bayesian haruslah sama dengan rata-rata dari observasi pertama. Dengan demikian kita peroleh

$$Var(X) = \frac{1}{3}((1-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2) = 2/3$$

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{3}((1-2)(1,5-2) + (2-2)(1,5-2) + (3-2)(3-2)) = \frac{1}{2}$$

$$\hat{Z} = \hat{\beta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = 0,75$$

Jadi, estimasi kredibilitas Buhlmann dari observasi pertama (dengan observasi pertama adalah 1) adalah 0,75.

Jawab : A

25. Diberikan data sebagai berikut:

    i. Banyaknya klaim yang diamati selama periode 1 tahun berdistribusi Poisson dengan mean θ.

    ii. *The prior density* adalah:

    $$\pi(\theta) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-k}} \quad ,0 < \theta < k$$

    iii. *The unconditional probability* dari observasi tidak terjadinya klaim (*zero claims*) selama 1 tahun adalah 0,575.

    Hitunglah k.

    A. 1,5

    B. 1,7

    C. 1,9

    D. 2,1

    E. 2,3

    Pembahasan:

    Diketahui bahwa tidak terjadi klaim *(zero claims)* selama satu tahun, sehingga peluang banyak klaim yang diamati = 0 adalah

    $$\Pr(X=0) = \frac{e^{-\theta}\theta^0}{0!} = e^{-\theta}$$

The unconditional probability dari observasi tidak terjadinya klaim selama satu tahun diberikan sebagai berikut

$$\int_0^k e^{-\theta} \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-k}} \; d\theta = \frac{1}{1-e^{-k}} \int_0^k e^{-2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1-e^{-2k}}{1-e^{-k}} \right) = 0,575$$

Sederhanakan persamaan di atas, maka kita akan mendapatkan

$$e^{-2k} - 1,15e^{-k} + 0,15 = 0$$

Misalkan $x = e^{-k}$, maka kita menuliskan kembali persamaan di atas menjadi

$$x^2 - 1,15x + 0,15 = 0$$

Akar-akar dari persamaan kuadrat di atas adalah $x_1 = 1$ dan $x_2 = 0,15$. Kita akan gunakan $x = 0,15$ sebagai penyelesaian dari persamaan tersebut karena $x = 1$ akan menghasilkan nilai $k = 0$.

$$x = e^{-k} = 0,15 \rightarrow k = \ln(0,15) = 1,9$$

Jadi, nilai k adalah 1,9.

Jawab : C

26. Diberikan data sebagai berikut:
    i. Banyaknya klaim tahunan berdistribusi Poisson dengan mean λ.
    ii. Parameter λ memiliki *prior distribution* dengan fungsi kepadatan peluang :

    $$f(\lambda) = \frac{1}{3} e^{-\lambda/3} \quad ,\lambda > 0$$

    Sebanyak 2 klaim diamati selama tahun pertama.
    Hitunglah variansi dari *posterior distribution* untuk λ.

    A. 9/16
    B. 27/16
    C. 9/4
    D. 16/3
    E. 27/4

    Pembahasan:

    Likelihood dari 2 klaim yang diamati selama tahun pertama dengan banyak klaim tahunan berdistribusi Poisson (λ) diberikan sebagai berikut

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\lambda^2 \approx ce^{-\lambda}\lambda^2$$

dengan c adalah konstanta yang independen terhadap λ. *Probability density function* (pdf) dari distribusi posterior diberikan sebagai berikut

$$\pi_{\lambda|X}(\lambda|X=2) \approx ke^{-\lambda}\lambda^2 e^{\frac{-\lambda}{3}} = k\lambda^2 e^{\frac{-4\lambda}{3}}$$

dengan k adalah konstanta yang independen terhadap λ. Dari pdf distribusi posterior tersebut, kita ketahui bahwa pdf tersebut merupakan pdf dari distribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 3$ dan $\theta = \frac{3}{4}$. Dengan demikian, variansi dari distribusi posterior untuk λ adalah

$$\alpha\theta^2 = (3)\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{16}$$

Jadi, variansi dari posterior distribution untuk λ adalah $\frac{27}{16}$

Jawab : B

27. Diberikan data sebagai berikut:

    i. Parameter Λ memiliki distibusi inverse gamma dengan fungsi kepadatan peluang $g(\lambda) = 500\lambda^{-4}e^{-10/\lambda} \quad ,\lambda > 0$

    ii. Besarnya klaim memiliki distribusi eksponensial dengan fungsi kepadatan peluang $f(x|\Lambda = \lambda) = \lambda^{-1}e^{-x/\lambda} \quad ,\lambda > 0, x > 0$

    Untuk seorang tertanggung, 2 klaim diamati dengan total klaim sebesar 50.
    Tentukan nilai ekspektasi untuk klaim berikutnya untuk tertanggung yang sama.

    A. 5

    B. 12

    C. 15

    D. 20

    E. 25

    Pembahasan:

    Diketahui seorang tertanggung dengan 2 klaim diamati dan total klaim sebesar 50. Misalkan, klaim pertama adalah sebesar 25, dan klaim kedua juga sebesar 25. *Probability density function* (pdf) dari klaim berikutnya untuk tertanggung yang sama diberikan sebagai berikut

$$\pi(\lambda|X_1 = 25, X_2 = 25) = \left(\lambda^{-1}e^{\frac{-25}{\lambda}}\right)\left(\lambda^{-1}e^{\frac{-25}{\lambda}}\right)\left(500\lambda^{-4}e^{\frac{-10}{\lambda}}\right) \approx c\lambda^{-6}e^{\frac{-60}{\lambda}}$$

dengan c adalah konstanta yang independen terhadap λ.
Dengan demikian, kita ketahui bahwa $\pi(\lambda|X_1 = 25, X_2 = 25)$ berdistribusi inverse Gamma dengan parameter $\alpha = 6 - 1 = 5$ dan $\theta = 60$. Nilai ekspektasi untuk klaim berikutnya untuk tertanggung yang sama adalah nilai ekspektasi dari distribusi inverse Gamma dengan parameter $\alpha = 5$ dan $\theta = 60$, yaitu

$$\frac{\theta}{\alpha - 1} = \frac{60}{5-1} = 15$$

Jawab : C

28. X berdistribusi *inverse exponential* dengan $\theta = 50$.
Simulasikan X dengan menggunakan metode inversi dan menggunakan angka acak seragam pada [0,1) berikut ini:

$$0{,}4 \qquad 0{,}6 \qquad 0{,}9$$

Hitunglah nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$

A. 57

B. 62

C. 67

D. 76

E. 84

Pembahasan:
Diketahui bahwa X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 50$. CDF dari fungsi distribusi tersebut adalah $e^{-\frac{50}{x}}$. Untuk $u = 0,4$, kita peroleh

$$e^{-\frac{50}{x}} = 0,4 \rightarrow x = \frac{-50}{\ln(0,4)} = 54,57$$

Untuk $u = 0,6$, kita peroleh

$$e^{-\frac{50}{x}} = 0,6 \rightarrow x = \frac{-50}{\ln(0,6)} = 97,88$$

Untuk $u = 0,9$, kita peroleh

$$e^{-\frac{50}{x}} = 0,9 \rightarrow x = \frac{-50}{\ln(0,9)} = 474,56$$

Nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$ adalah

$$\begin{aligned} E[X \wedge 100] &= \frac{1}{3}([54,57 \wedge 100] + [97,88 \wedge 100] + [474,56 \wedge 100]) \\ &= \frac{1}{3}(54,57 + 97,88 + 100) \\ &= 84,15 \approx 84 \end{aligned}$$

Jawab : E

29. Sebuah kelompok terdiri dari 100 orang. Untuk setiap individu pada kelompok ini, tingkat mortalita $q_x = 0,01$. Mortalita untuk setiap individu adalah saling bebas (*independent*). Anda akan melakukan simulasi pengalaman mortalita selama 3 tahun untuk kelompok ini dengan menggunakan metode inversi . Gunakan 3 angka berikut dari sebuah distribusi seragam [0,1) :

0,12 0,35 0,68

Hitunglah banyaknya kematian yang terjadi dari hasil simulasi selama 3 tahun.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

Pembahasan:
Fungsi masa peluang untuk banyaknya kematian adalah

$$p(x) = \binom{100}{x} 0,01^x (0,99)^{100-x}$$

Dari sini diperoleh fungsi distribusi di 0 dan 1 adalah sebagai berikut:

$$F(0) = p(0) = 0,99^{100} = 0,3660$$
$$F(1) = F(0) + p(1) = 0,3660 + 0,3697 = 0,7357$$

Dari informasi tersebut diketahui jika angka random yang muncul kurang dari 0,3660 maka nilai simulasi banyaknya kematian adalah 0, sedangkan jika angka random yang muncul adalah 0,3660 atau diantara 0,3660 dan 0,7357 maka nilai simulasi banyaknya kematian adalah 1. Dari keterangan tersebut diperoleh nilai simulasi banyaknya kematian adalah: 0, 0 dan 1.
Jawab : B

30. Banyaknya klaim dari seorang tertanggung berdistribusi Poisson dengan rata-rata λ.

    - λ bervariasi antar sesama tertanggung berdasarkan distribusi gamma dengan parameter $\alpha = 3, \theta = 0,1$.
    - Tidak ada klaim terjadi selama n tahun.

    Tentukanlah nilai n sedemikian sehingga ekspektasi banyaknya klaim yang terjadi pada tahun depan adalah 0,2.

    A. 4

    B. 5

    C. 6

    D. 7

    E. 8

    Pembahasan:
    Ekspektasi banyaknya klaim adalah

    $$\frac{3 + \sum_{i=1}^{n} X_i}{10 + n} = 0,2$$

    di mana X_i adalah banyak klaim pada tahun ke-i dan n adalah banyak tahun. Karena tidak ada klaim yang terjadi selama n tahun, maka X_i bernilai 0 untuk semua i. Dengan demikian kita dapatkan

    $$\frac{3}{10 + n} = 0,2 \rightarrow n = 5 \tag{4.3}$$

    Jadi, nilai n adalah 5.
    Jawab : B

5 Periode Juni 2016

1. Untuk sebuah asuransi kendaraan bermotor diketahui bahwa besaran klaim berdistribusi pareto dengan dua parameter $\theta = 10.000$ dan α. Median dari besaran klaim ini adalah 5.000.

   Hitunglah probabilitas sebuah klaim bernilai lebih besar dari 25.000.

   A. 0,1175

   B. 0,3125

   C. 0,5000

   D. 0,6875

   E. 0,8825

   Pembahasan: Karena median dari besaran klaim adalah 5.000, maka

   $$0,5 = F(5.000) = 1 - \left(\frac{\theta}{5.000 + \theta}\right)^{\alpha} \longrightarrow 0,5 = \left(\frac{10.000}{15.000}\right)^{\alpha},$$

   $$\alpha = \frac{\ln 0,5}{\ln 2/3} = 1,7095.$$

   $$\mathbb{P}(X > 25.000) = 1 - F(25.000) = \left(\frac{\theta}{25.000 + \theta}\right)^{\alpha} = \left(\frac{10.000}{35.000}\right)^{1,7095} = 0,1175$$

   Jawab: A.

2. Diketahui peubah acak dari sebuah kerugian, X, memiliki karakteristik berikut:

X	$F(x)$	$\mathbb{E}(X \wedge x)$
0	0,0	0
100	0,2	91
200	0,6	153
1.000	1,0	331

   Hitunglah *mean excess loss* untuk sebuah *deductible* sebesar 100.

   A. 250

   B. 300

C. 350

D. 400

E. 450

Pembahasan: Karena $F(x) = 1,0$ untuk $x = 1.000$, maka $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \wedge 1000) = 331$.

$$\begin{aligned} \text{Mean excess loss} &= \frac{\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X \wedge 100)}{1 - F(100)} \\ &= \frac{331 - 91}{0{,}8} = 300 \end{aligned}$$

Jawab: B.

3. Besaran sebuah kerugian memiliki *cumulative distribution function* sebagai berikut:

$$F(x) = \frac{3}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{1/4} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{1/2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 100$$

Hitunglah *Loss Elimination Ratio* untuk sebuah *ordinary deductible* sebesar 20. Pilih pembulatan terdekat.

A. 0,14

B. 0,20

C. 0,36

D. 0,42

E. 0,45

Pembahasan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \wedge d) &= \int_0^d 1 - F(x)dx = \int_0^d 1 - \left(\frac{3}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{1/4} + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{100}\right)^{1/2}\right) dx \\ &= d - \frac{3}{50}\sqrt{10}\,(d)^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{60}(d)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\mathbb{E}(X \wedge 20) = 20 - \frac{3}{50}\sqrt{10}\,(20)^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{60}(20)^{\frac{3}{2}} = 10,4844$$

dan

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \wedge 100) = 100 - \frac{3}{50}\sqrt{10}\,(100)^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{60}(100)^{\frac{3}{2}} = 23,333.$$

$$\textit{Loss Elimination Ratio} \ = \frac{\mathbb{E}(X \wedge 20)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{10,4844}{23,333} = 0,45.$$

Jawab: E.

4. Sebuah Perusahaan memiliki 50 karyawan yang memiliki biaya perawatan gigi yang saling bebas secara mutual (*mutually independent*). Untuk setiap karyawan, Perusahaan akan membayarkan 100% biaya perawatan gigi setelah dikurangi \$100.
Biaya perawatan gigi untuk setiap karyawan berdistibusi sebagai berikut:

Biaya Perawatan Gigi	Probabilitas
0	20%
50	30%
200	30%
500	10%
1.000	10%

Dengan menggunakan pendekatan distribusi normal, hitunglah percentile ke-95 untuk biaya perawatan gigi yang dibayarkan oleh Perusahaan.
(Pilihlah jawaban yang paling mendekati)

A. \$ 8.173

B. \$ 9.173

C. \$ 10.173

D. \$ 11.173

E. \$ 12.173

Pembahasan: Misalkan X menyatakan biaya perawatan gigi untuk satu orang karyawan, setelah dikurangi \$100. Distribusi dari X diberikan oleh

Biaya Perawatan Gigi	Probabilitas
0	50%
100	30%
400	10%
900	10%

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= (0)(0,50) + (100)(0,30) + (400)(0,10) + (900)(0,10) = 160 \\
\mathbb{E}(X^2) &= (0)^2(0,50) + (100)^2(0,30) + (400)^2(0,10) + (900)^2(0,10) = 100.000 \\
Var(X) &= 100.000 - 160^2 = 74.400 \\
\mathbb{E}(S) &= 50 \times \mathbb{E}(X) = (50)(160) = 8.000 \\
Var(S) &= 50 \times Var(X) = (50)(74.400) = 3.720.000 \text{ (karena saling bebas)}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan pendekatan distribusi normal, percentile ke-95 dari S adalah suatu nilai c dimana

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \leq c) &= 0,95 \\
\mathbb{P}\left(\frac{S - 8.000}{\sqrt{3.720.000}} \leq \frac{c - 8.000}{\sqrt{3.720.000}}\right) &= 0,95 \\
\frac{c - 8.000}{\sqrt{3.720.000}} &= 1,645 \\
c &= 8.000 + 1,645\sqrt{3.720.000} = 11.172.76 \\
&\approx 11.173
\end{aligned}$$

Jawab: D.

5. Diberikan informasi sebagai berikut:
   - Kerugian berdistribusi Pareto dengan parameter $\theta = k$ dan $\alpha = 2$
   - Terdapat *deductible* sebesar $2k$

   Hitunglah Loss Elimination Ratio!.

   A. 1/3

   B. 1/2

   C. 2/3

   D. 4/5

   E. 1

   Pembahasan:

$$LER(d) = \frac{\mathbb{E}(X \wedge d)}{\mathbb{E}(X)}$$

Untuk distribusi Pareto,

$$\mathbb{E}(X \wedge d) = \mathbb{E}(X)\left(1 - \left(\frac{\theta}{\theta + d}\right)^{\alpha - 1}\right)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
LER(d) &= \frac{\mathbb{E}(X \wedge d)}{\mathbb{E}(X)} \\
&= 1 - \left(\frac{k}{k + 2k}\right)^{2-1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Jawab: C.

6. Kerugian berdistribusi eksponensial dengan rata-rata (*mean*) 1.000. Terdapat *deductible* sebesar 500. Sebuah perusahaan ingin menggandakan *Loss Elimination Ratio'* (LER). Tentukan nilai *deductible* yang baru sedemikian sehingga tujuan perusahaan untuk menggandakan LER tercapai.

   A. 219

   B. 693

   C. 1.046

   D. 1.193

   E. 1.546

   Pembahasan: Diketahui bahwa rata-rata adalah 1.000, yaitu

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty S(x)dx = 1000$$

   Sehingga

$$\mathbb{E}(X \wedge 500) = \int_0^{500} S(x)dx = \int_0^{500} e^{-\frac{x}{1000}}dx = -1000\left(e^{-\frac{500}{1000}} - 1\right) = 393,46934$$

$$\textit{Loss Elimination Ratio} = \frac{\mathbb{E}(X\wedge 500)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{393,46934}{1000} = 0,39346934$$

   Jika LER digandakan, maka nilainya adalah 0,78693868. Dengan demikian, $\mathbb{E}(X \wedge d) = 786,93868$.

$$-1000\left(e^{-\frac{d}{1000}} - 1\right) = 786,93868$$

   Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita dapatkan nilai d adalah sebesar

$$1000(\ln(0,2130613194)) = 1546,1753 \approx 1546$$

   Jawab: E.

7. Diberikan informasi sebagai berikut untuk klaim aggregat $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

   - X_i berdistribusi sbb
   - Λ adalah peubah acak Poisson dengan parameter $\frac{1}{p}$
   - Diketahui $\Lambda = \lambda$, N berdistribusi Poisson dengan parameter λ

x	$\mathbb{P}(X = x)$
1	p
2	$1 - p$

- Banyaknya klaim dan besar klaim saling bebas secara mutual (*mutually independent*)
- $Var(S) = \frac{19}{2}$

Hitunglah p

A. 1/6

B. 1/5

C. 1/4

D. 1/3

E. 1/2

Pembahasan: Untuk distribusi dari frekuensi, dengan menggunakan *law of total probability*, kita peroleh:

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(N|\lambda)\right) = \mathbb{E}(\Lambda) = \frac{1}{p}$$

Untuk variansi, kita akan gunakan *law of total variance*:

$$\begin{aligned} Var(N) &= Var\left(\mathbb{E}(N|\lambda)\right) + \mathbb{E}\left(Var(N|\lambda)\right) \\ &= Var(\Lambda) + \mathbb{E}(\Lambda) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p} \end{aligned}$$

$\mathbb{E}(X) = (p)(1) + (1-p)(2) = 2 - p$.
Jika kita perhatikan, X memiliki distribusi Bernoulli (dengan nilai 1 atau 2, bukan 0 atau 1), sehingga variansinya adalah $p(1-p)$. Maka,

$$\begin{aligned} Var(S) &= \mathbb{E}(N)Var(X) + Var(N)\mathbb{E}(X)^2 \\ \frac{19}{2} &= \frac{1}{p}(p)(1-p) + \frac{2}{p}(2-p)^2 \\ 19p &= 2p - 2p^2 + 16 - 16p + 4p^2 \\ 0 &= 2p^2 - 33p + 16 \\ 0 &= (2p-1)(p-16) \end{aligned}$$

Karena p menyatakan peluang, maka nilainya haruslah berada di antara 0 dan 1. dengan demikian kita pilih $p = \frac{1}{2}$.
Jawab: E.

8. Sebuah perusahaan asuransi menjual 300 polis asuransi kebakaran dengan informasi sebagai berikut:

Jumlah Polis	*policy maximum*	Probabilitas terjadinya klaim per polis
100	400	0,05
200	300	0,06

Diberikan informasi sebagai berikut

- Besar klaim untuk setiap polis berdistribusi seragam (*uniformly distributed*) antara 0 dan *policy maximum*
- Probabilitas terjadinya klaim lebih dari satu per polis adalah 0.
- Kejadian munculnya klaim saling bebas (*independent*)

Hitunglah variansi dari klaim aggregat! (Pilihlah jawaban yang paling mendekati).

A. 150.000

B. 300.000

C. 450.000

D. 600.000

E. 750.000

Pembahasan: Banyaknya klaim berdistribusi Bernoulli (karena kemungkinannya hanya ada 1 klaim atau tidak ada klaim) dengan variansi $q(1-q)$. Untuk distribusi seragam, *mean* diberikan oleh nilai *policy maximum* dibagi 2, dan variansinya diberikan oleh nilai *policy maximum* kuadrat dibagi 12. Maka, untuk 100 polis pertama, jika S menyatakan klaim aggregat untuk 1 polis,

$$\begin{aligned} Var(S) &= \mathbb{E}(N)Var(X) + Var(N)\mathbb{E}(X)^2 \\ &= (0,05)\left(\frac{400^2}{12}\right) + (0,05)(0,95)(200^2) \\ &= 2566\frac{2}{3} \end{aligned}$$

dan untuk setiap polis dari 200 polis berikutnya:

$$Var(S) = (0,06)\left(\frac{300^2}{12}\right) + (0,06)(0,94)(150^2) = 1719$$

Maka untuk 300 polis tersebut, variansi dari klaim aggregatnya adalah:

$$100\left(2566\frac{2}{3}\right) + 200(1719) = 600.467 \approx 600.000$$

Jawab: D.

9. Diberikan informasi sebagai berikut:

   - Banyaknya klaim berdistribusi binomial negatif dengan $r = 0,5$ dan $\beta = 1$ per tahun.
   - Besar klaim berdistribusi Pareto yang memiliki dua parameter yaitu $\alpha = 3$ dan $\theta = 1.000$
   - Banyaknya klaim dan besar klaim saling bebas (*independent*).

   Dengan menggunakan *normal approximation*, hitunglah probabilitas total klaim tahunan (*annual aggregate claims*) bernilai kurang dari 150.

   A. 0,15

   B. 0,25

   C. 0,35

   D. 0,45

   E. 0,55

Pembahasan: Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= r\beta = (0,5)(1) = 0,5 \\
Var(N) &= r\beta(1+\beta) = (0,5)(1)(2) = 1 \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{\theta}{\alpha - 1} = \frac{1.000}{3-1} = 500 \\
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{\theta^2 2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{1.000^2 \times 2}{2 \times 1} = 1.000.000 \\
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1.000.000 - 500^2 = 750.000
\end{aligned}$$

Sehingga dapat dihitung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S) &= \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) = (0,5)(500) = 250 \\
Var(S) &= \mathbb{E}(N)Var(X) + Var(N)\mathbb{E}(X)^2 = (0,5)(750,000) + (1)(500^2) = 625.000
\end{aligned}$$

$$\frac{150 - \mathbb{E}(S)}{\sqrt{Var(S)}} = \frac{-100}{790,569} = -0,126$$

$$\mathbb{P}(S < 150) = \Phi(-0,126) = \Phi(-0,13) = 1 - 0,5517 = 0,4483 \approx 0,45$$

Jawab: D.

10. Sebanyak 16 orang telah diamati untuk keperluan studi perhitungan tingkat mortalitas. Tidak ada peserta yang mengundurkan diri (*no withdrawal*) dari pengamatan sebelum 12 satuan waktu. *The product limit estimator* dari $S(12)$ adalah 0,9375.
Hitunglah *Nelson Aalen estimate* untuk $S(12)$.

A. 0,9337

B. 0,9356

C. 0,9375

D. 0,9394

E. 0,9413

Pembahasan: Karena tidak ada peserta yang mengundurkan diri, maka waktu kematian dapat dikelompokkan. Misalkan s menyatakan jumlah kematian sebelum 12. Maka,

$$0,9375 = \hat{S}(12) = \frac{16 - s}{16} \longrightarrow s = 1.$$

Menggunakan *Nelson Aalen*, $\hat{H}(12) = \frac{1}{16}$, maka nilai estimasinya adalah

$$\hat{S}(12) = e^{-1/16} = 0,9394$$

Jawab: D.

11. Dalam sebuah studi perhitungan tingkat mortalitas diberikan beberapa observasi berikut

(i) Pada waktu $t = 1$; sejumlah x orang meninggal, 1 keluar (*withdrawals*) dan 1 masuk (*enters*).

(ii) Pada waktu $t = 2$; sejumlah y orang meninggal dan 1 masuk (*enters*).

(iii) Pada waktu $t = 3$; 1 orang meninggal.

Berdasarkan observasi diatas, tiga nilai dari $\hat{H}(t)$, estimator Nelson Aalen untuk fungsi kumulatif hazard pada saat t adalah:

$$\hat{H}(1,5) = 0,20$$
$$\hat{H}(2,5) = 0,45$$
$$\hat{H}(3,5) = 0,55$$

Hitunglah $x + y$.

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

E. 7

Pembahasan: Karena $\hat{H}(1,5) = \hat{H}(1) = \frac{s_1}{r_1} = 0,20 \longrightarrow x = 0,20r_1,$
dan $\hat{H}(2,5) = \hat{H}(2) = \hat{H}(1) + \frac{s_2}{r_2} = 0,45 \longrightarrow \frac{y}{r_2} = 0,45 - 0,20$
$\longrightarrow y = 0,25r_2,$ dan $r_2 = r_1 - x$
Selanjutnya, $\hat{H}(3,5) = \hat{H}(3) = \hat{H}(2) + \frac{s_3}{r_3} = 0,55 \longrightarrow \frac{1}{r_3} = 0,55 - 0,45$
$\longrightarrow r_3 = 10,$ dan $r_3 = r_2 - y + 1.$
Maka diperoleh,

$$r_2 = 9 + y \text{ dan } y = 0,25r_2 \implies r_2 = 12,\ y = 3$$

$$r_1 - x = 12 \text{ dan } x = 0,20r_1 \implies x = 3$$

Jadi $x + y = 6$.
Jawab: D.

12. Dalam sebuah studi 5 tahunan untuk perhitungan tingkat mortalitas diberikan data berikut:

Hitunglah *Greenwood's approximation* untuk *conditional variance* dari *product limit esti-*

y_j	s_j	r_j
1	3	15
2	24	80
3	5	25
4	6	60
5	3	10

mator $S(4)$.

A. 0,0055

B. 0,0056

C. 0,0058

D. 0,0061

E. 0,0063

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
S_n(4) &= \left(\frac{15-3}{15}\right)\left(\frac{80-24}{80}\right)\left(\frac{25-5}{25}\right)\left(\frac{60-6}{60}\right) \\
&= (0,8)(0,7)(0,8)(0,9) = 0,4032 \\
\widehat{Var}\left(S_n(4)\right) &= S_n(4)^2 \sum_{y_j \leq 4} \frac{s_j}{r_j(r_j - s_j)} \\
&= (0,4032)^2 \left(\frac{3}{(15)(12)} + \frac{24}{(80)(56)} + \frac{5}{(25)(20)} + \frac{6}{(60)(54)}\right) \\
&= 0,005507 \approx 0,0055
\end{aligned}
$$

Jawab: A.

13. Dari sebuah populasi yang memiliki fungsi distribusi F, diberikan sampel berikut:

    2,0 3,3 3,3 4,0 4,0 4,7 4,7 4,7

    Hitunglah *kernel density estimate* dari $F(4)$, dengan menggunakan kernel seragam (*uniform kernel*) dengan *bandwidth* 1,4.

    A. 0,31

    B. 0,41

    C. 0,50

    D. 0,53

    E. 0,63

Pembahasan: Untuk soal ini, kita akan mengestimasi fungsi distribusi $F(x)$ untuk titik estimasi $x = 4$.

$$
K_{x_i}(4) = \begin{cases} 0, & 4 \leq x_i - 1,4 \\ \frac{4-(x_i-1,4)}{2(1,4)}, & |4 - x_i| \leq 1,4 \\ 1, & 4 > x_i + 1,4 \end{cases}
$$

Kemudian, karena terdapat 8 observasi, maka

$$
\begin{aligned}
\hat{F}(4) &= \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{1}{8}\right) K_{x_i}(4) \\
&= \frac{1 + 2(0,75) + 2(0,5) + 3(0,25)}{8} \\
&= \frac{4,25}{8} = 0,53125
\end{aligned}
$$

Jawab: D.

14. Sebuah selang kepercayaan linear 90% dari $H(100)$ adalah (0,82 ; 0,98) Hitunglah batas atas dari selang kepercayaan *log-transformed* 98% dari $H(100)$.

    A. 0,98

    B. 0,99

    C. 1,00

    D. 1,01

    E. 1,02

    Pembahasan: $\hat{H}(100) = \frac{0,82+0,98}{2} = 0,9$, dan $Z_{0,9}\sqrt{\widehat{Var}(H)} = 0,08$, sehingga diperoleh

    $$Z_{0,98}\sqrt{\widehat{Var}(H)} = \frac{2,326}{1,645}(0,08) = 0,113$$

    dan

    $$U = \exp\left(\frac{0,113}{0,9}\right) = 1,134.$$

    Maka batas atasnya adalah

    $$H \cdot U = (0,9)(1,134) = 1,0206$$

    Jawab: B.

15. Diberikan informasi sebagai berikut

    - Kerugian berdistribusi Pareto dengan parameter θ (tidak diketahui) dan $\alpha = 3$.
    - Sebanyak 300 kerugian telah diamati.

    Tentukan variansi dari $\tilde{\theta}$ taksiran θ dengan menggunakan metode moment.

    A. $0,0025\theta^2$

    B. $0,0033\theta^2$

    C. $0,0050\theta^2$

    D. $0,0100\theta^2$

    E. $0,0133\theta^2$

    Pembahasan: Karena kerugian berdistribusi Pareto maka

    $$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \frac{\theta^2\Gamma(2+1)\Gamma(3-2)}{\Gamma(3)} = \frac{\theta^2 2!1}{2!} - \left(\frac{\theta\Gamma(2)\Gamma(3-1)}{\Gamma(3)}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4}\theta^2 \end{aligned}$$

Estimasi θ menggunakan metode moment adalah

$$\bar{X} = \mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{2}$$
$$\tilde{\theta} = 2\bar{X}.$$

Variansi dari $\tilde{\theta}$ dapat dihitung dengan

$$Var(\tilde{\theta}) = Var(2\bar{X}) = \frac{4}{n}Var(X_i)$$
$$= \frac{4}{n}\frac{3}{4}\theta^2 = \frac{3}{300}\theta^2 = 0,01\theta^2$$

Jawab: D

16. Diberikan sampel acak dari 13 klaim sebagai berikut:

    99 133 175 216 250 277 651 698 735 745 791 906 947

    Tentukan *the smoothed empirical estimate* dari percentile ke-35 (35^{th} *percentile*).

    A. 219,4

    B. 234,7

    C. 246,6

    D. 256,8

    E. 231,3

    Pembahasan: $(0,35)(n+1) = 0,35(14) = 4,9$

    35^{th} *percentile*=$(0,1)(216) + (0,9)(250) = 246,6$

    Jawab: D.

17. Diberikan 3(tiga) observasi sebagai berikut

    $$0,74 \qquad 0,81 \qquad 0,95$$

    Anda akan mencocokkan data observasi tersebut dengan distribusi yang memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

    $$f(x) = (p+1)x^p \;\; ; \;\; 0 < x < 1, \; p > -1$$

    Tentukan *the maximum likelihood estimate* dari p.

    Hitunglah nilai dari *expected present value* dari biaya (tidak termasuk biaya tambahan) pada saat issue (polis terbit) dalam bentuk G. (pembulatan terdekat)

A. 4,0

B. 4,1

C. 4,2

D. 4,3

E. 4,4

Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
L(p) &= f(0,74) \cdot f(0,81) \cdot f(0,95) \\
&= (p+1)(0,74)^p \cdot (p+1)(0,81)^p \cdot (p+1)(0,95)^p \\
&= (p+1)^3(0,56943)^p \\
l(p) &= \ln L(p) = 3\ln(p+1) + p\ln(0,56943) \\
l'(p) &= \frac{3}{p+1} + \ln(0,56943) = 0 \longrightarrow p+1 = \frac{3}{\ln(0,56943)} \\
p &= 4,32747 \approx 4,4
\end{aligned}
$$

Jawab: D.

18. Diberikan informasi sebagai berikut

    I. Sebuah sampel pembayaran klaim : 29 64 90 135 182

    II. Besar klaim diasumsikan berdistribusi eksponensial.

    III. Rata-rata dari distribusi eksponensial diestimasi dengan menggunakan metode moment.

    Hitunglah nilai dari statistik uji Kolmogorov Smirnov.

    A. 0,14

    B. 0,16

    C. 0,19

    D. 0,25

    E. 0,27

    Pembahasan:

    Dengan:
    $\hat{\theta} = \bar{x} = 100$ dan $F_0(x) = 1 - e^{-x/100}$.
    Nilai maksimum dari dua kolom terakhir adalah 0,273.

    Jawab: E.

x	$F_0(x)$	$F_n(x^-)$	$F_n(x)$	$\lvert F_n(x^-) - F_0(x)\rvert$	$\lvert F_n(x) - F_0(x)\rvert$
29	0,2517	0	0,2	0,2517	0,0517
64	0,4727	0,2	0,4	0,2727	0,0727
90	0,5934	0,4	0,6	0,1934	0,0066
135	0,7408	0,6	0,8	0,1408	0,0592
182	0,8380	0,8	1	0,0380	0,162

19. Banyaknya klaim dari sebuah pertanggungan asuransi adalah sebagai berikut:

Banyaknya klaim (*number of claims*)	Jumlah Polis (*number of policies*)
0	325
1	325
2	225
3	100
4	25
5+	0

Sebuah distribusi *Poisson* dengan rata-rata (*mean*) 1,2 disesuaikan (*fitted*) dengan data. Hitunglah nilai dari statistik *Chi-Square*.

A. kurang dari 9

B. paling sedikit 9, akan tetapi kurang dari 11

C. paling sedikit 11, akan tetapi kurang dari 13

D. paling sedikit 13, akan tetapi kurang dari 15

E. lebih dari 15

Pembahasan: Salah satu bagian penting yang perlu diingat adalah bahwa kita harus tetap memperhitungkan grup yang memiliki klaim 5 dan lebih dari 5. Pada tabel berikut, aturan untuk kelas $(a, b, 0)$ digunakan untuk menghitung peluang *Poisson* p_i, dan $p_5 = 1 - \sum_{i-0}^{4} p_i$.

i	Poisson p_i	np_i	n_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	$e^{-1,2}$ =0,301194	301,194	325	1,8816
1	1,2p_0 =0,361433	361,433	325	3,6725
2	0,6p_1 =0,216860	216,860	225	0,3056
3	0,4p_2 =0,086744	86,744	100	2,0258
4	0,3p_3 =0,026023	26,023	25	0,0402
5+	0,007746	7,746	0	7,746

Jumlah dari kolom paling kanan adalah 15,6714.
Jawab: E.

20. Hasil observasi 4, 8, 18, 21, 49 disesuaikan (*fitted*) dengan distribusi yang memiliki fungsi kepadatan peluang (*density function*) sebagai berikut menggunakan *matching* moment pertama dan moment kedua. $f(x;\theta,d) = \frac{1}{\theta}e^{-(x-d)/\theta} \quad ; \quad x \geq d$

    Tentukan *median* dari *fitted distribution*.

    A. 11

    B. 13

    C. 14

    D. 15

    E. 16

    Pembahasan: Bentuk dari fungsi kepadatan peluangnya mirip dengan distribusi eksponensial yang digeser sejauh d. Maka, *mean* adalah $\theta + d$ dan variansinya adalah θ^2, karena penggeseran tidak berpengaruh terhadap variansi. *Mean* dari observasi diberikan oleh

    $$\bar{x} = \frac{4+8+18+21+49}{5} = 20$$

    dan variansi dari observasi diberikan oleh

    $$\mu_2 = \frac{4^2+8^2+18^2+21^2+49^2}{5} - 20^2 = 249,2$$

    Sehingga,

    $$\theta + d = 20 \text{ serta } \theta^2 = 249,2$$
    $$\longrightarrow \quad \theta = 15,78607 \text{ dan } d = 4,21393$$

    Maka, *median* dari *fitted distribution* diberikan oleh

    $$F(x) = 1 - e^{-(x-d)/\theta} = 0,5$$
    $$\longrightarrow x = \theta \ln 2 + d = 15,156$$

    Jawab: D.

21. Dalam sebuah studi mortalitas, kematian terjadi pada waktu berikut:
    60, 70, 75, 80, 86, 87, 88
    Fungsi survival berikut disesuaikan (*fitted*) dengan data menggunakan *percentile matching*.

    $$S(x) = \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{\theta} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 100$$

Percentile ke-60 dari "*the fitted distribution*" disesuaikan (*is matched*) dengan Percentile ke-60 dari metode "*empirical smoothed*".
Tentukan probabilitas seseorang bertahan hidup (*the fitted probability of survival*) melebihi usia 80.

A. 0,43

B. 0,44

C. 0,46

D. 0,48

E. 0,49

Pembahasan: Percentile ke-60 dari metode "*empirical smoothed*" adalah $0,8(86)+0,2(80) = 84,8$. Percentile ke-60 dari "*the fitted distribution*" adalah percentile ke-40 dari fungsi survivalnya. Maka

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{84,4}{100}\right)^{\theta} &= 0,4 \\
1-\frac{84,4}{100} &= (0,4)^{1/\theta} \\
\ln 0,152 &= \frac{\ln 0,4}{\theta} \\
\theta &= 0,4864 \\
\tilde{S}(80) &= 0,2^{0,4864} = 0,4571
\end{aligned}$$

Jawab: C.

22. Diberikan informasi sebagai berikut

I. Banyaknya klaim berdistribusi binomial negative dengan parameter r dan $\beta = 3$

II. Besar klaim berdistribusi sebagai berikut:

Besar Klaim	Probabilitas
1	40%
10	40%
100	20%

III. Banyaknya klaim dan besar klaim diketahui saling bebas (*independent*)

Tentukan ekspektasi jumlah klaim (*expected number of claims*) yang dibutuhkan sehingga total kerugian (*aggregate loss*) berada dalam 10% dari ekspektasi total kerugian (*expected aggregate losses*) dengan probabilitas 95%.

A. kurang dari 1.200

B. paling sedikit 1.200, akan tetapi kurang dari 1.600

C. paling sedikit 1.600, akan tetapi kurang dari 2.000

D. paling sedikit 2.000, akan tetapi kurang dari 2.400

E. lebih dari 2.400

Pembahasan: Untuk *severity* dari klaim

$$\begin{aligned}\mu_S &= (1)(0,4) + (10)(0,4) + (100)(0,2) = 24,4\\ \sigma_S^2 &= (1)^2(0,4) + (10)^2(0,4) + (100)^2(0,2) - 24,4^2 = 1.445,04\end{aligned}$$

Untuk frekuensi dari klaim

$$\begin{aligned}\mu_F &= r\beta = 3r\\ \sigma_F^2 &= r\beta(1+\beta) = 12r\end{aligned}$$

Untuk total kerugian

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_S\mu_F = 24,2(3r) = 73,2r\\ \sigma^2 &= \sigma_S^2\sigma_F^2 + \sigma_S^2\mu_F = 24,4^2(12r) + 1.445,04(3r) = 11.479,44r\end{aligned}$$

Dengan probabilitas 95% dan berada dalam 10% dari ekspektasi total kerugian, maka

$$\lambda_0 = \left(\frac{1,96}{0,1}\right)^2 = 384,16.$$

Banyaknya observasi yang dibutuhkan adalah sejumlah

$$\frac{\lambda_0 \cdot \sigma^2}{\mu^2} = \frac{384,16(11.479,44r)}{(73,2r)^2} = \frac{823,02}{r}$$

Observasi tersebut secara rata-rata akan menghasilkan sejumlah $3r$ klaim sehingga ekspektasi jumlah klaim yang dibutuhkan adalah

$$\frac{823,02}{r}(3r) = 2.469$$

Jawab: E.

23. Diberikan informasi sebagai berikut

- X adalah peubah acak untuk besar klaim.
- N adalah peubah acak untuk banyaknya klaim dan diketahui berdistribusi *Poisson*.
- X dan N saling bebas (*independent*).
- n_0 adalah standar untuk kredibilitas penuh (*full credibility*) berdasarkan banyaknya klaim.
- n_f adalah standar untuk kredibilitas penuh (*full credibility*) berdasarkan total biaya klaim.
- n adalah banyaknya klaim yang diamati.
- C adalah peubah acak untuk total biaya klaim.
- Z adalah besar kredibilitas (*amount of credibility*) pada total biaya klaim.

Berdasarkan metode kredibilitas fluktuasi terbatas (limited fluctuation credibility),manakah pernyataan berikut yang benar?

1. $Var(C) = (\mathbb{E}(N) \cdot Var(X)) + (\mathbb{E}(X) \cdot Var(N))$
2. $n_f = n_0 \left(\frac{\mathbb{E}(X)^2 + Var(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \right)$
3. $Z = \sqrt{\frac{n}{n_f}}$

A. 1 saja

B. 2 saja

C. 1 dan 2

D. 2 dan 3

E. 1,2 dan 3

Pembahasan: Pernyataan 1 kurang tepat, seharusnya $\mathbb{E}(X)^2$ bukan $\mathbb{E}(X)$. Pernyataan 2 dan 3 sudah benar.

Jawab: D.

24. Diberikan informasi sebagai berikut:

- Sebuah portfolio terdiri dari 100 resiko yang identik dan saling bebas (*identic and independent risks*).
- Banyaknya klaim per tahun untuk setiap resiko berdistribusi *Poisson* dengan mean λ.
- *The prior distribution* dari λ diasumsikan berdistribusi gamma dengan *mean* 0,25 dan variansi 0,0025.
- Pada tahun terakhir, terdapat pengalaman kerugian sebagai berikut :

Tentukan variansi dari *the posterior distribution* dari λ.

Banyaknya Klaim	Jumlah risiko
0	80
1	17
2	3

A. kurang dari 0,00075

B. paling sedikit 0,00075, akan tetapi kurang dari 0,00125

C. paling sedikit 0,00125, akan tetapi kurang dari 0,00175

D. paling sedikit 0,00175, akan tetapi kurang dari 0,00225

E. lebih dari 0,00225

Pembahasan: Misalkan parameter dari distribusi gamma adalah α dan β. Maka

$$\begin{aligned}
\alpha\theta &= 0,25 \\
\alpha\theta^2 &= 0,0025 \\
\theta &= 0,01 \qquad \alpha = 25 \qquad \gamma = 100 \\
\alpha_* &= 25 + 17(1) + 2(3) = 48 \\
\gamma_* &= 100 + 80 + 17 + 3 = 200
\end{aligned}$$

Variansi dari *the posterior distribution* dari λ adalah $48/200^2 = 0,0012$.

Jawab: B.

25. Diberikan informasi sebagai berikut:

- Banyaknya klaim berdistribusi gamma dengan parameter α dan $\theta = 0,5$.
- *The prior distribution* dari α diasumsikan berdistribusi seragam (*uniform*) pada interval (0,4).

Tentukan nilai *Buhlmann's k* untuk mengestimasi nilai ekspektasi dari sebuah klaim.

A. 2/3

B. 1

C. 4/3

D. 3/2

E. 2

	Tahun			
Pemegang Polis	1	2	3	4
X	730	800	650	700
Y	655	650	625	750

Pembahasan: Variansi dari *hypothetical mean* diberikan oleh

$$Var(0,5\alpha) = \frac{1}{4}Var(\alpha) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{16}{12}\right) = \frac{1}{3}$$

Sedangkan nilai ekspektasinya diberikan oleh

$$\mathbb{E}(0,25\alpha) = 0,25\mathbb{E}(\alpha) = \frac{1}{2}$$

Sehingga diperoleh

$$k = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$$

Jawab: D.

26. Diberikan informasi tentang total klaim untuk 2(dua) orang pemegang polis sbb:

Dengan menggunakan *the nonparametric empirical Bayes method*, tentukan premi kredibilitas Buhlmann untuk pemegang polis Y.
(Petunjuk : penyelesaian bisa menggunakan asumsi "*uniform exposure*")

A. 655

B. 670

C. 687

D. 703

E. 719

Pembahasan: $\bar{x} = \frac{730+800+650+700}{4} = 720$, dan $\bar{y} = \frac{655+650+625+750}{4} = 670$. *Mean* dari seluruh observasi (8 observasi) tersebut adalah 695.

$$\hat{v} = \frac{(730-720)^2 + \cdots + (700-720)^2 + (655-670)^2 + \cdots + (750-695)^2}{2(4-1)} = 3475$$

$$\hat{a} = \frac{(720-695)^2 + (670-695)^2}{2-1} - \frac{3475}{4} = 381.25$$

$$\hat{k} = \frac{3475}{381.25} = 9,1148 \qquad \hat{Z} = \frac{4}{4+9,1148} = 0,305$$

$$P_c = (0,305)(670) + (1 - 0,305)(695) = 687,4 \approx 687$$

Jawab: C.

27. Banyaknya kejadian klaim dari seorang pengemudi selama setahun diasumsikan berdistribusi *Poisson* dengan rata-rata (*mean*) tidak diketahui dan bervariasi antar sesama pengemudi. Pengalaman dari 100 pengemudi adalah sebagai berikut:

Banyaknya klaim yang terjadi selama satu tahun	Jumlah pengemudi
0	54
1	33
2	10
3	2
4	1

Hitunglah kedibilitas dari satu tahun pengamatan untuk seorang pengemudi dengan menggunakan metode estimasi empiris bayes semiparametrik.

A. 0,046

B. 0,055

C. 0,061

D. 0,068

E. 0,073

Pembahasan: Dari data diperoleh

$$\bar{x} = \frac{33 + 2 \times 10 + 3 \times 2 + 4 \times 1}{100} = 0,63,$$

$$54(0 - 0,63)^2 + 33(1 - 0,63)^2 + 10(2 - 0,63)^2 + 2(3 - 0,63)^2 + 1(4 - 0,63)^2 = 67,31$$

$$\frac{\sum(X_i - \bar{x})^2}{100 - 1} = \frac{67,31}{99} = 0,6799.$$

$$\hat{a} = 0,6799 - 0,63 = 0,0499.$$

$$\hat{k} = \frac{0,63}{0,0499} = 12,6253,$$

sehingga faktor kredibilitas dari permasalahan ini adalah

$$Z = \frac{1}{1 + \hat{k}} = \frac{1}{1 + 12,6253} = 0,0734$$

Jawab: E.

28. Diberikan informasi sebagai berikut:

- Selama periode 2(dua) tahun, sebanyak 100 polis memiliki pengalaman klaim sbb:

Banyaknya klaim yang terjadi pada tahun pertama dan tahun kedua	Jumlah polis
0	50
1	30
2	15
3	4
4	1

- Banyaknya klaim per tahun berdistribusi *Poisson*.
- Setiap pemegang polis diasuransikan selama 2(dua) tahun penuh.

Secara random dipilih pemegang polis yang memiliki 1(satu) klaim selama periode 2(dua) tahun. Dengan menggunakan estimasi *semiparametric empirical Bayes*, tentukan estimasi *Buhlmann* untuk banyaknya klaim pada tahun ketiga untuk pemegang polis yang sama.

A. 0,380

B. 0,387

C. 0,393

D. 0,403

E. 0,443

Pembahasan:

$$\hat{v} = \bar{x} = \frac{30+30+12+4}{100} = 0,76.$$

$$\hat{a} = \frac{50(0-0,76)^2 + 30(1-0,76)^2 + 15(2-0,76)^2 + 4(3-0,76)^2 + 1(4-0,76)^2}{99} - 0,76$$

$$= 0,090909,$$

$$\hat{k} = \frac{0,76}{0,090909} = 8,36, \qquad \hat{Z} = \frac{1}{1+8,36} = 0,10684,$$

$$P = 0,10684(1) + (1-0,10684)(0,76) = 0,78564.$$

Seluruh perhitungan di atas adalah berdasarkan distribusi dari total klaim selama 2 tahun. Maka 0,78564 menyatakan ekspektasi dari banyaknya klaim untuk 2 tahun berikutnya. Untuk tahun ketiga, estimasi banyaknya klaim adalah $0,78564/2 = 0,39282 \approx 0,393$. Jawab: C.

29. Sebuah grup terdiri dari 100 orang. Untuk setiap individu pada grup ini, tingkat mortalitas $q_x = 0,01$. Mortalitas untuk setiap individu saling bebas (*independent*).

Anda akan melakukan simulasi pengalaman mortalitas selama 3 tahun untuk grup ini dengan menggunakan metode inversi. Dengan menggunakan 3(tiga) angka berikut dari distribusi seragam (*uniform*) pada [0,1) yaitu 0,12 ; 0,35; 0,68.
Tentukan banyaknya kematian dari hasil simulasi selama tiga tahun.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

Pembahasan: Distribusi dari soal ini adalah binomial dengan $m = 100$, $q = 0,01$.

$$p_0 = 0,99^{100} = 0,366$$
$$p_1 = 100\left(0,99^{99}\right)(0,01) = 0,370$$

Karena $0,366 + 0,370 = 0,736 > 0,68$ angka terbesar dari distribusi seragam yang diberikan. Maka 0,12 dan 0,35 akan menuju ke 0 dan 0,68 akan menuju ke 1. Sehingga, banyaknya kematian dari hasil simulasi selama tiga tahun adalah $0 + 0 + 1 = 1$.
Jawab: B.

30. X berdistribusi *inverse exponential* dengan $\theta = 50$.
Simulasikan X menggunakan *uniform random numbers* berikut pada [0,1) dan metode inversi:

0,4 0,6 0,9

Tentukan nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$

A. 57

B. 62

C. 67

D. 76

E. 84

Pembahasan:
Diketahui bahwa X berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta = 50$. CDF dari fungsi distribusi tersebut adalah $e^{-\frac{50}{x}}$.
Untuk $u = 0,4$, kita peroleh

$$e^{-\frac{50}{x}} = 0,4 \rightarrow x = \frac{-50}{\ln(0,4)} = 54,57$$

Untuk $u = 0,6$, kita peroleh

$$e^{-\frac{50}{x}} = 0,6 \rightarrow x = \frac{-50}{\ln(0,6)} = 97,88$$

Untuk $u = 0,9$, kita peroleh

$$e^{-\frac{50}{x}} = 0,9 \rightarrow x = \frac{-50}{\ln(0,9)} = 474,56$$

Nilai simulasi dari $E[X \wedge 100]$ adalah

$$\begin{aligned} E[X \wedge 100] &= \frac{1}{3}([54,57 \wedge 100] + [97,88 \wedge 100] + [474,56 \wedge 100]) \\ &= \frac{1}{3}(54,57 + 97,88 + 100) \\ &= 84,15 \approx 84 \end{aligned}$$

Jawab: E.

6 Periode November 2015

1. Sebuah data set klaim asuransi property (dalam juta rupiah) diberikan sebagai berikut:

$$200 \quad 300 \quad 100 \quad 400 \quad X$$

Diberikan informasi tambahan sebagai berikut :

- $k = 4$
- $S_2 = 1$
- $r_4 = 1$
- The Nelson-Aalen Estimate $\widehat{H(410)} > 2.15$

Tentukan X!

a. 500

b. 100

c. 80

d. 200

e. 120

Pembahasan

Klaim: 200, 300, 100, 400, X. Diberikan juga $k = 4$ yang berarti X adalah salah satu dari {200,300,100,400}; $s_2 = 1$ yang berarti $X \neq 200$; serta $r_4 = 1$ yang berarti $X \neq 400$.

Misal $X = 100$, maka

Klaim	s_i	r_i	H
100	2	5	$\frac{2}{5}$
200	1	3	$\frac{1}{3}$
300	1	2	$\frac{1}{2}$
400	1	1	1

Jumlah dari H adalah 2,23.

Jika $X = 300$, maka

Klaim	s_i	r_i	H
100	1	5	$\frac{1}{5}$
200	1	4	$\frac{1}{4}$
300	2	3	$\frac{2}{3}$
400	1	1	1

Jumlah dari H adalah 2,12.

Jadi, nilai H yang memenuhi kriteria adalah jika $X = 100$.

Jawab: B.

2. Berdasarkan pengalaman 10 tahun ke belakang, banyaknya klaim dari suatu pembayaran asuransi rawat inap di suatu rumah sakit seperti berikut :

$$10 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 4 \quad 2$$

Banyaknya klaim dari tahun ke tahun saling bebas (“independent”). Anda disarankan menggunakan metode “Maximum likelihood estimation” ke distribusi Poisson. Tentukan estimasi “coefficient of variation” dari estimator parameter Poisson!

a. 0,1601

b. 0,3213

c. 0,1452

d. 0,1921

e. 0,5124

Pembahasan

Diberikan:

Klaim	Frekuensi
0	1
2	3
4	3
5	1
6	1
10	1

$\mathbb{E}[X] = \lambda = \bar{X} = \frac{1}{10}(2 \times 3 + 4 \times 3 + 5 + 6 + 10) = 3,9$

$Var(X) = \lambda = 3,9$ dan $Var(\bar{X}) = \dfrac{n \cdot Var(X)}{n^2} = \dfrac{39}{10}$

Coefficient of Variation $= \dfrac{\sqrt{Var(\bar{X})}}{\mathbb{E}[X]} = \dfrac{\sqrt{\frac{39}{10}}}{3,9} = \dfrac{1}{\sqrt{39}} = 0,160128$

Jawab: A.

3. Dari sebuah studi dengan "truncated & censored", didapatkan data seperti berikut :

Waktu (t)	Banyaknya risiko pada waktu T	Banyaknya kegagalan pada waktu T
1	30	5
2	27	9
3	32	6
4	25	5
5	20	4

Peluang untuk gagal pada atau sebelum waktu t=4, diberikan kondisi "survive" melewati time t=1 ialah ${}_3q_1$. Hitung "Greenwood's approximation" dari variansi ${}_3\hat{q}_1$!

   a. 0,0067
   b. 0,0125
   c. 0,0823
   d. 0,0021
   e. 0,0232

Pembahasan

$${}_3\hat{p}_1 = \frac{18}{27} \cdot \frac{26}{32} \cdot \frac{20}{25} = \frac{13}{30}$$

$$GA = \left(\frac{13}{30}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{18(27)} + \frac{6}{26(32)} + \frac{5}{20(25)}\right) = 0,0067$$

Jawab: A.

4. Dari soal no.3, Hitung 95% "log-transformed" selang kepercayaan untuk $H(3)$, berdasarkan estimasi Nelson-Aalen!

   a. [0,221 ; 1,323]
   b. [0,493 ; 1,234]
   c. [0,443 ; 1,067]
   d. [0,123 ; 1,893]
   e. [0,144 ; 1,131]

Pembahasan

$$\hat{H}(3) = \frac{5}{30} + \frac{9}{27} + \frac{6}{32} = 0,6875$$

$$Var(\hat{H}(3)) = \frac{5}{30^2} + \frac{9}{27^2} + \frac{6}{32^2} = 0,02376$$

95% CI: $\left[0,6875 \cdot exp\left(-1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,02376}}{0,6875}\right); 0,6875 \cdot exp\left(1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,02376}}{0,6875}\right)\right] = [0,443; 1,067]$
Jawab: C.

5. Diberikan informasi sbb:

   (1) Banyaknya klaim tahunan pada suatu polis diketahui memiliki distribusi Geometri dengan parameter β
   (2) Distribusi "prior" diketahui mengikuti fungsi kepadatan Pareto: $\pi(\beta) = \frac{\alpha}{(\beta+1)^{\alpha+1}}, 0 < \beta < \infty$ dimana α adalah sebuah konstanta lebih dari dua.

   Sebuah polis yang dipilih secara acak mempunyai klaim sebanyak x di tahun pertama. Tentukan estimasi kredibilitas Buhlmann dari banyaknya klaim untuk polis tersebut di tahun kedua!

   a. $x\alpha$
   b. $x + 1$
   c. $(x^2 - 1)/\alpha$
   d. $(x - 1)/\alpha$
   e. $(x + 1)/\alpha$

   Pembahasan

   Kita ketahui bahwa frekuensi klaim berdistribusi Geometri dengan rata-rata β dan variansi $\beta(1+\beta)$. Lalu distribusi β adalah Pareto ($\alpha > 2, \theta = 1$). Maka:
   $\mu = \mathbb{E}[\beta] = \frac{1}{\alpha - 1}$
   $v = \mathbb{E}[\beta(1+\beta)] = \mathbb{E}[\beta] + \mathbb{E}[\beta^2] = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$
   $a = Var(\beta) = \frac{2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$
   $k = \frac{v}{a} = \alpha - 1$
   $z = \frac{1}{1+k} = \frac{1}{\alpha}$
   Estimasi $= \frac{1}{\alpha} \cdot x + (1 - \frac{1}{\alpha}) \cdot \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{x+1}{\alpha}$
   Jawab: E.

6. Diberikan informasi sebagai berikut:

   (1) Fungsi kepadatan peluang dari X :

$$f_X^{(x)} = \begin{cases} 0.02x, & 0 < x < 10 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

(2) Suatu asuransi mempunyai “ordinary deductible” sebesar 4 per kejadian

(3) Y^P adalah suatu variabel acak besar klaim per pembayaran

Hitung $\mathbb{E}[Y^P]$

a. 3,4272

b. 4,5741

c. 5,9232

d. 9,2124

e. 8,9281

Pembahasan

$f(x) = 0,02x, 0 < x < 10$

$F(x) = \int_0^x 0,02tdt = 0,01x^2$

$\mathbb{E}[Y^L] = \int_0^{10}(1 - 0,01y^2)dy - \int_0^4(1 - 0,01y^2)dy = 2,88$

$\mathbb{E}[Y^P] = \dfrac{\mathbb{E}[Y^L]}{S(4)} = \dfrac{2,88}{1 - 0,01(4)^2} = 3,4286$

Jawab: A.

7. *Soal dianulir*

8. Sebuah model kolektif untuk banyaknya risiko N , mempunyai distribusi Poisson (λ=70). Diberikan beberapa informasi sebagai berikut terkait X, besar kerugian (distribusi)

(i) $\mathbb{E}(X) = 70$

(ii) $\mathbb{E}(X \wedge 30) = 25$

(iii) $\mathbb{P}(X > 30) = 0.75$

(iv) $\mathbb{E}(X^2|X > 30) = 9.000$

Sebuah perlindungan asuransi yang melindungi besar kerugian secara “aggregate” mempunyai “deductible ordinary” sebesar 30 per kejadian. Hitung variansi dari pembayaran “aggregate” dari perlindungan asuransi tersebut!

a. 35.000

b. 25.500

c. 67.500

d. 55.000

e. 45.000

Pembahasan

Risiko hilang setelah dikurangi deductible mengikuti distribusi Poisson dengan tingkat $\lambda * = \lambda \cdot S(30) = 20(0,75) = 15$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-30)^2|X>30] &= \mathbb{E}[X^2 - 60X + 900|X>30] \\ &= \mathbb{E}[X^2|X>30] - 60 \cdot \mathbb{E}[X|X>30] - 900 \\ &= 9.000 - 60\left(\frac{70-25}{0,75}\right) - 900 \\ &= 4.500\end{aligned}$$

Variansi dari pembayaran aggregate $= 15(4.500) = 67.500$

Jawab: C.

9. Diberikan informasi sebagai berikut:

(1) Banyaknya klaim mengikuti sebuah distribusi negative binomial (r, β=3)

(2) Besar klaim mempunyai distribusi seperti table di bawah:

(3) Banyaknya klaim saling bebas dengan besar klaim

Besar Klaim	Peluang
1	0.4
10	0.4
100	0.2

Tentukan ekspektasi banyaknya klaim untuk jumlah “aggregate” kerugian sedemikian hingga berada 10% di dalam ekspektasi “aggregate” kerugian dengan peluang sebesar 95%!

a. 2.496
b. 2.823
c. 3.515
d. 4.265
e. 2.121

Pembahasan

Frekuensi dinotasikan dengan N.

$\mathbb{E}[N] = r\beta = 3r$

$Var(N) = r\beta(1+\beta) = 12r$

Besar klaim dinotasikan dengan S.

$\mathbb{E}[S] = 1(0,4) + 10(0,4) + 100(0,2) = 24,4$

$\mathbb{E}[S^2] = 1^2(0,4) + 10^2(0,4) + 100^2(0,2) = 2.040,4$

$Var(S) = \mathbb{E}[S^2] - (\mathbb{E}[S])^2 = 1.445,04$

Aggregate kerugian dinotasikan dengan L.

$\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[S] = 73,2r$

$$\begin{aligned} Var(L) &= \mathbb{E}[N] \cdot Var(S) + Var(N) \cdot (\mathbb{E}[S])^2 \\ &= 3r(1.445,04) + 12r(24,4)^2 \\ &= 11.479,44r \end{aligned}$$

95% CI: $Z_{0,95} = 1,96$

Jadi, toleransi $\lambda_0 = \left(\frac{1,96}{10\%}\right)^2 = 384,16$

$\frac{\lambda_0 \cdot Var(L)}{\mathbb{E}[L]^2} = \frac{384,16(11,479.44r)}{(73,2r)^2} = \frac{823,02}{r}$

Banyaknya klaim yang harus ada $= \frac{823,02}{r}(3r) = 2.469,06$

Jawab: A.

10. Diberikan informasi sebagai berikut:

(1) Klaim-klaim yang ada saling bebas dan identik yang mana bergantung pada distribusi Poission dengan rataan Θ

(2) Diketahui fungsi peluang kumulatif dari distribusi "prior" Θ: $F(\Theta) = 1 - \left[\frac{1}{1+\Theta}\right]^{2.6}, \Theta > 0$

Lima klaim telah diamati. Tentukan factor kredibilitas Buhlman untuk data tersebut!

a. 0.9521

b. 0.8321

c. 0.9312

d. 0.9123

e. 0.6141

Pembahasan

Klaim berdistribusi Poisson (Θ), sedangkan Θ berdistribusi Pareto $(1;2,6)$

$F(\theta) = 1 - (\frac{1}{1+\theta})^{2,6}$

$v = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{1}{2,6-1} = 0,625$

$a = Var(\Theta) = \frac{2}{1,6(0,6)} - 0,625^2 = 1,6927$

$k = \frac{v}{a} = \frac{0,625}{1,6927} = 0,3692$

$z = \frac{n}{n+k} = \frac{5}{5+0,3692} = 0,9312$

Jawab: C.

11. Rudi adalah agen yang bertipe menghindari risiko "risk averse" diketahui mempunyai kerugian yang mengikuti distribusi uniform pada interval $0 < X < 10$. Jika dia menginginkan untuk membayar premium sejumlah 2 (juta rupiah), maka perlindungan asuransi maksimal yang ia bisa peroleh membutuhkan "deductible" sebesar n (juta rupiah). Asumsikan tidak ada variable biaya dan komisi, Hitung n!

    a. 2,11

    b. 4,31

    c. 5,31

    d. 2,31

    e. 3,68

    Pembahasan

    Karena tidak ada variabel biaya dan komisi, maka premi sejumlah 2 juta rupiah tersebut merupakan *net premium*. Jadi, $Net\ Premium = E[L]$, tetapi tentu saja dengan batasan *deductible*. Oleh karena itu,

$$2 = \int_0^n S(t)dt \text{ dengan } F(t) = \frac{t}{10} \rightarrow S(t) = 1 - \frac{t}{10}$$

$$2 = n - \frac{n^2}{20}$$

$$\Rightarrow n = 2,254$$

12. Faktor kredibilitas parsial untuk sebuah peubah acak X yang berasal dari 100 observasi dari X, diketahui sebesar Z=0,40. Berapa banyak observasi yang harus ditambahkan untuk meningkatkan faktor kredibilitas parsial setidaknya sebesar 0,50?

    a. 55

    b. 56

    c. 57

    d. 58

    e. 59

    Pembahasan

    $0,4 = \sqrt{\frac{100}{n_F}}$ dan $0,5 = \sqrt{\frac{100+k}{n_F}}$

    Dari kedua persamaan ini, kita dapat memperoleh $k = 56,25 = 57$

    Jawab: C.

13. Total klaim selama periode S diketahui berdistribusi "Compound Poisson". Anda telah mengetahui bahwa sampel berukuran 2.670 ialah cukup besar untuk mendapatkan full kredibilitas untuk semua total klaim apabila distribusi dari besar klaimnya konstan. Jika kemudian distribusi dari besar klaim mengikuti distribusi log-normal dengan rataan = 1.000 dan variansi sebesar 1.500.000, hitung banyak klaim yang dibutuhkan untuk mendapatkan full kredibilitas dari total klaim untuk tiap periode!

    a. 2.325

    b. 2.635

    c. 6.675

    d. 6.655

    e. 2.345

    Pembahasan

    S berdistribusi Compound Poisson dengan $n = 2.670$ mendapatkan kredibilitas penuh. Sekarang, S berdistribusi $LN(\text{Rata-rata} = 1.000, \text{Var} = 1.500.000)$

    Misalkan Y menunjukkan distribusi dari severity yang mengikuti distribusi lognormal. Maka $Var(Y) = 0, 2.670 = n_0 \cdot \left(1 + \frac{Var(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}\right) = n_0$

    Maka, banyaknya klaim yang dibutuhkan untuk mendapatkan kredibilitas penuh dari total klaim adalah $n_0 \cdot \left[1 + \frac{Var(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}\right] = 2.670 \left(1 + \frac{1.500.000}{1.000^2}\right) = 6.675$

    Jawab: C.

14. N adalah distribusi dari banyak klaim yang terjadi tiap minggu. N mempunyai distribusi Poisson dengan rata-rata yang tidak diketahui. Standar untuk full kredibilitas dari N diketahui berdasarkan rataan sampel dari N yang berada dalam 5% dari rataan aktual/yang sebenarnya dari peubah acak N dengan peluang sebesar 90%. Diketahui 400 klaim terjadi dalam 20 minggu, premium kredibilitas dihitung berdasarkan factor kredibilitas partial ialah P. Diketahui 500 klaim terjadi dalam 30 minggu, premium kredibilitas dihitung berdasarkan factor kredibilitas ialah $P - 1,91$.

    Hitung premium kredibilitas (P) dari observasi klaim pada dua periode dan "manual premium" nya (M)! Petunjuk: asumsikan bahwa perhitungan premi kredibilitas menggunakan formula $Z \cdot \bar{N} + (1 - Z) \cdot M = P$, dimana $\bar{N}$= rataan sampel banyak klaim.

    a. P=18,04 & M=20,04

    b. P=12,04 & M=15,04

    c. P=18,04 & M=15,04

    d. P=20,04 & M=10,04

e. P=22,04 & M=10,04

Pembahasan

Untuk mendapatkan kredibilitas penuh dalam mengestimasi rata-rata dari N,

a) $1.082,4 \cdot \dfrac{Var(N)}{\mathbb{E}[N]^2} = 1.082,4 \cdot \dfrac{\lambda}{\lambda^2} = \dfrac{1.082,4}{\lambda}$ yaitu ekspektasi banyaknya minggu N yang dibutuhkan.

b) $1.082,4 \cdot \dfrac{Var(N)}{\mathbb{E}[N]^2} = 1.082,4 \cdot \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1.082,4$

Karena kita tidak mengetahui nilai dari λ, kita hanya dapat menggunakan dari poin kedua.

Dengan 400 klaim dalam 20 minggu, rata-rata banyaknya klaim per minggu adalah $\bar{N} = \dfrac{400}{20} = 20$. Maka kredibilitas parsialnya: $Z = \sqrt{\dfrac{400}{1.082,4}} = 0,6079$. Premi dengan kredibilitas parsial: $Z \cdot \bar{N} + (1-Z) \cdot M = 12,16 + 0,3921M = P$ dengan M adalah premi dasarnya.

Dengan 500 klaim dalam 30 minggu, rata-rata banyaknya klaim per minggu adalah $\bar{N} = \frac{500}{30} = 16,6667$. Maka kredibilitas parsialnya: $Z = \sqrt{\frac{500}{1.082,4}} = 0,6797$. Premi dengan kredibilitas parsial: $Z \cdot \bar{N} + (1-Z) \cdot M = 11,33 + 0,3203M = P - 1,91$ dengan M adalah premi dasarnya.

Jadi, kita dapat peroleh $M = 15,04$ dan $P = 18,04$.

Jawab: C.

15. Selanjutnya berdasarkan informasi di soal 14, apabila kemudian hari diketahui terjadi 500 klaim dalam 35 minggu. Hitung premium kredibilitas dari observasi ini dengan mengasumsikan bahwa “manual premium” ialah sama untuk semua kasus !

a. 15,52

b. 12,52

c. 12,55

d. 18,55

e. 20,55

Pembahasan

$\bar{N} = \dfrac{550}{35} = 15,7143$

$Z = \sqrt{\dfrac{550}{1.082,4}} = 0,7128$

Preminya $= Z \cdot \bar{N} + (1-Z) \cdot M = 11,2 + 0,2872(15,04) = 15,52$

Jawab: A.

16. Diketahui informasi sebagai berikut:

    (1) Banyaknya klaim mengikuti distribusi Poisson

    (2) Besar klaim mempunyai distribusi Pareto dengan θ=0,5 and α=6

    (3) Dua peubah acak di atas saling bebas

    (4) “The observed pure premium” harus berkisar sebesar 2% dari eskpetasi premi murni dengan peluang sebesar 90%

    Hitung ekspetasi banyak klaim yang dibutuhkan untuk mencapai full kredibilitas?.

    a. Kurang dari 7 ribu
    b. Lebih dari atau sama dengan 7 ribu, akan tetapi kurang dari 10 ribu
    c. Lebih dari atau sama dengan 10 ribu, akan tetapi kurang dari 13 ribu
    d. Lebih dari atau sama dengan 13 ribu, akan tetapi kurang dari 16 ribu
    e. Lebih dari atau sama dengan 16 ribu

    Pembahasan

    Jika X adalah variabel acak dari besarnya klaim, maka ekspektasi banyaknya klaim dari kredibilitas penuh adalah:

    $$\left(\frac{1,645}{0,02}\right)^2\left(1+\frac{Var(X)}{\mathbb{E}[X]^2}\right)$$

    Untuk distribusi Pareto, $\mathbb{E}[X]=\dfrac{0.5}{5}=0,1$ dan $Var(X)=\dfrac{2(0,5)^2}{5(4)}-0,1^2=0,015$

    Jadi, ekspektasi banyaknya klaim adalah:

    $\left(\frac{1,645}{0,02}\right)^2\left(1+\frac{0,015}{0,1^2}\right)=16.913$ klaim

    Jawab: E.

17. Observasi dari sebuah eksperimen tunggal mempunyai distribusi:

    $$\mathbb{P}(D=d|G=g)=g^{1-d}(1-g)^d,\quad d=0,1$$

    Distribusi “prior” dari G, diketahui :

    $$\mathbb{P}\left(G=\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}\text{ and }\mathbb{P}\left(G=\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{5}$$

    Hitung $\mathbb{P}(G=1/3|D=0)$!

    a. 0,105
    b. 0,157

c. 0,333

d. 0,473

e. 0,526

Pembahasan

Kita dapat langsung mencari:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[G=\tfrac{1}{3}|D=0] &= \frac{\mathbb{P}[G=\frac{1}{3},D=0]}{\mathbb{P}[D=0]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[D=0|G=\frac{1}{3}]\cdot\mathbb{P}[G=\frac{1}{3}]}{\mathbb{P}[D=0|G=\frac{1}{3}]\cdot\mathbb{P}[G=\frac{1}{3}+\mathbb{P}[D=0|G=\frac{1}{5}]\cdot\mathbb{P}[G=\frac{1}{5}} \\
&= \frac{10}{10+9} \\
&= 0{,}526316
\end{aligned}$$

Jawab: E.

18. Sebuah model untuk banyaknya klaim dalam satu tahun pengamatan untuk sebuah portofolio asuransi kesehatan diketahui mempunyai karakteristik seperti berikut:

    1) Separuh dari portofolio yang ada memiliki frekuensi tahunan yang diketahui mengikuti distribusi Poisson dengan rataan 2

    2) Separuh sisanya, memiliki frekuensi tahunan yang diketahui mempunyai distribusi yang sama akan tetapi denga rataan 4

    3) Banyaknya klaim tahunan diketahui saling bebas dari satu tahun ke tahun selanjutnya bergantung kepada kondisi bahwa rattan Poisson telah diketahui.

    Sebuah polis yang dipilih secara acak dari portofolio diatas diketahui mempunyai banyak klaim sebesar 2. Hitung rataan bersyarat dari frekuensi banyak klaim tahunan di tahun kedua berasal dari polis yang sama?

    a. 2,1

    b. 2,7

    c. 4,7

    d. 5,7

    e. 2,5

    Pembahasan

    Rataan untuk masing-masing kelas:

$$\mu(1)=2$$

$$\mu(2)=4$$

Jika terdapat 2 klaim dalam satu tahun, maka peluang masing-masing risiko terdapat dua klaim:

$$\mathbb{P}(2 \text{ klaim}|\text{risiko } 1) = \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!} = 0,27067$$

$$\mathbb{P}(2 \text{ klaim}|\text{risiko } 1) = \frac{e^{-4} \cdot 2^4}{2!} = 0,146525$$

Maka peluang posteriornya masing-masing adalah:

$$\mathbb{P}(\text{risiko } 1|2 \text{ klaim}) = \frac{0.5(0,27067)}{0.5(0,27067) + 0,5(0,146525)} = 0,6488$$

$$\mathbb{P}(\text{risiko } 2|2 \text{ klaim}) = \frac{0.5(0,146525)}{0.5(0,27067) + 0,5(0,146525)} = 0,3512$$

Maka rataan bersyarat dari frekuensi banyak klaim tahunan di tahun kedua berasal dari polis yang sama:

$$2(0,6488) + 4(0,3512) = 2,7$$

Jawab: B.

19. Sebuah portofolio perlindungan asuransi kendaraan bermotor diketahui terdiri dari tiga polis yang mempunyai distribusi yang berbeda sebagai berikut :

Tipe polis	Standar	Premier	Platinum
Distribusi besar klaim	Eksponensial	Eksponensial	Eksponensial
Rataan	2	4	8

Setengah dari portolio bertipe standar, seperempat bertipe premier, dan sisanya bertipe Platinum. Misalkan besar klaim ialah peubah acak X, dan diambil sebuah polis secara acak. Hitung $\mathbb{E}[X]$!

a. 4

b. 6

c. 8

d. 10

e. 12

Pembahasan

$$X = \begin{cases} \text{Standar berdistribusi } Exp(2), & \text{dengan peluang sebesar } 0,5 \\ \text{Premier berdistribusi } Exp(4), & \text{dengan peluang sebesar } 0,25 \\ \text{Platinum berdistribusi } Exp(8), & \text{dengan peluang sebesar } 0,25 \end{cases}$$

$\mathbb{E}[X] = 2(0,5) + 4(0,25) + 8(0,25) = 4$

Jawab: A.

20. Berdasarkan informasi pada soal no.19, hitung variansi dari X!

    a. 28

    b. 26

    c. 24

    d. 22

    e. 20

    Pembahasan

    Rata-rata dari distribusi eksponensial adalah $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ dengan

$$\lambda = \begin{cases} \text{Standar berdistribusi } Exp(\lambda = \frac{1}{2}) \\ \text{Premier berdistribusi } Exp(\lambda = \frac{1}{4}) \\ \text{Platinum berdistribusi } Exp(\lambda = \frac{1}{8}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \frac{2}{(\frac{1}{2})^2}(0,5) + \frac{2}{(\frac{1}{4})^2}(0,25) + \frac{2}{(\frac{1}{8})^2}(0,25) \\ &= 44 \end{aligned}$$

    Maka, $Var(X) = 44 - 4^2 = 28$

    Jawab: A.

21. Diketahui informasi sebagai berikut:

    (1) Sebuah portofolio dengan risiko saling bebas terbagi menjadi 2 karakteristik, yaitu nasabah kartu standar dan nasabah prioritas

    (2) Terdapat dua kali lebih banyak risiko di kelas standar daripada nasabah prioritas

    (3) Peubah acak banyak klaim untuk setiap nasabah pada satu tahun diketahui mengikuti sebuah distribusi Bernoulli

    (4) Distribusi dari besar klaim mempunyai informasi sebagai berikut:

Besar Klaim	Nasabah Kartu Standar	Nasabah Kartu Prioritas
50.000	0,6	0,36
100.000	0,4	0,64

    (5) Ekspetasi banyak klaim untuk nasabah kartu standar ialah 0,22 dan 0,11 untuk nasabah kartu prioritas

Satu orang nasabah dipilih secara acak, dan diketahui gabungan klaim orang tersebut selama dua tahun ialah sebesar 100.000. Hitung peluang bahwa orang tersebut berasal dari kartu standar!

a. 0,524

b. 0,232

c. 0,709

d. 0,801

e. 0,909

Pembahasan

Notasikan S sebagai Standar dan P sebagai Prioritas, sehingga $\mathbb{P}[S] = 2 \cdot \mathbb{P}[P]$. Terlebih dahulu kita cari:

$\mathbb{P}[100.000|S] = 0,22^2 \cdot 0,6^2 + 2(0,22 \cdot 0,78 \cdot 0,4) = 0,154704$

$\mathbb{P}[100.000|P] = 0,11^2 \cdot 0,36^2 + 2(0,11 \cdot 0,89 \cdot 0,64) = 0,12688$

$$\mathbb{P}[S|100.000] = \frac{\mathbb{P}[100.000|S] \cdot \mathbb{P}[S]}{\mathbb{P}[100.000|S] \cdot \mathbb{P}[S] + \mathbb{P}[100.000|P] \cdot \mathbb{P}[P]} = 0,71$$

Jawab: C.

22. Di kabupaten Ngadirejo banyaknya penyakit infeksi pernapasan dan individu yang terinfeksi dalam satu tahun diketahui mengikuti distribusi Poisson yang mana diketahui berbeda bergantung pada umur dan kebiasaan merokok. Proporsi dari populasi dan rataan banyaknya penyakit infeksi pernapasan diketahui mengikuti distribusi berikut ini:

	Persentase Jumlah Penduduk	Rataan Banyaknya Penyakit Pernafasan
Anak-anak	0,3	3
Dewasa Bukan Perokok	0,6	1
Dewasa Perokok	0,1	4

Hitung peluang bahwa seorang bernama Ngamidun yang perokok aktif menderita penyakit pernafasan sebanyak 3 kali dalam setahun!

a. 0,112

b. 0,823

c. 0,982

d. 0,328

e. 0,158

Pembahasan

Kita notasikan anak sebagai A, orang dewasa bukan perokok sebagai B, dan orang dewasa yang perokok aktif sebagai C.

$\mathbb{P}[N = 3|A] \cdot \mathbb{P}[A] = \dfrac{3^3 \cdot e^{-3}}{3!}(0,3) = 0,067$

$\mathbb{P}[N = 3|B] \cdot \mathbb{P}[B] = \dfrac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!}(0,6) = 0,037$

$\mathbb{P}[N = 3|C] \cdot \mathbb{P}[C] = \dfrac{4^3 \cdot e^{-4}}{3!}(0,1) = 0,02$

Jadi, $\mathbb{P}[C|N = 3] = \dfrac{0,02}{0,067 + 0,037 + 0,02} = 0,158$

Jawab: E.

23. Sebuah portofolio asuransi kesehatan grup di bank perkreditan rakyat - Ngadirejo Maju terbagi ke dalam tiga karakteristik dengan informasi sbb:

	Pedagang Sayur	Petani Buah	Nelayan Laut
Banyak klaim tahunan	Poisson	Poisson	Poisson
Rataan	1	2	3
Proporsi nasabah	50%	30%	20%

Sebuah risiko dipilih secara acak dari portofolio ini dan diketahui yang bersangkutan mempunyai 2 klaim di tahun tersebut. Hitung peluang bahwa yang bersangkutan akan mempunyai 2 klaim di tahun berikutnya!

a. 0,15

b. 0,21

c. 0,54

d. 0,33

e. 0,65

Pembahasan

Kita notasikan pedagang sayur sebagai S, petani buah sebagai B, dan nelayan laut sebagai L.

$\mathbb{P}[2|S] \cdot \mathbb{P}[S] = e^{-1} \cdot \dfrac{1^2}{2!}(0,5) = 0,09197$

$\mathbb{P}[2|B] \cdot \mathbb{P}[B] = e^{-2} \cdot \dfrac{2^2}{2!}(0,3) = 0,0812$

$\mathbb{P}[2|L] \cdot \mathbb{P}[L] = e^{-3} \cdot \dfrac{3^2}{2!}(0,2) = 0,0448$

Maka, jumlahnya adalah 0,21797.

Jawab: B.

24. Masih di kota yang sama, Ngadirejo, perusahaan asuransi Ngadirejo berdikari mencatat bahwa dua karakteristik perlindungan risikonya mempunyai statistik sebagai berikut:

Kelas A

Banyak Klaim	Peluang		Besar Klaim	Peluang
0	4/9		500	1/3
1	4/9		1235	2/3
2	1/9			

Kelas B

Banyak Klaim	Peluang		Besar Klaim	Peluang
0	1/9		250	2/3
1	4/9		328	1/3
2	4/9			

Risiko yang ada secara sama akan termasuk pada kelas A atau B. Banyak klaim dan besar klaim ialah saling bebas. Variansi dari total kerugian ialah 296.962. Sebuah risiko yang dipilih secara acak mempunyai total kerugian sebesar 500. Tentukan Premi Bayesian untuk tahun berikutnya untuk risiko ini! (pembulatan atau nominal terdekat)

a. 493
b. 551
c. 985
d. 742
e. 342

Pembahasan

Karena hanya terpilih satu buah risiko, maka $\bar{X} = X = 500$. Lalu, Buhlmann credibility premium adalah $Z \cdot \bar{X} + (1 - Z)\mu$. Lalu, $Z = \frac{n}{n+k} = \frac{1}{1+\frac{v}{a}}$ dan $v = \mathbb{E}[v(\Theta)], a = Var[\mu(\Theta)]$. Θ merupakan kelasnya, antara A atau B.

Kita dapat menghitung $\mu(A) = \mathbb{E}[X|A] = 660$ dan $\mu(B) = 368$ sehingga $\mu = \mathbb{E}[\mu(\Theta)] = 660 \cdot \frac{1}{2} + 368 \cdot \frac{1}{2} = 514$.

$$a = Var[\mu(\Theta)] = \mathbb{E}[(\mu(\Theta))^2] - (\mathbb{E}[\mu(\Theta)])^2 = 660^2 \cdot \frac{1}{2} + 368^2 \cdot \frac{1}{2} - 514^2 = 21.316$$

Kita dapat mencari $v(A) = Var[X|A]$ dan $v(B) = Var[X|B]$ dengan menggunakan rumus $Var(X) = Var[\mu(\Theta)] + \mathbb{E}[v(\Theta)]$ karena kita diberikan nilai $Var(X) = 296.962$, sehingga $v = \mathbb{E}[v(\Theta)] = Var(X) - Var[\mu(\Theta)] = 296.962 - 21.316 = 275.646$.

Maka $Z = \dfrac{1}{1 + \frac{275.646}{21.316}} = 0,0718$. Premi Bulmann nya adalah: $0,0718(500) + 0,9282(514) = 513$.

Jawab:

25. Lagi – lagi di kota yang sama, Ngadirejo, bupati kota tersebut mendapatkan informasi dari asistennya yang merupakan seorang aktuaris, bahwa tiga perusahaan asuransi umum di kota tersebut mempunyai catatan banyak klaim, X sbb:

Asuransi	Banyak Nasabah	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$
Berdikari	3.000	1/3	1/3	1/3	0	0
Pelopor	2.000	0	1/6	2/3	1/6	0
Quantum	1.000	0	0	1/6	2/3	1/6

Bupati ingin mengetahui, apabila dipilih secara acak satu nasabah, nasabah tersebut mempunyai satu klaim pada tahun 1. Berapa ekspektasi banyak klaim untuk nasabah tersebut pada tahun berikutnya?

a. 2,5
b. 1
c. 2,25
d. 1,65
e. 1,25

Pembahasan

Kita notasikan Berdikari sebagai B, Pelopor sebagai P, dan Quantum sebagai Q. Maka peluang priornya $\mathbb{P}(B) = \frac{3.000}{3.000+2.000+1.000} = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(P) = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(Q) = \frac{1}{6}$.

Dengan menggunakan peluang Bayes, kita peroleh:

$\mathbb{P}[B|N = 1] = \dfrac{\mathbb{P}(N = 1|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(N = 1|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(N = 1|P) \cdot \mathbb{P}(P) + \mathbb{P}(N = 1|Q) \cdot \mathbb{P}(Q)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0} = \dfrac{3}{4}$

Memakai cara yang sama, kita juga peroleh:

$$\mathbb{P}[P|N = 1] = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}[Q|N = 1] = \frac{\frac{1}{6} \cdot 0}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 0} = 0$$

Dengan peluang prior adalah $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, dan $\frac{1}{6}$. Maka:

$$\mu(1) = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{3}(2) = 1$$

$$\mu(2) = \frac{1}{6}(1) + \frac{2}{3}(2) + \frac{1}{6}(3) = 2$$

Jadi, $\mathbb{E}[X_2|1] = \frac{3}{4}(1) + \frac{1}{4}(2) = 1,25$

Jawab: E.

26. Dari statistik perusahaan Ngadirejo Pelopor, banyaknya klaim tahunan untuk satu pemegang polis diketahui berdistribusi Poisson dengan rataan Γ. Diketahui distribusi dari Γ ialah gamma dengan fungsi kepadatan peluang sbb:

$$f(\lambda) = \frac{(2\lambda)^5 e^{-2\lambda}}{24\lambda}, \quad \lambda > 0$$

Seorang pemegang polis dipilih secara acak dan diketahui mempunyai banyak klaim sebesar 5 pada tahun pertama dan 3 klaim pada tahun 3. Hitung ekspektasi total kerugian dari pemegang polis tersebut!

a. 12,5
b. 5
c. 7,25
d. 5,65
e. 3,25

Pembahasan

$f(\lambda|5,3) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^5}{5!} \cdot \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^3}{3!} \cdot \dfrac{(2\lambda)^5 \cdot e^{-2\lambda}}{24\lambda} = \dfrac{2^5}{5! \cdot 3! \cdot 24}\lambda^{13}e^{-4\lambda}$

Maka distribusi Gamma tersebut memiliki parameter 13 dan 0,25.

Jadi, ekspektasi total kerugian adalah $13(0,25) = 3,25$

Jawab: E.

27. Sedangkan di perusahaan asuransi Ngadirejo Quantum, diketahui bahwa peluang untuk satu nasabah asuransi kesehatannya memiliki satu klaim diketahui sebesar θ. Distribusi prior dari θ mempunyai kepadatan peluang sbb:

$$\pi(\theta) = \frac{3}{2}\sqrt{\theta}, \quad 0 < \theta < 1$$

Seorang pemegang polis diketahui tepat mempunyai satu klaim pada tahun tersebut. Tentukan peluang "posterior" untuk kondisi dimana θ lebih besar dari 0,60!

a. 0,72
b. 0,55
c. 0,25
d. 0,65
e. 0,8

Pembahasan

$\pi(\theta|1) = \theta(1,5\theta^{0,5}) = 1,5\theta^{1,5}$

Maka, $\int_0^1 \theta^{1,5} d\theta = 0,4$

$\pi(\theta|1) = 2,5\theta^{1,5}$

$\mathbb{P}(\theta > 0,6|1) = \int_{0,6}^1 2,5\theta^{1,5} d\theta = 0,721$

Jawab: A.

28. *Soal dianulir*

29. Bupati Ngadirejo, sedang menyeleksi perusahaan asuransi umum baru yang akan masuk. Sesuai Perda tahun 2015, asuransi umum diijinkan beroperasi apabila variansi dari "conditional mean" tidak lebih dari 5.000. Diketahui perusahaan asuransi baru ini, bernama "terbatas" mempunyai catatan pengalaman besar risiko X dengan fungsi kepadatan peluang:

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad 0 < x < \infty, \lambda > 0$$

Distribusi prior dari λ diasumsikan mengikuti suatu distribusi dengan rataan 50 dan fungsi kepadatan peluang:

$$g(\lambda) = \frac{500.000}{\lambda^4} e^{-\frac{100}{\lambda}}, \quad 0 < \lambda < \infty$$

Anda sebagai asisten bagian aktuaria dari bupati tersebut diminta melakukan analisis terhadap variansi dari "conditional mean". Apa rekomendasi anda?

a. Mengembalikan proposal karena nilai variansi tidak bisa dihitung
b. Menolak proposal karena nilai variansi > 5.000
c. Menimbang proposal karena nilai variansi tepat 5.000
d. Menerima proposal karena nilai variansi > 2.000 akan tetapi kurang dari 5.000
e. Menerima proposal karena nilai variansi < 2.000

Pembahasan

Jika kita diberikan λ, ekspektasi klaim adalah rata-rata dari distribusi eksponensial sebesar λ. Variansi dari λ adalah $\mathbb{E}[\lambda^2] - (\mathbb{E}[\lambda])^2$. Lalu diberikan distribusi dari $g(\lambda)$ yang merupakan inverse gamma dengan parameter $\theta = 100$ dan $\alpha = 3$, kita dapat peroleh:

$$\mathbb{E}[\lambda] = \frac{100 \cdot \Gamma(3-1)}{\Gamma(3)} = \frac{100(1!)}{2!} = 50$$

$$\mathbb{E}[\lambda^2] = \frac{100^2 \cdot \Gamma(3-2)}{\Gamma(3)} = \frac{100^2(0!)}{2!} = 5.000$$

Maka, variansi dari "conditional mean" nya adalah: $5.000 - 50^2 = 2.500$.

Jadi, kita akan menerima proposal karena nilai variansi lebih dari 2.000 akan tetapi kurang dari 5.000.

Jawab: D.

30. Dari soal no.29, setelah mengetahui hasil rekomendasi dari analisnya, bupati juga ingin mengetahui rataan dan variansi dari distribusi marginal peubah acak X yang mana akan menjadi pedoman dalam menentukan batas modal minimum. Hitung rataan dan variansi yang diminta oleh bupati!

    a. Rataan = 50 dan Variansi = 7.500
    b. Rataan = 30 dan Variansi = 4.500
    c. Rataan = 20 dan Variansi = 5.500
    d. Rataan = 65 dan Variansi = 2.500
    e. Rataan = 30 dan Variansi = 1.500

    Pembahasan

    $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\lambda]] = \mathbb{E}[\lambda] = 50$

    $Var(X) = Var(\mathbb{E}[X|\lambda]) + \mathbb{E}[Var(X|\lambda)] = Var(\lambda) + \mathbb{E}[\lambda^2] = 2.500 + 5.000 = 7.500$

    Jawab: A.

7 Periode Juni 2015

1. Sebuah distribusi Gamma memiliki rata-rata/ ("*mean*")$=8$ dan *skewness* $=1$. Hitung Variansinya?

   a. 12

   b. 16

   c. 61

   d. 8

   Pembahasan:
   Misalkan μ'_k menyatakan *raw moment* ke-k, dan μ_k menyatakan *central moment* ke-k dari suatu distribusi.
   Untuk distribusi Gamma dengan parameter α dan θ, kita peroleh:

$$\begin{aligned}\mu &= \bar{X} = \mu'_1 = \alpha\theta \\ \mu'_2 &= \alpha^2\theta^2 - \alpha\theta^2 \\ \mu'_3 &= (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha)\theta^3 \\ \mu_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^3 = 2\alpha\theta^3\end{aligned}$$

$$\text{skewness} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\alpha\theta^3}{(\sigma^{3/2})^2} = 1 \rightarrow \alpha = 4$$

   Diketahui pula bahwa $\mu = \alpha\theta = 8$, dengan demikian kita dapatkan $\theta = 2$
   Varians $= \sigma^2 = \alpha\theta^2 = 4(2)^2 = 16$

   Jawab: B.

   Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 2-5
   Data berikut merupakan waktu meninggal yang sudah di sensor dari kanan /"*right censoring*" (+) untuk 25 orang
   2,3,3,3+,4,4,4,4,4+,5+,6,6,7,7,7,7+,7+,8,9,10,12+,13,13,14,16 merupakan sampel acak dari waktu sampai meninggal $\sim T$

2. Hitung $S_{25}(11) - \hat{S}(11)$ menggunakan Estimasi Kaplan Meier-Nelson Aalen!

   a. -0,032

b. 0,032

c. 0

d. -0,32

Pembahasan:
Untuk menjawab pertanyaan nomor 2 sampai dengan 4, kita akan menggunakan tabel di bawah ini

j	$[y_j, y_{j+1})$	r_j	s_j	$r_j - s_j$
1	[0,2)	25	0	25
2	[2,3)	25	1	25
3	[3,4)	24	2	22
4	[4,6)	21	4	17
5	[6,7)	15	2	13
6	[7,8)	13	3	10
7	[8,9)	8	1	7
8	[9,10)	7	1	6
9	[10,13)	6	1	5
10	[13,14)	4	2	2
11	[14,16)	2	1	1
12	[16,∞)	1	1	0

Estimasi Kaplan Meier untuk $S_{25}(11)$ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S_{25}(11) = \prod_{j=1}^{9} \frac{r_j - s_j}{r_j} &= 1\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{22}{24}\right)\left(\frac{17}{21}\right)\left(\frac{13}{15}\right)\left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \\ &= 0,2968253968 \end{aligned}$$

Estimasi Nelson Aalen untuk $\hat{S}(11)$ diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \hat{H}(11) &= \sum_{j=1}^{9} \frac{s_j}{r_j} = \frac{1}{25} + \frac{2}{24} + \frac{4}{21} + \frac{2}{15} + \frac{3}{13} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{8677}{7800} \\ \hat{S}(11) &= e^{-H(11)} = e^{-\frac{8677}{7800}} = 0,3287571662 \end{aligned}$$

Dengan demikian kita peroleh

$$S_{25}(11) - \hat{S}(11) = 0,2968253968 - 0,3287571662 = -0,03193 \approx -0,032$$

Jawab: A.

3. Hitung Estimasi "*product limit*" dari $P[4 \leq T \leq 8]$!

   a. 0,3444

   b. 0,4644

   c. 0,0452

   d. 0,6442

   Pembahasan:

$$
\begin{aligned}
P[4 \leq T \leq 8] &= P[T < 8] - P[T < 4] \\
&= (1 - P[T \geq 8]) - (1 - P[T \geq 4]) \\
&= P[T \geq 4] - P[T \geq 8] \\
&= \left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{22}{24}\right) - \left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{22}{24}\right)\left(\frac{17}{21}\right)\left(\frac{13}{15}\right)\left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{7}{8}\right) \\
&= 0,4644
\end{aligned}
$$

   Jawab: B

4. Hitung Estimasi "*product limit*" untuk probabilitas terkondisi $P[T > 8|T > 4]$!

   a. 0,5125

   b. 0,8553

   c. 0,5835

   d. 0,5385

   Pembahasan:
   $P[T > 8|T > 4]$ dapat diestimasi dengan

$$
\frac{S_{25}(8)}{S_{25}(4)} = \frac{r_5 - s_5}{r_5} \times \frac{r_6 - s_6}{r_6} \times \frac{r_7 - s_7}{r_7} = \left(\frac{13}{15}\right)\left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{7}{8}\right) = 0,5835
$$

   Jawab: C.

5. Anggap bahwa data terakhir di waktu ke-16 adalah sensor bukan meninggal. Hitung $S_{25}(20)$ dengan "*geometric extension approximation*"!

   a. 0,29

   b. 0,39

c. 0,093

d. 0,039

Pembahasan:
Dengan mengasumsikan bahwa data terakhir di waktu ke-16 adalah sensor bukan meninggal, maka kita akan merevisi tabel pada nomor 2 menjadi seperti berikut:

j	$[y_j, y_{j+1})$	r_j	s_j	$r_j - s_j$
1	[0,2)	25	0	25
2	[2,3)	25	1	24
3	[3,4)	24	2	22
4	[4,6)	21	4	17
5	[6,7)	15	2	13
6	[7,8)	13	3	10
7	[8,9)	8	1	7
8	[9,10)	7	1	6
9	[10,13)	6	1	5
10	[13,14)	4	2	2
11	[14,∞)	2	1	1

$$\begin{aligned} S_{25}(14) &= \prod_{j=1}^{11} \frac{r_j - s_j}{r_j} = 1\left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{22}{24}\right)\left(\frac{17}{21}\right)\left(\frac{13}{15}\right)\left(\frac{10}{13}\right)\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{187}{2520} \\ S_{25}(20) &= e^{\frac{20}{16}\ln(S_{25}(14))} = e^{\frac{20}{16}\ln(\frac{187}{2520})} = 0,03873 \approx 0,039 \end{aligned}$$

Jawab : D

6. Suatu kumpulan risiko mengikuti distribusi eksponensial dengan rataan ("*mean*") 1.000. Terdapat deduktibel sebesar 500. Tentukan besar deduktibel yang harus ditingkatkan untuk meningkatkan *"the loss elimination ratio"* sebesar dua kali lipat!

   a. 1546

   b. 1841

   c. 1232

   d. 1989

Pembahasan:

$$E[X] = \int_0^\infty S(x)dx = 1000$$

$$E[X \wedge 500] = \int_0^{500} S(x)dx = \int_0^{500} e^{-\frac{x}{1000}}dx = -1000\left(e^{-\frac{500}{1000}} - 1\right) = 393,46934$$

$$\textit{Loss Elimination Ratio} = \frac{E[X \wedge 500]}{E[X]} = \frac{393,46934}{1000} = 0,39346934$$

Jika *loss elimination ratio* ditingkatkan sebesar 2 kali lipat, maka nilainya adalah 0,78693868. Dengan demikian, kita dapatkan $E[X \wedge d] = 786,93868$.

$$-1000\left(e^{-\frac{d}{1000}} - 1\right) = 786,93868$$

Dengan menyelesaikan persamaan di atas, kita dapatkan nilai d adalah sebesar

$$1000(-\ln(0,2130613194)) = 1546,1753 \approx 1546$$

Jawab : A

7. Suatu kumpulan risiko memiliki rataan ("*mean*") 2.000. Dengan deduktibel 1.000, "*the loss elimination ratio*" ialah 0,3. Peluang bahwa suatu risiko lebih besar dari 1,000 ialah 0,4. Tentukan rataan besar suatu risiko apabila diberikan suatu risiko dengan besar lebih kecil atau sama dengan 1.000!

   a. 2.250

   b. 333

   c. 1.250

   d. 233

Pembahasan:
Rataan besar suatu risiko dengan syarat bahwa risiko lebih kecil atau sama dengan 1000 adalah

$$\frac{\int_0^{1000} xf(x)dx}{F(1000)} = \frac{E[X \wedge 1000] - 1000(1 - F(1000))}{F(1000)} = \frac{E[X \wedge 1000] - 400}{0,6}$$

Dari *loss elimination ratio*, kita peroleh

$$\frac{E[X \wedge 1000]}{E[X]} = \frac{E[X \wedge 1000]}{2000} = 0,3 \rightarrow E[X \wedge 1000] = 600$$

Jadi nilai rataan besar suatu risiko apabila diberikan suatu risiko dengan besar lebih kecil atau sama dengan 1000 adalah

$$\frac{E[X \wedge 1000] - 400}{0,6} = \frac{600 - 400}{0,6} = \frac{200}{0,6} = 333$$

Jawab : B

8. Suatu portofolio klaim memliki fungsi distribusi kumulatif $F(x) = (\frac{x}{100})^2$. Suatu asuransi akan membayar 80% dari jumlah kerugian klaim tersebut apabila nilai klaim lebih dari standar deduktibel ("*ordinary deductible*") sebesar 20. Maksimum nilai pembayaran ialah 60 per klaim.
Tentukan nilai ekspetasi dari pembayaran kerugian tersebut, apabila suatu pembayaran telah dibayarkan!
Hint : suatu klaim/kerugian dibayarkan apabila nilai pembayaran klaim tsb lebih dari deduktibel

   a. 21,17

   b. 23,81

   c. 38,91

   d. 39,31

Pembahasan:
Diberikan $F(x) = \left(\frac{x}{100}\right)^2$, maka kita peroleh $S(x) = 1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2$

$$E[X \wedge d] = \int_0^d S(x)dx = \int_0^d 1 - \left(\frac{x}{100}\right)^2 dx = d - \left(\frac{d^3}{30000}\right)$$

Berdasarkan informasi pada soal, kita juga dapatkan nilai *deductible* $d = 20$, maksimum pembayaran 60, dan *coinsurance* $\alpha = 0,8$. Selanjutnya, kita akan mencari nilai maksimum m yang memuat *deductible*.

$$60 = \alpha(m - d) = 0,8(m - 20) \rightarrow m = 95$$

Kita peroleh nilai m adalah sebesar 95.

$$E[X \wedge m] = E[X \wedge 95] = 95 - \frac{95^3}{30.000} = 66,42083$$

$$E[X \wedge d] = E[X \wedge 20] = 20 - \frac{20^3}{30.000} = 19,73333$$

Berikutnya kita akan menghitung nilai ekspektasi dari kerugian, yaitu $E[Y^L]$, serta nilai ekspektasi dari pembayaran kerugian tersebut, yaitu $E[Y^P]$.

$$E[Y \wedge L] = \alpha(E[X \wedge m] - E[X \wedge d]) = 0,8(66,42083 - 19,73333) = 37,35$$

$$E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{S(d)} = \frac{E[Y^L]}{S(20)} = \frac{37,35}{0,96} = 38,91$$

Jadi, nilai ekspektasi dari pembayaran kerugian tersebut, apabila suatu pembayaran telah dibayarkan adalah sebesar 38,91
Jawab : C

9. Seorang analisis dimintakan bantuan untuk menganalisis pola perilaku warga kota dalam mengkonsumsi rokok. Dinas perkotaan ABC memberikan informasi seperti tabel di bawah ini yang berupa distribusi dari banyaknya batang rokok yang dikonsumsi selama satu hari kerja :

	Pria	**Wanita**
Rataan/"mean"	6	3
Variansi	64	31

Banyaknya pekerja pria pada suatu perusahaan dalam studi ini yang dipilih secara acak memiliki distribusi binomial (n, p) dengan paramater N dan $p = 0,4$. Tentukan rataan ("*mean*") dan juga standar variansi dari banyaknya batang rokok yang dihabiskan dalam satu hari kerja pada perusahaan tersebut yang berisi 8 orang pekerja!

a. Rataan = 33,36 dan Variansi = 19,26

b. Rataan = 23,36 dan Variansi = 22,86

c. Rataan = 33,36 dan Variansi = 12,66

d. Rataan = 13,66 dan Variansi = 12,66

Pembahasan:
Misalkan M adalah jumlah dari pekerja pria dan C adalah jumlah dari rokok yang dikonsumsi. Dengan menggunakan *law of total probability*, kita peroleh:

$$E[C] = E[E[C|M]] = E[6M + 3(8 - M)] = 3E[M] + 24$$

Selain itu, diketahui bahwa M berdistribusi binomial dengan rataan $E[M] = n \times p = 8 \times 0,4 = 3,2$. Substitusikan nilai ini ke dalam persamaan di atas, maka kita peroleh $E[C] =$

$33,6$. Untuk variansi dari C, kita akan gunakan *law of total variance*.

$$\begin{aligned} Var[C] &= E[Var[C|M]] + Var[E[C|M]] \\ &= E[64M + 31(8-M)] + Var[3M+24] \\ &= 33E[M] + 248 + 9Var[M] \\ &= 33 \times 3,2 + 248 + 9 \times 8 \times 0,4 \times 0,6 = 370,88 \end{aligned}$$

Standard deviasi dari C adalah $\sqrt{(Var[C])} = \sqrt{370,88} = 19,26$

Jawab : anulir

10. Suatu perusahaan reasuransi menawarkan skema program reasuransi stop-loss. Dalam program ini, perusahaan akan memberikan ganti rugi apabila secara aggregat jumlah kerugian melebihi suatu nilai d, dan menerima premium sebesar $[E(S-d)_+]$. Anda diberikan data historikal yaitu $[E(S-100)_+] = 15, [E(S-120)_+] = 10$ dan peluang bahwa secara aggregate jumlah kerugian lebih besar dari 80 dan kurang dari 120 ialah 0. Tentukan peluang bahwa aggregate besar kerugian kurang dari atau sama dengan 80!

    a. Tidak ada jawaban benar

    b. 0,75

    c. 0,25

    d. 0,85

    Pembahasan: Dari data historikal kita mendapatkan informasi sebagai berikut

$$\int_{100}^{\infty} (1 - F(s))ds = 15 \tag{7.1}$$

$$\int_{120}^{\infty} (1 - F(s))ds = 10 \tag{7.2}$$

$$F(120) - F(80) = 0$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2), kita peroleh:

$$\int_{100}^{120} (1 - F(s))ds = 5$$

akan tetapi, pada range ini $F(s) = F(80)$, sehingga

$$5 = \int_{100}^{120} (1 - F(s))ds = \int_{100}^{120} (1 - F(80))ds = 20(1 - F(80))$$

Dengan demikian, kita dapatkan $F(80) = 1 - 0,25 = 0,75$

Jawab : B

11. Peubah acak S diketahui memiliki distribusi "*Compound Poisson*" dengan karakteristik sebagai berikut :

    1. Besar klaim individual X ialah sama untuk 1,2, atau 3
    2. $E(S) = 56$
    3. $Var(S) = 126$
    4. $\lambda = 29$

    Tentukan ekspetasi untuk besar klaim $= 1, 2$ dan $3(f_1, f_2, f_3)$!
    Hint : $f_i = Pr(X = i)$

    a. Tidak ada jawaban benar
    b. $f_1 = \frac{10}{29}, f_2 = \frac{8}{29}, f_3 = \frac{11}{29}$
    c. $f_1 = \frac{10}{29}, f_2 = \frac{11}{29}, f_3 = \frac{8}{29}$
    d. $f_1 = \frac{8}{29}, f_2 = \frac{10}{29}, f_3 = \frac{11}{29}$

    Pembahasan:
    Untuk peubah acak S yang berdistribusi *Compound Poisson* dengan parameter λ, nilai dari $E[S]$ dan $Var[S]$ masing-masing adalah $\lambda E[X]$ dan $\lambda E[X^2]$.

    $$56 = E[S] = \lambda E[X] = 29E[X] \rightarrow E[X] = \frac{56}{29}$$

    $$126 = Var[S] = \lambda E[X^2] = 29E[X^2] \rightarrow E[X^2] = \frac{126}{29}$$

    Misalkan $f_i = Pr(X = i)$, maka kita akan memiliki 3 persamaan, yaitu:

    $$f_1 + f_2 + f_3 = 1$$

    $$f_1 + 2f_2 + 3f_3 = E[X] = \frac{56}{29}$$

    $$f_1 + 4f_2 + 9f_3 = E[X^2] = \frac{126}{29}$$

    Dengan menyelesaikan ketiga persamaan di atas, maka kita akan mendapatkan

    $$f_1 = \frac{10}{29}, f_2 = \frac{11}{29}, \text{ dan } f_3 = \frac{8}{29}$$

    Jawab: C

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 12-15
Suatu model statistik "*individual losses*" diketahui memiliki distribusi gamma dengan paramater $\alpha = 2$ dan $\theta = 100$. Banyaknya klaim mengikuti distribusi binomial negatif dengan $\tau = 2$ dan $\beta = 1,5$. Untuk setiap kerugian, berlaku deduktibel standard ("*ordinary deductible*") ialah 50 dan *loss limit* dari besar klaim sebelum dipotong deduktibel ialah 175.

12. Hitung rataan (*"mean"*) dari besar *aggregate* pembayaran klaim "per-*loss basis"*?

a. 251.012

b. 215.125

c. 215.158

d. 259.401

Pembahasan:
Diketahui bahwa *individual losses* berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\theta = 100$, sedangkan banyak klaim berdistribusi binomial negatif dengan parameter $\tau = 2$ dan $\beta = 1,5$.

$$\begin{aligned} E[X \wedge d] &= \frac{\theta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha+1; \frac{d}{\theta}\right) + d\left[1 - \Gamma\left(\alpha; \frac{d}{\theta}\right)\right] \\ &= \frac{100\Gamma(3)}{\Gamma(2)}\Gamma\left(3; \frac{d}{100}\right) + d\left[1 - \Gamma\left(2; \frac{d}{100}\right)\right] \\ &= 200\ \Gamma\left(3; \frac{d}{100}\right) + d\left[1 - \Gamma\left(2; \frac{d}{100}\right)\right] \end{aligned}$$

dimana $\Gamma\left(3; \frac{d}{100}\right) = \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^{\frac{d}{100}} t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{d}{100}} t^2 e^{-t} dt$
dan $\Gamma\left(2; \frac{d}{100}\right) = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\frac{d}{100}} t e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{d}{100}} t e^{-t} dt$
Dengan demikian kita dapatkan

$$\Gamma\left(3; \frac{175}{100}\right) = 0,25603; \Gamma\left(2; \frac{175}{100}\right) = 0,52212165$$

$$\Gamma\left(3; \frac{50}{100}\right) = 0,0143877; \Gamma\left(2; \frac{50}{100}\right) = 0,090204$$

$E[X \wedge 175] = 200\Gamma\left(3; \frac{175}{100}\right) + 175\left[1 - \Gamma\left(2; \frac{175}{100}\right)\right] = 134,8347113$
$E[X \wedge 50] = 200\Gamma\left(3; \frac{50}{100}\right) + 50\left[1 - \Gamma\left(2; \frac{50}{100}\right)\right] = 48,36734$
Selanjutnya, kita akan mencari nilai rataan dari besar aggregate pembayaran klaim *"per-loss*

basis", yaitu

$$E[aggregate\ \ payment] = E[N^L] \times E[Y^L]$$

dengan N^L berdistribusi binomial negatif dengan parameter $\tau = 2$ dan $\beta = 1,5$, dan Y^L berdistribusi gamma.

$$\begin{aligned} E[aggregate\ \ payment] &= E[N^L] \times E[Y^L] \\ &= \tau\beta[E[X \wedge m] - E[X \wedge d]] \\ &= 2(1,5)[134,8347113 - 48,36734] \\ &= 259,401 \end{aligned}$$

Jadi rataan dari besar aggregate pembayaran klaim *"per-loss basis"* adalah 259,401.

Jawab : D

13. Hitung variansi dari besar *aggregate* pembayaran klaim "per-*loss basis*"?

    a. 62.616

    b. 69.526

    c. 26.162

    d. 66.616

    Pembahasan:
    Misalkan S menyatakan aggregate pembayaran klaim *"per-loss basis"*, maka nilai dari variansi S adalah

    $$Var(S) = E[N^L]Var[Y^L] + Var[N^L](E[Y^L])^2$$

    $E[N^L] = \tau\beta = 2(1,5) = 3$
    $Var[N^L] = \tau\beta(1+\beta) = 2(1,5)(2,5) = 7,5$
    Untuk distribusi gamma dengan parameter $\alpha = 2$ dan $\theta = 100$, diketahui bahwa

    $$\begin{aligned} E[(X \wedge d)^2] &= \frac{\theta^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left(\alpha+2; \frac{d}{\theta}\right) + d^2\left[1 - \Gamma\left(\alpha; \frac{d}{\theta}\right)\right] \\ &= \frac{100^2\Gamma(4)}{\Gamma(2)}\Gamma\left(4; \frac{d}{100}\right) + d^2\left[1 - \Gamma\left(2; \frac{d}{100}\right)\right] \\ &= 6(100)^2\Gamma\left(4; \frac{d}{100}\right) + d^2\left[1 - \Gamma\left(2; \frac{d}{100}\right)\right] \end{aligned}$$

    dimana $\Gamma\left(4; \frac{d}{100}\right) = \frac{1}{\Gamma(4)} \int_0^{\frac{d}{100}} t^3e^{-t}dt = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{d}{100}} t^3e^{-t}dt$

dan $\Gamma\left(2;\dfrac{d}{100}\right) = \dfrac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{\frac{d}{100}} te^{-t}dt = \int_0^{\frac{d}{100}} te^{-t}dt$
Dengan demikian kita dapatkan

$$\Gamma\left(4;\frac{175}{100}\right) = 0,10081035; \Gamma\left(2;\frac{175}{100}\right) = 0,52212165$$

$$\Gamma\left(4;\frac{50}{100}\right) = 0,001751623; \Gamma\left(2;\frac{50}{100}\right) = 0,090204$$

$E[(X \wedge 175)^2] = 6(100)^2\Gamma\left(4;\dfrac{175}{100}\right) + 175^2\left[1-\Gamma\left(2;\dfrac{175}{100}\right)\right] = 20.683,64547$
$E[(X \wedge 50)^2] = 6(100)^2\Gamma\left(4;\dfrac{50}{100}\right) + 50^2\left[1-\Gamma\left(2;\dfrac{50}{100}\right)\right] = 2.379,58738$

Dari soal nomor 12, kita peroleh $E[Y^L] = 134,8347113 - 48,36734 = 86,4673713$. Selanjutnya, kita akan menghitung nilai dari $E[(Y^L)^2]$, yaitu

$$\begin{aligned} E[(Y^L)^2] &= E[(X \wedge 175)^2] - E[(X \wedge 50)^2] - 2(50)[E[X \wedge 175] - E[X \wedge 50]] \\ &= 20.683,64547 - 2.379,58738 - 100(86,4673713) \\ &= 9.657,32096 \end{aligned}$$

$$Var[Y^L] = E[(Y^L)^2] - (E[Y^L])^2 = 9.657,32096 - (86,4673713)^2 = 2.180,71466$$

Jadi, nilai dari $Var(S)$ adalah

$$\begin{aligned} Var(S) &= E[N^L]Var[Y^L] + Var[N^L](E[Y^L])^2 \\ &= 3(2.180,71466) + 7,5(86,4673713)^2 \\ &= 62.616,69 \approx 62.616 \end{aligned}$$

Jawab : A.

14. Tentukan koefisien paramater distribusi dari banyaknya pembayaran binomial negatif(τ^*, β^*):

a. $\tau^* = 4$ dan $\beta^* = 2,66969$

b. $\tau^* = 2$ dan $\beta^* = 1,36469$

c. $\tau^* = 4$ dan $\beta^* = 1,36469$

d. $\tau^* = 2$ dan $\beta^* = 2,66969$

Pembahasan:
Distribusi dari banyaknya pembayaran adalah binomial negatif dengan parameter

$\tau^* = \tau = 2$, dan

$$\beta^* = p\beta$$

dimana p = Pr(pembayaran klaim)$= 1 - F_X(50) = 1 - \Gamma\left(2; \frac{50}{100}\right) = 0,909796$

Jadi, $\beta^* = (0,909796)(1,5) = 1,36469$

Jawab : B

15. Tentukan fungsi distribusi kumulatif dari suatu besar klaim Y^p dari suatu pembayaran klaim diberikan pembayaran klaim tersebut dibayarkan!
Hint : suatu klaim/kerugian dibayarkan apabila nilai pembayaran klaim tsb lebih dari deduktibel

a. $F_{Y^p}(y) = (1 + \frac{y}{150})e^{\frac{y}{100}}$
b. $F_{Y^p}(y) = 1 - (1 + \frac{y}{150})e^{-\frac{y}{100}}$
c. $F_{Y^p}(y) = 1 - (\frac{y}{150})e^{\frac{y}{100}}$
d. $F_{Y^p}(y) = 1 + (\frac{y}{150})e^{-\frac{y}{100}}$

Pembahasan:

$$F_{Y^p}(y) = 1 - \frac{1 - F_X(y+d)}{1 - F_X(d)} = 1 - \frac{1 - F_X(y+50)}{1 - F_X(50)} = \frac{F_X(y+50) - F_X(50)}{1 - F_X(50)}$$

dimana $F_X(y+50) = \Gamma\left(2; \frac{y+50}{100}\right)$ dan $F_X(50) = \Gamma\left(2; \frac{50}{100}\right)$

Dengan demikian kita peroleh

$$F_{Y^p}(y) = 1 - \left(1 + \frac{y}{150}\right)e^{-\frac{y}{100}}$$

Jawab : B

16. Sebagai bahan dalam merancang suatu produk asuransi "*nursing home insurance*", seorang aktuaris diberikan data bahwa rata-rata lama hari dari suatu kunjungan ialah 440 hari, dan 30% dari kunjungan tersebut akan dibatalkan pada 30 hari pertama. Pembatalan/Terminasi ini diketahui berdistribusi secara uniform pada periode tersebut. Setelah pembicaran dengan divisi bisnis, disepakati polis tersebut dijual sebesar 20 ribu per hari untuk 30 hari pertama, dan 100 ribu per hari setelahnya. Tentukan ekspetasi besar klaim yang akan dibayarkan perusahaan asuransi tersebut untuk satu kali kunjungan? (hitung ke pembulatan terdekat!)

a. 42 juta

b. 22 juta

c. 12 juta

d. 44 juta

Pembahasan:
Diketahui bahwa $E[X] = 440$; $F(30) = 0,3$;dan $f(x) = 0,01$ untuk $0 < x \leq 30$
Misalkan K adalah besar klaim yang dibayarkan, maka

$$\begin{aligned}
E[K] &= \int_0^{30} 20.000x(0,01)dx + \int_{30}^{\infty}(30(20.000) + 100.000(x-30))f(x)dx \\
&= \int_0^{30} 200x\,dx + \int_{30}^{\infty}(600.000 + 100.000(x-30))f(x)dx \\
&= 90.000 + \int_{30}^{\infty}(-2.400.000)f(x)dx + 100.000\int_{30}^{\infty} xf(x)dx \\
&= 90.000 - 2.400.000(1 - F(30)) + 100.000\left(\int_0^{\infty} xf(x)dx - \int_0^{30} xf(x)dx\right) \\
&= 90.000 - 2.400.000(0,7) + 100.000\left(E[X] - \int_0^{30} 0,01x\ dx\right) \\
&= 90.000 - 1.680.000 + 100.000(440 - 4,5) \\
&= 41.960.000 \approx 42\ juta
\end{aligned}$$

Jadi ekspektasi dari besar klaim yang dibayarkan perusahaan tersebut untuk satu kali kunjungan adalah sebesar 42 juta.

Jawab : A

17. Diberikan informasi sebagai berikut :

a) X adalah suatu peubah acak dengan rataan μ dan variansi v

b) μ adalah suatu peubah acak dengan rataan sebesar 2 dan variansi sebesar 4

c) v adalah suatu peubah acak dengan rataan sebesar 8 dan variansi sebesar 32

Tentukan nilai dari faktor kredibilitas Buhlmann Z setelah tiga observasi dari X !

a. 0,6

b. 0,8

c. 0,3

d. 0,4

Pembahasan:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= E[v] = 8\\ \hat{a} &= Var[\mu] = 4\\ k &= \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = 2\end{aligned}$$

Faktor kredibilitas Buhlmann setelah 3 kali observasi $(n = 3)$ adalah

$$Z = \frac{n}{n+k} = \frac{3}{3+2} = 0,6$$

Jawab : A

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 18-19
Diberikan informasi sebagai berikut :

a) Banyaknya klaim untuk suatu tertanggung mengikuti distribusi Poisson dengan *mean* M

b) Besar suatu klaim mempunyai distribusi eksponensial dengan distribusi kepadatan peluang

$$f_{x|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda^{-1}e^{-\frac{x}{\lambda}}, x, \lambda > 0$$

c) M dan Λ saling bebas

d) $E(M) = 0,10$ dan $Var(M) = 0,0025$

e) $E(\Lambda) = 1.000$ dan $Var(\Lambda) = 640.000$

f) Banyak klaim dan besar klaim saling bebas

18. Hitung nilai ekspetasi dari "*pure premium's process variance*" dari satu risiko tersebut!

a. 828.000

b. 188.000

c. 228.000

d. 328.000

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
v(\mu,\lambda) &= \mu(2\lambda^2) = 2\mu\lambda^2 \\
v &= E[v(\mu,\lambda)] \\
&= E[2\mu\lambda^2] \\
&= 2E[\mu]E[\lambda^2] \\
&= 2E[\mu](Var[\lambda] + (E[\lambda])^2) \\
&= 2(0,1)(640.000 + 1000^2) \\
&= 328.000
\end{aligned}$$

Jadi nilai ekspektasi dari *"pure premium's process variance"* dari satu risiko tersebut adalah 328.000

Jawab : D

19. Hitung "*variance of the Hypothetical Mean*" untuk premi murni ("*pure premium*")!

    a. 10.500

    b. 5.500

    c. 2.500

    d. 3.500

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\mu(\mu,\lambda) &= \mu\lambda \\
\hat{a} &= Var[\mu\lambda] \\
&= E[\mu^2\lambda^2] - (E[\mu])^2(E[\lambda])^2 \\
&= E[\mu^2]E[\lambda^2] - (E[\mu])^2(E[\lambda])^2 \\
&= (Var[\mu] + (E[\mu])^2)(Var[\lambda] + (E[\lambda])^2) - (E[\mu])^2(E[\lambda])^2 \\
&= (0,0025 + (0,1)^2)(640.000 + (1000)^2) - (0,1)^2(1000)^2 \\
&= 10.500
\end{aligned}$$

Jadi *"variance of the Hypothetical Mean"* untuk premi murni adalah 10.500

Jawab : A

20. Dua jenis risiko dipilih secara acak dari suatu populasi. Risiko pertama, mempunyai 0 klaim pada tahun pertama, 0 buah klaim pada tahun kedua, 1 klaim pada tahun ketiga, dan 0 klaim

pada tahun terakhir : (0,0,1,0). Risiko kedua, mempunyai 2 klaim pada tahun pertama, 1 klaim pada tahun kedua, 0 dan 2 klaim pada dua tahun terakhir (2,1,0,2). Hitung estimatasi bobot kredilitas ("*credibility weighted estimates*") untuk ekspetasi banyak klaim per tahun untuk setiap risiko $\widehat{\mu(\theta_1)}$ dan $\widehat{\mu(\theta_2)}$?

a. $\widehat{\mu(\theta_1)} = 0,3128$ dan $\widehat{\mu(\theta_2)} = 1,1842$

b. $\widehat{\mu(\theta_1)} = 0,5348$ dan $\widehat{\mu(\theta_2)} = 1,1021$

c. $\widehat{\mu(\theta_1)} = 0,3851$ dan $\widehat{\mu(\theta_2)} = 1,1420$

d. $\widehat{\mu(\theta_1)} = 0,3958$ dan $\widehat{\mu(\theta_2)} = 1,1042$

Pembahasan:

$\bar{X}_1 = 0,25$ dan $\bar{X}_2 = 1,25$

$\hat{\mu} = \bar{X} = \dfrac{6}{8} = 0,75$

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \frac{3(0-0,25)^2 + (1-0,25)^2 + 2(2-1,25)^2 + (1-1,25)^2 + (0-1,25)^2}{6} = \frac{7}{12} \\
\hat{a} &= \frac{4(0,25-0,75)^2 + 4(1,25-0,75)^2 - \frac{7}{12}}{8 - \frac{1}{8}(4^2+4^2)} = \frac{17}{48}
\end{aligned}$$

$k = \dfrac{\hat{v}}{\hat{a}} = \dfrac{28}{17}$

$\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \dfrac{4}{4+\frac{28}{17}} = \dfrac{17}{24}$

Untuk risiko pertama, estimasi bobot kredibilitas untuk ekspektasi banyak klaim per tahun adalah

$$\widehat{\mu(\theta_1)} = \hat{Z}_1\bar{X}_1 + (1-\hat{Z}_1)\hat{\mu} = \left(\frac{17}{24}\right)(0,25) + \left(1 - \frac{17}{24}\right)(0,75) = 0,3958$$

Untuk risiko kedua, estimasi bobot kredibilitas untuk ekspektasi banyak klaim per tahun adalah

$$\widehat{\mu(\theta_2)} = \hat{Z}_2\bar{X}_2 + (1-\hat{Z}_2)\hat{\mu} = \left(\frac{17}{24}\right)(1,25) + \left(1 - \frac{17}{24}\right)(0,75) = 1,1042$$

Jawab : D

Pernyataan dibawah digunakan untuk menjawab soal untuk no 21-25

Sebuah perusahaan konstruksi A dan B mempunyai polis asuransi yang melindungi kendaraan truk niaga milik mereka. Dalam empat tahun, aktuaris perusahaan mengobservasi historikal catatan klaim seperti berikut :

Tertanggung		**Tahun**			
		Y	$Y+1$	$Y+2$	$Y+3$
A	Banyak Klaim	3	2	2	0
	Total kendaraan	2	2	2	1
B	Banyak Klaim	2	1	0	
	Total kendaraan	4	3	2	

21. Hitung "*Expected Value of The Process Variance*" (EPV) !

    a. 0,4562

    b. 0,1282

    c. 0,2281

    d. 0,3667

    Pembahasan:
    Misalkan m_{ij} menunjukkan jumlah dari *exposure* untuk tertanggung ke-i pada tahun ke-j, dan X_{ij} menunjukkan rata-rata klaim tiap unit dari tertanggung ke-i pada tahun ke-j

    Berdasarkan data yang kita miliki dari tabel, maka kita peroleh

    $$m_{A1} = 2, m_{A2} = 2, m_{A3} = 2, \text{ dan } m_{A4} = 1$$
    $$m_{B1} = 4, m_{B2} = 3, \text{ dan } m_{B3} = 2$$

    $$X_{A1} = 1,5, X_{A2} = 1, X_{A3} = 1, \text{ dan } X_{A4} = 0$$

    $$X_{B1} = 0,5, X_{B2} = \frac{1}{3}, \text{ dan } X_{B3} = 0$$

    $m_A = 7; \bar{X}_A = 1; m_B = 9; \bar{X}_B = \frac{1}{3}$
    $\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{10}{16} = 0,625$

    $$\begin{aligned} \hat{v} &= \frac{2(1,5-1)^2 + 2(2)(1-1)^2 + 1(0-1)^2 + 4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(0-\frac{1}{3}\right)^2}{5} \\ &= 0,3667 \end{aligned}$$

    Jadi, *"Expected Value of the Process Variance"* adalah 0,3667.
    Jawab : D

22. Hitung "*Variance of the Hypothetical Means*" (VHM)!

a. 0,1757

b. 0,2821

c. 0,8132

d. 0,1639

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \frac{m_A(\bar{X}_A - \hat{\mu})^2 + m_B(\bar{X}_B - \hat{\mu})^2 - \hat{v}}{m - \dfrac{1}{m}(m_A^2 + m_B^2)} \\
&= \frac{7(1-0,625)^2 + 9\left(\dfrac{1}{3} - 0,625\right)^2 - 0,3667}{16 - \dfrac{1}{16}(7^2 + 9^2)} \\
&= 0,1757
\end{aligned}$$

Jadi, *"variance of the Hypothetical Means"* adalah 0,1757.

Jawab : A

23. Hitung estimasi frekuensi banyak klaim tahunan untuk setiap tertanggung menggunakan Model the Buhlmann-Straub!

a. A = 0,9139 dan B = 0,3882

b. A = 0,9225 dan B = 0,1242

c. A = 0,3242 dan B = 0,3212

d. Tidak ada jawaban benar

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{\hat{v}}{\hat{a}} = \frac{0,3667}{0,1757} = 2,0871 \\
\hat{Z}_A &= \frac{m_A}{m_A + k} = \frac{7}{7 + 2,0871} = 0,770323 \\
\hat{Z}_B &= \frac{m_B}{m_B + k} = \frac{9}{9 + 2,0871} = 0,8117542
\end{aligned}$$

Untuk tertanggung A, estimasi frekuensi banyak klaim tahunan adalah

$$\hat{Z}_A\bar{X}_A + (1 - \hat{Z}_A)\bar{\mu} = (0,770323)(1) + (1 - 0,770323)(0,625) = 0,9139$$

Untuk tertanggung B, estimasi frekuensi banyak klaim tahunan adalah

$$\hat{Z}_B \bar{X}_B + (1 - \hat{Z}_B)\bar{\mu} = (0,8117542)\left(\frac{1}{3}\right) + (1 - 0,8117542)(0,625) = 0,3882$$

Jawab : A

24. Apabila diasumsikan banyaknya klaim untuk setiap tertanggung mengikuti distribusi Possion, Hitung *"Expected Value of The Process Variance" (EPV)* !

    a. 0,115

    b. 0,525

    c. 0,625

    d. Tidak ada jawaban benar

    Pembahasan:
    Diketahui bahwa banyak klaim untuk setiap tertanggung mengikuti distribusi Poisson (λ), sehingga kita bisa dapatkan

    $$\mu(\lambda) = \lambda \text{ dan } v(\lambda) = \lambda$$
    $$\hat{\mu} = E[\lambda] = \bar{X} = 0,625$$
    $$\hat{v} = E[\lambda] = \bar{X} = 0,625$$

    Dengan demikian, *"Expected Value of the Process Variance"* adalah 0,625

    Jawab : C

25. Apabila diasumsikan banyaknya klaim untuk setiap tertanggung mengikuti distribusi Possion, Hitung *"Variance of the Hypothetical Means" (VHM)*!

    a. 0,1429

    b. 0,2321

    c. 0,3212

    d. Tidak ada jawaban benar

    Pembahasan:

Pada soal nomor 24, telah kita peroleh $\hat{v} = 0,625$

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \frac{m_A(\bar{X}_A - \hat{\mu})^2 + m_B(\bar{X}_B - \hat{\mu})^2 - \hat{v}}{m - \frac{1}{m}(m_A^2 + m_B^2)} \\
&= \frac{7(1-0,625)^2 + 9\left(\frac{1}{3} - 0,625\right)^2 - 0,625}{16 - \frac{1}{16}(7^2 + 9^2)} \\
&= 0,1429
\end{aligned}$$

Jadi, *"variance of the Hypothetical Means"* adalah 0,1429.

Jawab : A

26. Dua buah mangkuk masing-masing terdapat 10 bola kecil. Mangkuk pertama berisi 5 bola merah dan 5 bola putih. Mangkuk kedua berisi 2 bola merah dan 8 bola putih. Proses pemilihan adalah memilih mangkuk secara acak dan kemudian memilih bola secara acak dari mangkuk yang dipilih. Berapa probabilitias dari bola yang dipilih adalah warna merah !

    a. 0,15

    b. 0,75

    c. 0,35

    d. Tidak ada jawaban benar

    Pembahasan:
    Misalkan A menyatakan kejadian mendapatkan bola berwarna merah, B_1 menyatakan kejadian mengambil bola dari mangkuk satu, dan B_2 menyatakan kejadian mengambil bola dari mangkuk dua.

    $$Pr(B_1) = Pr(B_2) = \frac{1}{2}$$

    Probabilitas dari bola yang dipilih adalah warna merah diberikan sebagai berikut

    $$\begin{aligned}
    Pr(A) = Pr(A \cap B_1) + Pr(A \cap B_2) &= Pr(A|B_1)Pr(B_1) + Pr(A|B_2)Pr(B_2) \\
    &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = 0,35
    \end{aligned}$$

    Jawab : C

27. Suatu populasi dari suatu risiko memiliki distribusi Pareto dengan $\theta = 6.000$ dan $\alpha =$ tidak diketahui. Hasil dari simulasi menggunakan estimasi MLE berdasarkan suatu sampel berukuran $n = 10$ mengindikasikan $E(\hat{\alpha}) = 2,2$ dan MSE$(\hat{\alpha}) = 1$. Tentukan $Var(\hat{\alpha})$ jika diketahui bahwa $\alpha = 2$!

a. 0,78

b. 0,25

c. 0,96

d. Tidak ada jawaban benar

Pembahasan:

$$MSE[\hat{\alpha}] = Var[\hat{\alpha}] + (Bias[\hat{\alpha}])^2$$

dengan $(Bias[\hat{\alpha}])^2 = (E[\hat{\alpha}] - \alpha)^2 = (2,2-2)^2 = 0,04$

$$Var[\hat{\alpha}] = MSE[\hat{\alpha}] - (Bias[\hat{\alpha}])^2 = 1 - 0,04 = 0,96 \tag{7.3}$$

Jadi, $Var[\hat{\alpha}] = 0,96$.

Jawab : C

28. Diketahui persentil ke-20 dan ke-80 dari suatu sampel acak adalah 5 dan 12. Menggunakan metode *"the percentile matching"*, Hitung estimasi $S(8)$ dengan mengansumsikan bahwa sampel tersebut berdistribusi Weibull!

a. 0,5249

b. 0,2324

c. 0,8235

d. Tidak ada jawaban benar

Pembahasan:

$$0,2 = 1 - e^{-(5/\theta)^\tau} \rightarrow -\ln(0,8) = \left(\frac{5}{\theta}\right)^\tau$$

$$0,8 = 1 - e^{-(12/\theta)^\tau} \rightarrow -\ln(0,2) = \left(\frac{12}{\theta}\right)^\tau$$

Dengan membagi kedua persamaan di atas, maka kita mendapatkan

$$\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)} = \left(\frac{12}{5}\right)^\tau \rightarrow \tau = \frac{\ln\left(\dfrac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}\right)}{\ln\left(\dfrac{12}{5}\right)} = 2,256877$$

Substitusikan nilai ini ke persamaan pertama untuk mendapatkan nilai dari θ.

$$-\ln(0,8) = \left(\frac{5}{\theta}\right)^{2,256877} \rightarrow \theta = \frac{5}{(-\ln(0,8))^{\frac{1}{2,256877}}} = 9,72$$

Estimasi $S(8)$ diberikan sebagai berikut

$$S(8) = e^{-(8/\theta)^{\tau}} = e^{-(8/(9{,}72))^{2{,}256877}} = 0,5249$$

Jawab : A

29. Pada tahun pertama, terdapat 100 klaim dengan rataan (*"mean"*) besar klaim = 10.000 dan di tahun kedua terdapat 200 klaim dengan rataan besar klaim = 12.500. Karena adanya pengaruh inflasi, besar klaim meningkat sebesar 10% per tahun. Sebuah distribusi Pareto dengan $\alpha = 3$ dan $\theta =$ tidak diketahui digunakan untuk mengestimasi distibusi dari klaim tersebut. Tentukan θ untuk tahun ketiga menggunakan metode momen!

    a. 54.400

    b. 10.800

    c. 35.200

    d. 26.400

    Pembahasan:
    Setelah inflasi, nilai total 100 klaim dari tahun pertama adalah $100(10.000)(1,1)^2 = 1.210.000$, sedangkan nilai total 200 klaim dari tahun kedua adalah $200(12.500)(1,1)^2 = 2.750.000$. Rata-rata dari 300 klaimm tersebut setelah terkena pengaruh inflasi adalah

    $$E[X] = \frac{1.210.000 + 2.750.000}{300} = 13.200$$

    Dengan menggunakan metode momen, kita peroleh

    $$E[X] = \frac{\theta}{3-1} = 13.200 \rightarrow \theta = 26.400$$

    Jadi, θ untuk tahun ketiga dengan menggunakan metode momen adalah 26.400

    Jawab : D

30. Sebuah *"credibility factor parsial"* untuk sampel acak X berdasarkan 100 exposure dari X adalah $Z = 0,4$. Berapa tambahan *exposure* yang diperlukan agar *"credibility factornya"* dapat ditingkatkan sampai paling tidak 0,5?

    a. 54

    b. 45

    c. 75

    d. 57

Pembahasan:
Diketahui $n = 100$, dan $Z = 0,4$

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{n}{n_F}} \\ 0,04 &= \sqrt{\frac{100}{n_F}} \\ n_F &= 625 \end{aligned}$$

Agar faktor kredibilitasnya dapat ditingkatkan menjadi 0,5, maka

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{n+k}{n_F}} \\ 0,05 &= \sqrt{\frac{100+k}{n_F}} \\ k &= 56,25 \end{aligned}$$

Dengan melakukan pembulatan ke atas, diperoleh tambahan *exposure* yang diperlukan adalah $k = 57$

Jawab : D

8 Periode November 2014

1. X adalah continuous random variable dengan fungsi densitas

   Diketahui $f(x) = 6x(1-x); 0 < x < 1$. Hitung $\mathbb{P}\left[|X - \frac{1}{2}| > \frac{1}{4}\right]$

   a. 0,0521

   b. 0,1563

   c. 0,3125

   d. 0,5

   Pembahasan

   Diketahui $f(x) = 6x(1-x); 0 < x < 1$.
   Pertama, kita cari dahulu:
   $$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 6t(1-t)dt \\ &= 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$
   Maka kita dapat mencari
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[|X - \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{4}|\right] &= \mathbb{P}\left[X - \tfrac{1}{2} > \tfrac{1}{4}\right] + \mathbb{P}\left[X - \tfrac{1}{2} < -\tfrac{1}{4}\right] \\ &= \mathbb{P}\left[X > \tfrac{3}{4}\right] + \mathbb{P}\left[X < \tfrac{1}{4}\right] \\ &= (1 - F(\tfrac{3}{4})) + F(\tfrac{1}{4}) \\ &= 0{,}3125 \end{aligned}$$
   Jawab: C.

2. Sebuah distribusi Gamma memiliki rata-rata (mean) 8 dan skewness 1. Hitung Variansinya

   a. 4

   b. 8

   c. 16

   d. 32

   Pembahasan

   Diberikan Gamma(mean=8,var) dan skewness=1.
   $$\begin{aligned} \text{skewness} &= \frac{2}{\sqrt{k}} \\ k &= 4 \end{aligned}$$
   Lalu dari distribusi Gamma,

$$\begin{aligned} \text{Mean} &= k\theta \\ 8 &= 4\theta \\ \theta &= 2 \end{aligned}$$

Maka variansinya adalah Var$= k\theta^2 = 16$

Jawab: C.

Untuk soal no 3 - 6. Data berikut mendaftar waktu meninggal dan sensor kanan / right censoring (+) untuk 25 orang

2,3,3,3+,4,4,4,4,4+,5+,6,6,7,7,7,7+,7+,8,9,10,12+,13,13,14,16

random variable untuk waktu sampai meninggal adalah T

3. Hitung $S_{25}(11) - \hat{S}(11)$ yaitu (Estimasi Kaplan Meier – Estimasi Nelson Aalen)

    a. -0,064

    b. -0,032

    c. 0

    d. 0,032

    Pembahasan

    Dari soal, kita dapat mengetahui:

$$H_{NA} = \frac{s_i}{r_i}$$

$$\lambda_{KM} = 1 - H_{NA}$$

T	s_i	u_i	r_i	H_{NA}	λ_{KM}
2	1		25	$\frac{1}{25}$	$\frac{24}{25}$
3	2		24	$\frac{2}{24}$	$\frac{22}{24}$
4	4	1	21	$\frac{4}{21}$	$\frac{17}{21}$
5		1	16		
6	2	1	15	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{15}$
7	3		13	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
8	1	2	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
9	1		7	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
10	1		6	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
12		1	5		
13	2		4	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
14	1		2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
16	1		1	1	0

Kita dapat menghitung estimasi Kaplan Meier ($S(11)$) dan Nelson Aalen ($\hat{S}(11)$):

$$S(11) = \frac{24}{25} \times \frac{22}{24} \times ... \frac{5}{6} = 0,29683$$

$$\hat{S}(11) = e^{\frac{1}{25} + \frac{2}{24} + ... + \frac{1}{6}} = 0,32876$$

Maka, $S(11) - \hat{S}(11) = -0,03193$

Jawab: B.

4. Hitung Estimasi product limit dari $\mathbb{P}[4 \leq T \leq 8]$

   a. 0,0643

   b. 0,4156

   c. 0,4333

   d. 0,4644

   Pembahasan

   Nama lain dari "Product Limit" adalah Kaplan-Meier.

   $\mathbb{P}[4 \leq T \leq 8] = \frac{24}{25} \times \frac{22}{24} - \frac{24}{25} \times \frac{22}{24} \times ... \times \frac{7}{8} = 0,4644$

   Jawab: D.

5. Hitung Estimasi product limit untuk probabilitas terkondisi $\mathbb{P}[T > 8 | T > 4]$

   a. 0,0643

   b. 0,4156

c. 0,5835

d. 0,7123

Pembahasan

$\mathbb{P}[T > 8|T > 4] = \frac{\mathbb{P}[T>8]}{\mathbb{P}[T>4]} = \frac{\frac{24}{25}\times ... \times \frac{7}{8}}{\frac{24}{25}\times ... \times \frac{17}{21}} = 0,5833$

Jawab: C.

6. Anggap bahwa data terakhir di waktu ke-16 adalah sensor bukan meninggal. Hitung $S_{25}(20)$ dengan geometric extension approximation

   a. 0,039

   b. 0,044

   c. 0,049

   d. 0,054

   Pembahasan

   Dengan mengasumsikan bahwa data terakhir di waktu ke-16 adalah sensor bukan meninggal, maka kita akan merevisi tabel pada nomor 3 menjadi seperti berikut:

j	T	s_i	u_i	r_i	H_{NA}	λ_{KM}
1	2	1		25	$\frac{1}{25}$	$\frac{24}{25}$
2	3	2		24	$\frac{2}{24}$	$\frac{22}{24}$
3	4	4	1	21	$\frac{4}{21}$	$\frac{17}{21}$
4	5		1	16		
5	6	2	1	15	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{15}$
6	7	3		13	$\frac{3}{13}$	$\frac{10}{13}$
7	8	1	2	8	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$
8	9	1		7	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
9	10	1		6	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
10	12		1	5		
11	13	2		4	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
12	14	1		2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
13	16	1		1	1	0

$$S_{25}(14) = \prod_{j=1}^{12} \lambda_{KM} = \left(\frac{24}{25}\right)\left(\frac{22}{24}\right) ... \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{187}{2520}$$

   Maka,

$$S_{25}(20) = e^{\frac{20}{16}ln(S_{25}(14))} = e^{\frac{20}{16}ln(\frac{187}{2520})} = 0,03873$$

   Jawab: D.

Untuk soal no 7 dan 8. Data berikut menunjukkan data sampel acak dari sebuah distribusi X

7,12,15,19,26,27,29,29,30,33,38,53

7. Dengan menggunakan Maximum Likelihood Estimation dari rata-rata (mean). Estimasikan variansi dari distribusi tersebut untuk distribusi eksponensial

   a. 400

   b. 500

   c. 600

   d. 700

   Pembahasan

   $f(x) = \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}$

   $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} = (\frac{1}{\theta})^n \cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$

   $l(\theta) = lnL(\theta) = -n \cdot ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$

   $l'(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = 0$

   $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} = \frac{n}{\theta}$

   $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X} = 26,5$

   $Var = \theta^2 = 26,5^2 = 702,25$

   Jawab: D.

8. Apabila dari data tersebut dikenakan limit dari pembayaran asuransi sebesar 30. Dengan menggunakan data yang sudah diaplikasikan terhadap limit tersebut, hitung mean dari X diestimasi dengan maximum likelihood estimation untuk distribusi exponential ground up

   a. 26,5

   b. 35,5

   c. 36,5

   d. 40,5

   Pembahasan

   Kita tentukan terlebih dahulu MLE nya.

$$\begin{aligned}
L(\theta) &= f(7) \cdot f(12) \cdot ... \cdot f(29) \cdot [1 - F(30)]^4 \\
&= \left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{7}{\theta}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{12}{\theta}}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{29}{\theta}}\right) \left(e^{-\frac{30}{\theta}}\right)^4 \\
&= \theta^{-8} \cdot e^{-\frac{284}{\theta}} \\
l(\theta) = lnL(\theta) &= -8ln(\theta) - \frac{284}{\theta} \\
l'(\theta) &= -\frac{8}{\theta} + \frac{284}{\theta^2} = 0 \\
\hat{\theta} &= \frac{284}{8} = 35,5
\end{aligned}$$

Maka, $\bar{X} = \hat{\theta} = 35,5$

Jawab: B.

Untuk soal 9 - 11. Data berikut menggunakan 12 data points dari sebuah populasi distribusi X

7,12,15,19,26,27,29,29,30,33,38,53.

Parameter yang diestimasi untuk distribusi eksponensial adalah $\hat{\theta}$=30

9. Hitung statistik Kolmogorov Smirnov untuk data tersebut

   a. 0,19
   b. 0,21
   c. 0,23
   d. 0,25

   Pembahasan

   Diberikan $\hat{\theta} = 30$.

   Maka, $F(x_i) = 1 - e^{-\frac{x_i}{30}}$, $F_n(x_i^-) = \frac{i-1}{12}$, dan $F_n(x) = \frac{i}{12}$

i	x_i	$F(x_i)$	$F_n(x_i^-)$	$F_n(x_i)$	$\lvert F_n(x_i^-) - F(x_i)\rvert$	$\lvert F_n(x_i) - F(x_i)\rvert$
1	7	0,2081	0	$\frac{1}{12}$	0,21	0,12
2	12	0,3297	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	0,25	0,16
3	15	0,3935	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	0,23	0,14
4	19	0,4692	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	0,22	0,14
5	26	0,5796	$\frac{4}{12}$	$\frac{5}{12}$	0,25	0,16
6	27	0,5934	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	0,18	0,09
7	29	0,6197	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	0,12	0,04
8	29	0,6197	$\frac{7}{12}$	$\frac{8}{12}$	0,04	0,05
9	30	0,6321	$\frac{8}{12}$	$\frac{9}{12}$	0,03	0,12
10	33	0,6671	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	0,08	0,17
11	38	0,7182	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	0,12	0,2
12	53	0,8291	$\frac{11}{12}$	1	0,09	0,17

   KS adalah nilai maksimum dari dua kolom terakhir, yaitu 0,25.

   Jawab: D.

10. Hitung statistik Anderson Darling dari data tersebut di atas

a. Kurang dari 0,4

b. Antara 0,4 sampai 0,6

c. Antara 0,6 sampai 0,8

d. Lebih dari 0,8

Pembahasan

$A^2 = -N - \frac{S}{N}$ dengan $S = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\left[lnF(X_i) + ln(1 - F_{N+1-i})\right]$

i	X_i	Z_i	$\Phi(Z_i)$	$1-\Phi(Z_i)$	sorted$(1-\Phi(Z_i))$	k_i
1	7	-1,5774	0.0574	0,9426	0,016	-6,9929
2	12	-1,173	0,1204	0,8796	0,1761	-11,5609
3	15	-0,9303	0,1761	0,8239	0,2995	-14,7117
4	19	-0,6067	0,272	0,728	0,3885	-15,7319
5	26	-0,0404	0,4839	0,5161	0,4119	-14,3425
6	27	0,0404	0,5161	0,4839	0,4119	-16,8211
7	29	0,2022	0,5801	0,4199	0,4839	-16,5156
8	29	0,2022	0,5801	0,4199	0,5161	-18,0901
9	30	0,2831	0,6115	0,3885	0,728	-13,758
10	33	0,5258	0,7005	0,2995	0,8239	-10,4437
11	38	0,9303	0,8239	0,1761	0,8796	-6,7619
12	53	2,1437	0,984	0,016	0,9426	-1,7306

Dengan rata-rata= $\bar{X} = 26,5$, standar deviasi $s = 12,362$, $Z_i = \dfrac{X_i - \bar{X}}{s}$, dan $\Phi(Z_i)$ =norm.dist(Z_i). Sehingga kita peroleh:

$$S = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\left[lnF(X_i) + ln(1 - F_{N+1-i})\right] = \sum_{i=1}^{12} k_i = -147,461$$

$$A^2 = -12 + \frac{147,461}{12}$$

$$A^2 = 0,288415$$

$$A = 0,537043$$

Jawab: C.

11. Apabila data tersebut di atas di sensor pada $x = 32$, dan parameter dari distribusi eksponensial adalah $\hat{\theta} = 25$ maka hitung statistik Kolmogorov Smirnov nya

a. Kurang dari 0,28

b. Antara 0,28 sampai 0,32

c. Antara 0,32 sampai 0,36

d. Lebih dari 0,36

Pembahasan

Diberikan $\hat{\theta} = 25$ dan limit 32.

Maka, $F(x_i) = 1 - e^{-\frac{x_i}{25}}$, $F_n(x_i^-) = \frac{i-1}{9}$, dan $F_n(x) = \frac{i}{9}$

i	x_i	$F(x_i)$	$F_n(x_i^-)$	$F_n(x_i)$	$\lvert F_n(x_i^-) - F(x_i)\rvert$	$\lvert F_n(x_i) - F(x_i)\rvert$
1	7	0,2442	0	$\frac{1}{9}$	0,24	0,13
2	12	0,3812	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0,27	0,16
3	15	0,4512	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	0,23	0,12
4	19	0,5323	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	0,20	0,09
5	26	0,6465	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	0,20	0,09
6	27	0,6604	$\frac{5}{9}$	$\frac{6}{9}$	0,10	0,01
7	29	0,6865	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{9}$	0,02	0,09
8	29	0,6865	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{9}$	0,09	0,20
9	30	0,6988	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	0,19	0,30

KS adalah nilai maksimum dari dua kolom terakhir, yaitu 0,30.

Jawab: B.

Untuk soal no 12 dan 13. Dua buah mangkuk masing-masing terdapat 10 bola kecil. Mangkuk pertama berisi 5 bola merah dan 5 bola putih. Mangkuk kedua berisi 2 bola merah dan 8 bola putih. Proses pemilihan adalah memilih mangkuk secara acak dan kemudian memilih bola secara acak dari mangkuk yang dipilih.

12. Berapa probabilitias dari bola yang dipilih adalah warna merah

    a. 1/10

    b. 1/4

    c. 7/20

    d. 1/2

Pembahasan

Dalam kotak A, terdapat 5 bola merah dan 5 bola putih. Dalam kotak B, terdapat 2 bola merah dan 8 bola putih.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M) &= \mathbb{P}[M|A]\cdot\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}[M|B]\cdot\mathbb{P}(B)\\ &= \tfrac{5}{10}\cdot\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{10}\cdot\tfrac{1}{2}\\ &= \tfrac{7}{20}\end{aligned}$$

Jawab: C.

13. Apabila bola yang terpilih adalah bola merah, berapa besar probabilitasnya bahwa bola tersebut diambil dari mangkuk pertama

    a. 2/7

    b. 3/7

    c. 4/7

    d. 5/7

    Pembahasan

    $\mathbb{P}[A|M] = \frac{\mathbb{P}[M|A]\cdot\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{20}} = \frac{5}{7}$

    Jawab: D.

14. Apabila diketahui bahwa sebuah portfolio terdiri dari 75 risiko kebakaran dan 25 risiko kecelakaan, risiko-risiko tersebut mempunyai distribusi jumlah klaim yang seragam. Besaran klaim untuk risiko kebakaran mengikuti distribusi Pareto dengan parameter θ = 300 dan α = 4. Besaran klaim untuk risiko kecelakaan mengikuti distribusi Pareto dengan parameter θ = 1.000 dan α = 3. Hitung variansinya

    a. 200

    b. 272.500

    c. 232.500

    d. 482

    Pembahasan

    Rata-rata dari distribusi Pareto:

    $$E[X] = \frac{\alpha\theta}{\alpha-1}$$

    Momen kedua dari distribusi Pareto:

    $$E[X^2] = \frac{\alpha\theta^2}{\alpha-2}$$

    Untuk risiko kebakaran:

    $$E[X]_{\text{kebakaran}} = \frac{(4)(300)}{4-1} = 400$$

    $$E[X^2]_{\text{kebakaran}} = \frac{(4)(300)^2}{4-2} = 180.000$$

Untuk risiko kecelakaan:

$$E[X]_{\text{kecelakaan}} = \frac{(3)(1.000)}{3-1} = 1.500$$

$$E[X^2]_{\text{kecelakaan}} = \frac{(3)(1.000)^2}{3-2} = 3.000.000$$

Variansi besar klaim dari portfolio adalah:

$$\text{Var} = \frac{3}{4}[180.000 - 400^2] + \frac{1}{4}[3.000.000 - 1.500^2] = 202.500$$

15. Untuk satu jenis risiko, jumlah klaim per bulan mengikuti distribusi Poisson dengan mean Θ. Untuk populasinya, Θ terdistribusi dengan distribusi eksponensial dengan probability density function $\pi(\theta) = 10e^{-10\theta}$. Sebuah risiko diketahui memiliki 1 buah klaim di 6 bulan terakhir tahun 2012 dan 1 buah klaim sepanjang tahun 2013. Hitung premi untuk risiko tersebut di 3 bulan pertama tahun 2014 dengan metode Buhlmann Straub Credibility

    a. 9/28
    b. 1/3
    c. 2/14
    d. 11/28

    Pembahasan

    Pertama, kita notasikan C sebagai banyaknya klaim dalam satu bulan untuk seseorang yang dipilih secara acak.

$$\mu(\theta) = \mathbb{E}[C_i|\Theta = \theta] = \theta \text{ (rata-rata dari distribusi Poisson dengan parameter } \theta)$$

$$\mu = \mathbb{E}[C] = \mathbb{E}[\mu(\Theta)] = \mathbb{E}[\Theta] = 0,1 \text{ (rata-rata dari eksponensial)}$$

$$v(\theta) = Var[C|\Theta = \theta] = \theta \text{ (variansi dari distribusi Poisson dengan parameter } \theta)$$

$$v = \mathbb{E}[v(\Theta)] = \mathbb{E}[\Theta] = 0,1$$

$$a = Var[\mu(\Theta)] = Var(\Theta) = 0,01 \text{ (variansi dari eksponensial adalah kuadrat dari nilai rata-rata)}$$

Misalkan $C_{1,1}; C_{1,2}; ...; C_{1,6}$ adalah banyaknya klaim untuk setiap bulan pada 6 bulan terakhir tahun 2012 untuk orang tersebut. Misalkan juga $C_{2,1}; C_{2,2}; ...; C_{2,12}$ adalah banyaknya klaim untuk setiap bulan pada tahun 2013. Kita punya $m = 18$ klaim bulanan dan kita dapat menggunakan metode Buhlmann pada C.

$$k = \frac{v}{a} = \frac{0,1}{0,01} = 10$$

$$Z = \frac{m}{m+k} = \frac{18}{18+10} = \frac{18}{28}$$
$$\bar{C} = \frac{C_{1,1} + ... + C_{1,6} + C_{2,1} + ... + C_{2,12}}{18} = \frac{2}{18}$$

Maka, Buhlmann-Straub credibility premiumnya:

$$Z \cdot \bar{C} + (1-Z)\mu = \frac{18}{28} \cdot \frac{2}{18} + \frac{10}{28}(0,1) = \frac{3}{28}$$

Untuk 3 bulan pertama: $3 \cdot \frac{3}{28} = \frac{9}{28}$.

Jawab: A.

16. Sebuah credibility factor parsial untuk variabel random X berdasarkan 100 exposure dari X adalah Z = 0,4. Berapa tambahan exposure yang diperlukan agar credibility factornya dapat ditingkatkan sampai paling tidak 0,5?

    a. 56
    b. 57
    c. 58
    d. 59

    Pembahasan

    $0,4 = \sqrt{\frac{100}{n_F}}$ dan $0,5 = \sqrt{\frac{100+k}{n_F}}$
    Dari kedua persamaan ini, kita dapat memperoleh $k = 56,25 = 57$

    Jawab: B.

17. Jumlah klaim per periode S mempunyai distribusi Compound Poisson. Anda sudah menghitung bahwa untuk mendapatakan credibility penuh, diperlukan sampel sebanyak 2670 klaim, apabila distribusi dari severity konstan. Jika distribusi dari severity adalah lognormal dengan mean 1000 dan variansi 1.500.000 Berapakah jumlah klaim yang diperlukan untuk mendepatkan credibility penuh?

    a. 6675
    b. 6700
    c. 6725
    d. 6750

    Pembahasan

    S berdistribusi Compound Poisson dengan $n = 2.670$ mendapatkan kredibilitas penuh. Sekarang, S berdistribusi $LN(Rata - rata = 1.000, Var = 1.500.000)$

Misalkan Y menunjukkan distribusi dari severity yang mengikuti distribusi lognormal. Maka $Var(Y) = 0, 2.670 = n_0 \cdot \left(1 + \frac{Var(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}\right) = n_0$

Maka, banyaknya klaim yang dibutuhkan untuk mendapatkan kredibilitas penuh dari total klaim adalah $n_0 \cdot \left[1 + \frac{Var(Y)}{\mathbb{E}[Y]^2}\right] = 2.670 \left(1 + \frac{1.500.000}{1.000^2}\right) = 6.675$

Jawab: A.

18. Sebuah natural cubic spline digunakan untuk mengestimasi h(x) berdasarkan empat titik berikut $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$. Apabila diketahui bahwa $f_1(x) = 1 - 9(x+1) + 4,5(x+1)^2$, berapakah $f'(-2) + f'(2)$?

    a. $-13,5$

    b. $-4,5$

    c. 0

    d. $4,5$

    Pembahasan

    $$f'(x) = -9 + 9(x+1) = 9x$$

    Maka,

    $$f'(-2) + f'(2) = 9(-2) + 9(2) = 0$$

    Jawab: C.

19. Sebuah distribusi Binomial dengan n = 3 dan p = 0,4 disimulasikan dengan metode inverse transform dengan uniform random numbers 0,31 ; 0,71 ; 0,66 ; 0,48 ; 0,19 Berapakah jumlah angka random tersebut yang menghasilkan 2?

    a. 1

    b. 2

    c. 3

    d. 4

    Pembahasan

    Kita dapat mengategorikan:

    $$Y_i = \begin{cases} 0, & \text{jika } U_i \leq 1 - p = 0,6 \\ 1, & \text{jika } U_i > 0,6 \end{cases}$$

U_i	Y_i
0,31	0
0,71	1
0,66	1
0,48	0
0,19	0

$$X = \sum Y_i = 2$$

Maka, jumlah angka random tersebut adalah 2.

Jawab: B.

20. Sebuah fungsi probability density (pdf) $f(x) = 1,5x^2$ untuk $-1 \leq x \leq 1$. Simulasi dengan random numbers [0,1] digunakan dan angka randomnya adalah 0,5005 dan 0,2440. Dengan menggunakan inverse transform method, berapakah jumlah dari hasil random tersebut?

    a. -0,7

    b. -0,6

    c. -0,5

    d. -0,4

    Pembahasan

    $F(x) = \int_{-1}^{x} 1.5t^2 dt = \frac{1}{2}(x^3 + 1)$

    $y = \frac{1}{2}(x^3 + 1)$ maka $x = \sqrt[3]{2y - 1}$

    Jadi, $\sqrt[3]{2(0,5005) - 1} + \sqrt[3]{2(0,244) - 1} = -0,7$

    Jawab: A.

Untuk soal no 21 - 23. Data klaim adalah sebesar berikut 130,20,350,218,1822

21. Apabila data tersebut diatas diambil dari distribusi Pareto, dengan metode momen, tentukan nilai α dari distribusi pareto tersebut

    a. Kurang dari 3,5

    b. Antara 3,5 sampai 4

    c. Antara 4 sampai 5

d. Lebih dari 5

Pembahasan

Besar klaim antara lain: 130, 20, 350, 218, 1822.

$\mathbb{E}[X] = \frac{\theta}{\alpha-1} = \frac{1}{5}(130 + 20 + 350 + 218 + 1822) = 508$

$\mathbb{E}[X^2] = \frac{2\theta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{1}{5}(130^2 + 20^2 + 350^2 + 218^2 + 1822^2) = 701.401,6$

Dengan manipulasi aljabar, kita dapat peroleh $\alpha = 4,785761$.

Jawab: C.

22. Tentukan θ dari distribusi pareto di atas

    a. Kurang dari 2000

    b. Antara 2000 sampai 2100

    c. Antara 2100 sampai 2200

    d. Lebih dari 2200

    Pembahasan

    $\theta = 508(\alpha - 1) = 1.923,167$.

    Jawab: A.

23. Tentukan expected value dengan limit 500

    a. Kurang dari 250

    b. Antara 250 dan 280

    c. Antara 280 dan 310

    d. Lebih dari 310

    Pembahasan

    Maka nilai ekspektasi dengan limit 500 adalah

$$\frac{\theta}{\alpha-1}\left[1-\left(\frac{\theta}{\theta+500}\right)^{\alpha-1}\right] = \frac{1.923,167}{3,785761}\left[1-\left(\frac{1.923,167}{2.423,167}\right)^{3,785761}\right] = 296,21$$

    Jawab: C.

24. Berikut adalah informasi mengenai besar klaim untuk 100 klaim

Ukuran Klaim	Jumlah Klaim
0-1.000	16
1.000-3.000	22
3.000-5.000	25
5.000-10.000	18
10.000-25.000	10
25.000-50.000	5
50.000-100.000	3
$>$ 100.000	1

Dengan ogive, estimasi kemungkinan bahwa sebuah klaim yang dipilih secara acak berada di antara 2.000 sampai 6.000

a. 0,36
b. 0,4
c. 0,45
d. 0,47

Pembahasan

$\mathbb{P}[2.000 \leq X \leq 6.000] = \frac{\frac{1}{2}\cdot 22+25+\frac{1}{5}\cdot 18}{100} = 0,396$

Jawab: B.

25. Diketahui bahwa klaim untuk asuransi mobil di sebuah daerah mengikuti distribusi Weibull:

$$F(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\theta})^{0,2}}, \quad x > 0$$

Sampel dari empat buah klaim diketahui sebesar 130, 240, 300, 540 dan dua buah klaim lainnya diketahui lebih dari 1000. Tentukan estimasi dari θ dengan maximum likelihood

a. Kurang dari 300
b. Antara 300 sampai 1200
c. Antara 1200 sampai 2100
d. Lebih dari 2100

Pembahasan

Diberikan $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{0,2}}, x > 0$, maka $f(x) = \frac{1}{5} \cdot \theta^{-0,2} \cdot x^{-0,8} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{0,2}}$. Klaim sebesar: 130, 240, 300, 540, 1.000*, 1.000*.

$$\begin{aligned} L(\theta) &= f(130)\cdot f(240)\cdot f(300)\cdot f(540)\cdot[1-F(1.000)]^2 \\ &= 0,2^4\cdot\theta^{-0,8}\left(\frac{1}{130^{0,8}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{540^{0,8}}\right)\cdot e^{-\left[(\frac{130}{\theta})^2+(\frac{240}{\theta})^2+(\frac{300}{\theta})^2+(\frac{540}{\theta})^2+2(\frac{1000}{\theta})^2\right]} \end{aligned}$$

Dengan menghilangkan konstanta yang tidak akan digunakan,

$$\begin{aligned} l(\theta)=lnL(\theta) &\propto -0,8ln(\theta)-[\theta^{-0,2}(130^{0,2}+240^{0,2}+\ldots+2\cdot 1.000^{0,2})] \\ l'(\theta) &= -\frac{0,8}{\theta}+0,2\theta^{-1,2}(130^{0,2}+240^{0,2}+\ldots+2\cdot 1.000^{0,2})=0 \\ \hat{\theta} &= 3.325,69 \end{aligned}$$

Jawab: D.

26. Diketahui jumlah klaim mengikuti distribusi negative binomial dengan parameter r dan β = 3. Ukuran klaim mengikuti distribusi berikut: klaim sebesar 1, kemungkinan 0,4, klaim sebesar 10, kemungkinan 0,4 dan klaim sebesar 100 kemungkinan 0,2. Jumlah klaim independen terhadap ukuran klaim. Tentukan jumlah klaim yang dibutuhkan untuk aggregate losses di dalam 10% dari expected aggregate losses dengan probabilitas sebesar 95%.

    a. Kurang dari 1200
    b. Antara 1200 dan 1600
    c. Antara 1600 dan 2000
    d. Lebih dari 2000

    Pembahasan

    Frekuensi dinotasikan dengan N.

    $\mathbb{E}[N]=r\beta=3r$

    $Var(N)=r\beta(1+\beta)=12r$

    Besar klaim dinotasikan dengan S.

    $\mathbb{E}[S]=1(0,4)+10(0,4)+100(0,2)=24,4$

    $\mathbb{E}[S^2]=1^2(0,4)+10^2(0,4)+100^2(0,2)=2.040,4$

    $Var(S)=\mathbb{E}[S^2]-(\mathbb{E}[S])^2=1.445,04$

    Aggregate kerugian dinotasikan dengan L.

    $\mathbb{E}[L]=\mathbb{E}[N]\cdot\mathbb{E}[S]=73,2r$

    $$\begin{aligned} Var(L) &= \mathbb{E}[N]\cdot Var(S)+Var(N)\cdot(\mathbb{E}[S])^2 \\ &= 3r(1.445,04)+12r(24,4)^2 \\ &= 11.479,44r \end{aligned}$$

    95% CI: $Z_{0,95}=1,96$

    Jadi, toleransi $\lambda_0=\left(\frac{1,96}{10\%}\right)^2=384,16$

$\frac{\lambda_0 \cdot Var(L)}{\mathbb{E}[L]^2} = \frac{384{,}16(11{,}479.44r)}{(73{,}2r)^2} = \frac{823{,}02}{r}$

Banyaknya klaim yang harus ada $= \frac{823{,}02}{r}(3r) = 2.469,06$

Jawab: D.

27. Berikut adalah sampel acak dari 10 klaim dengan besaran sebagai berikut:

46	121	493	738	775
1078	1452	2054	2199	3207

Tentukan estimasi empiris yang di-smooth (smoothed empirical estimate) untuk percentile ke 90.

a. Kurang dari 2150

b. Antara 2150 sampai 2500

c. Antara 2500 sampai 2850

d. Lebih dari 2850

Pembahasan

Karena kita mencari percentile ke 90, maka kita mencari 0,9 dari data. Lalu percentile ke 90 terletak di antara 2199 dan 3207. Maka:

$0,9(3207) = 2886,3$

Jawab: D.

28. Berikut adalah informasi mengenai dua jenis produk, di mana X adalah kerugian untuk setiap tertanggung

	Produk 1	Produk 2
Jumlah tertanggung	25	50
$\mathbb{E}[X]$	380	23
$\mathbb{E}[X^2]$	365.000	-

Anda juga diberi informasi hasil analsis bahwa Buhlmann k value adalah sebesar 2,65 Hitunglah Variansi dari Produk 2

a. 2.280

b. 2.810

c. 7.280

d. 28.320

Pembahasan

Karena nilai dari Buhlmann k-value adalah 2,65, maka $2,65 = \frac{v}{a}$ menjadi $v = 2,65a$. Rata-rata keseluruhan data adalah $\bar{X} = \frac{25(380)+50(23)}{25+50} = 142$.

$$a = \frac{25}{75} \cdot 380^2 + \frac{50}{75} \cdot 23^2 - 142^2 = 28.322$$

Maka, $v = 2,65(28.322) = 75.053,3$.

Lalu, $75.053,3 = \frac{1}{3} \cdot (365.000 - 380^2) + \frac{2}{3} \cdot Var(X_2)$, sehingga diperoleh $Var(X_2) = 2.279,95$

Jawab: A.

29. Anda diberitahu informasi berikut mengenai dua jenis risiko:

a. Risiko A, mempunyai distribusi jumlah klaim mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 1 klaim per tahun dan distribusi besar klaim mengikuti distribusi exponential dengan rata-rata 1

b. Risiko B, mempunyai distribusi jumlah klaim mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata 3 klaim per tahun dan distribusi besar klaim mengikuti distribusi exponential dengan rata-rata 3

Sebuah risiko dipilih secara acak dan hasil pengamatan menunjukkan bahwa terjadi 2 klaim dalam satu tahun. Masing-masing besarnya adalah 1 dan 3. Hitung ekspektasi posterior dari klaim keseluruhan untuk risiko ini tahun depan

a. Kurang dari 2
b. Antara 2 sampai 4
c. Antara 4 sampai 6
d. Lebih dari 6

Pembahasan

Misalkan N menunjukkan distribusi jumlah klaim, sedangkan S menunjukkan distribusi besar klaim.

Untuk risiko A, rataan kemungkinan terjadi klaim adalah:

$$\mathbb{E}[N_A] = 1, \mathbb{E}[S_A] = 1 \Rightarrow \mu(A) = 1 \cdot 1 = 1$$

Untuk risiko B, rataan kemungkinan terjadi klaim adalah:

$$\mathbb{E}[N_B] = 3, \mathbb{E}[S_B] = 3 \Rightarrow \mu(B) = 3 \cdot 3 = 9$$

Karena terjadi 2 klaim dan masing-masing klaim besarnya adalah 1 dan 3, maka kemungkinan terjadi risiko A dan risiko B adalah 50%.

$$\mathbb{P}(\text{risiko A}|\text{klaim keseluruhan}) = \frac{0,5(1)}{0,5(1)+0,5(9)} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(\text{risiko B}|\text{klaim keseluruhan}) = \frac{0,5(9)}{0,5(1)+0,5(9)} = \frac{9}{10}$$

$$\mathbb{E}[\text{klaim keseluruhan}] = 1\left(\frac{1}{10}\right) + 9\left(\frac{9}{10}\right) = 8,2$$

Jawab: D.

30. Ukuran sebuah klaim mengikuti distribusi inverse exponential distribution dengan probability density function sebagai berikut:

$$f(x|\theta) = \frac{\theta e^{-\frac{\theta}{x}}}{x^2}, \quad x > 0$$

Parameter θ mempunyai prior distribution dengan probability distribution function sebagai berikut:

$$g(\theta) = \frac{e^{-\theta/4}}{4}, \quad \theta > 0$$

Sebuah klaim dengan besar 2 terjadi untuk tertanggung tersebut. Persamaan mana yang proporsional dengan distribusi posterior dari θ

a. $\theta e^{-\theta/2}$

b. $\theta e^{-3\theta/4}$

c. $\theta e^{-\theta}$

d. $\theta^2 e^{-\theta/2}$

Pembahasan

$f(x|\theta) = \frac{\theta \cdot e^{-\frac{\theta}{x}}}{x^2}, x > 0$

$g(\theta) = \frac{e^{-\frac{\theta}{4}}}{4}, \theta > 0$

Klaim = 2, maka:

$f(2|\theta) = \frac{\theta \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}}{2^2} = \frac{\theta}{4} \cdot e^{-\frac{\theta}{2}}$

Posterior $= \frac{f(2|\theta)}{g(\theta)} = \frac{\frac{\theta}{4} e^{-\frac{\theta}{2}}}{\frac{e^{-\frac{\theta}{4}}}{4}} = \theta \cdot e^{-\frac{3\theta}{4}}$

Jawab: B.